Programme de colles : semaine 6, du 9/11 au 13/11

Les colles du mercredi 11 novembre sont décalées : consultez la page d'accueil de cahier de prépa.
Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Trigonométrie

- interprétation géométrique de la mesure d'un angle en radians, du cosinus, du sinus, de la tangente. Ensemble de définition de la tangente.
- Interprétation des théorèmes de Thalès et Pythagore avec les fonctions sin et cos (en particulier, $\sin^2 + \cos^2 = 1$)
- rotations, symétries sur le cercle trigonométrique.
- valeurs usuelles de $\sin, \cos, \tan$ (à savoir par cœur)
- formules $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
- Les formules pour les quantités suivantes sont à savoir par cœur : $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\tan(-\theta)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\tan(a+b)$
- Les formules pour les quantités suivantes sont à savoir retrouver rapidement : $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, cos, sin et tan de $\pm\theta \pm \pi$, $\pm\theta \pm \frac{\pi}{2}$
- résolution d'équations trigonométriques sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle donné. On se ramène à $\cos(\theta) = \cos(\phi)$, $\sin(\theta) = \sin(\phi)$, $\tan(\theta) = \tan(\phi)$.
- Notation modulo. *On encourage les élèves à revenir à la définition de $a \equiv b\ [T]$ aussi souvent que nécessaire.*
- résolution d'inéquations trigonométriques sur un intervalle donné. *Pour les inéquations, on attend une justification par un dessin uniquement.*
- définition de $\arccos, \arcsin, \arctan$. Résolution de $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$ lorsque c, s et t ne correspondent pas à des valeurs usuelles.
- Étude des fonctions $\arccos, \arcsin, \arctan$: ensembles de définition et d'arrivée, variations, graphes, dérivées. *La formule de la dérivée d'une bijection réciproque a été démontrée en admettant le caractère dérivable.*
- écriture sous la forme phase/amplitude. *La convention choisie est d'écrire $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ sous la forme $r\cos(\theta + \phi)$.*

2 Nombres complexes

Attention *: les points suivants n'ont pas encore été abordés en classe : sommes trigonométriques, exponentielle d'un nombre complexe non imaginaire pur, racines n-èmes de l'unité, résolution de $z^n = \omega$, cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, formule de Moivre.*

- forme algébrique, parties réelle et imaginaire
- résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations polynomiales de degré 2 à coefficients réels. *Les élèves ne doivent pas utiliser le discriminant pour résoudre $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.*
- conjugaison, règles de calcul
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$, $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- calcul de la forme algébrique d'un quotient
- notion d'affixe d'un point du plan, interprétation géométrique de la somme, de l'opposé, du conjugué
- module : définition, règles de calcul, le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$
- interprétation géométrique du module : si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $AB = |z_A - z_B|$. Exemple de résolutions d'équation du type $|z - i| = |z - 1|$.
- inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$. *Le cas d'égalité et le corollaire permettant de minorer $|z - z'|$ n'ont pas été abordés en classe.*
- forme trigonométrique, argument, notation exponentielle, règles de calculs, interprétation géométrique. *L'interprétation géométrique de $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ n'a pas été abordée en classe Vocabulaire : on ne fait pas de distinction entre formes trigonométrique, polaire et exponentielle.*
- pour $r, r' \in \mathbb{R}^+$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \ :\ \theta = \varphi + 2k\pi$
- retour sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$)
- formules d'Euler. Application à la linéarisation de produits de cosinus et sinus
- technique "de l'angle moitié" pour déterminer la forme trigonométrique de $e^{i\theta} \pm e^{i\varphi}$

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Présenter une fonction usuelle parmi : arccosinus, arcsinus, arctangente.
2. Donner la formule exprimant $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. Énoncer et démontrer la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
4. Énoncer les propriétés permettant de résoudre des équations du type $\cos(\theta)=\cos(\varphi)$, $\sin(\theta)=\sin(\varphi)$ ou $\tan(\theta)=\tan(\varphi)$. On explicitera la notation $a \equiv b\ [T]$ y intervenant.
5. En utilisant l'écriture sous forme "phase/amplitude" résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2}$ (ou toute autre équation du type $a\cos(x)+b\sin(x)=c$ choisie par l'examinateur).
6. Donner la définition du conjugué de $z \in \mathbb{C}$. Démontrer ensuite que : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et en déduire que : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
7. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$) choisie par l'examinateur.
8. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$ *(sans corollaire ni cas d'égalité).*
9. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
10. Linéariser $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ ou tout autre expression du type $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ avec $p, q \in [\![0,4]\!]$ choisie par l'examinateur.

Cette semaine en complément de la question de cours, tous les colleurs demanderont deux valeurs usuelles de cos, sin, tan, arccos, arcsin *ou* arctan *(exemple de question : donner* $\sin(\frac{5\pi}{6})$ *et* $\arctan(-\sqrt{3})$*). Les élèves sont encouragés à faire un dessin illustrant leur réponse. Ces questions seront prises en compte dans les 10 points dédiés à la question de cours.*

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.