Exercice 13
Soient $z_1 = 1 + i,\ z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.
Déterminer les formes algébrique et polaire de z_3 et en déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme exponentielle, et, si possible, sous forme algébrique) :

1. $z^2 = -2 + 2i$
2. $z^2 = \sqrt{3} - 3i$
3. $z^3 = 1$
4. $z^3 = -1$
5. $z^4 = 1$

Exercice 15
Résoudre sur $\mathbb{C}$:

1. $(1+i)z^2 + iz = 0$
2. $2\,\overline{z} - 1 = -z + i$
3. $e^z = 2 - 2i$

Exercice 16
Résoudre dans $\mathbb{C}$ (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

1. $z^2 = \dfrac{3}{2} - 2i$
2. $z^2 = -i$

Exercice 17
Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $z = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$. Déterminer z^{2026}.
2. Soit $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Calculer z^2. En déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 18
Linéariser les expressions suivantes (où $a, b, \theta \in \mathbb{R}$) :

1. $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$
2. $\sin^4(\theta)$
3. $\cos(a)\,\sin(b)$

Exercice 19
Soient x un réel et n un entier naturel.
Déterminer les valeurs de $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

Exercice 20
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in]0, \pi[$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin x}$.
2. En déduire les solutions sur $]0, \pi[$ de l'équation :
$\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$.

Exercice 21
Soit $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.
1. Déterminer j^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Combien vaut $1 + j + j^2$?

De manière plus générale, soit $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Combien de valeurs différentes prend ω^k pour $k \in \mathbb{N}$?
4. Combien vaut $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$?

Exercice 22
On considère trois points A, B, C du plan d'affixes respectives $a = 1 - i$, $b = 2 + i$ et $c = 3 - 2i$.
1. Placer les points A, B, C dans le plan complexe.
2. Interpréter géométriquement le module et un argument de $Z = \dfrac{c-a}{b-a}$.
3. Calculer Z et en déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 23
Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On dit que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si ABC est équilatéral et l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.
Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si ABC ou ACB est équilatéral direct.
1. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$ où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.
3. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.