Modélisation SLCI
Laplace

Decour CPGE – 9 rue Francis-de-Croisset – 75018 Paris

Réponse temporelle $2^{ème}$ ordre – Utilisation des abaques

Exercice 1 – Système du second ordre peu amorti

Objectif Tracer la réponse indicielle d'un système du second ordre et déterminer son temps de réponse à 5 %

Soit le système (entrée $e(t)$, sortie $s(t)$) qui respecte l'équation différentielle suivante :

$$0{,}098\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 0{,}125\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \qquad \text{avec conditions initiales nulles}$$

On pose une entrée $e(t) = 2\,u(t)$, avec $u(t)$ la fonction existence (échelon unitaire).

Q1. Tracer le plus précisément possible la sortie $s(t)$ en fonction du temps à l'aide de l'abaque de dépassement.

Q2. En déduire le temps de réponse à 5 %.

Q3. À l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, déterminer le temps de réponse à 5 % du système et comparer avec les résultats de la question précédente.

D'après D-Leoni

Exercice 2 – Système du second ordre, gain non unitaire

Objectif Mettre une équation différentielle sous forme canonique et tracer la réponse indicielle

Soit le système (entrée $e(t)$, sortie $s(t)$) qui respecte l'équation différentielle suivante :

$$2{,}472\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3{,}276\,\frac{ds(t)}{dt} + 12\,s(t) = 36\,e(t) \qquad \text{avec conditions initiales nulles}$$

On pose une entrée $e(t) = u(t)$, avec $u(t)$ la fonction existence.

Q1. Tracer le plus précisément possible la sortie $s(t)$ en fonction du temps à l'aide de l'abaque de dépassement.

Q2. En déduire le temps de réponse à 5 %.

Q3. À l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, déterminer le temps de réponse à 5 % du système et comparer avec les résultats de la question précédente.

D'après D-Leoni

Exercice 3 – Système du second ordre bien amorti

Objectif Tracer la réponse indicielle d'un système du second ordre bien amorti

Soit le système (entrée $e(t)$, sortie $s(t)$) qui respecte l'équation différentielle suivante :

$$0{,}03\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 0{,}36\,\frac{ds(t)}{dt} + 3\,s(t) = 6\,e(t) \qquad \text{avec conditions initiales nulles}$$

On pose une entrée $e(t) = u(t)$, avec $u(t)$ la fonction existence.

Q1. Tracer le plus précisément possible la sortie $s(t)$ en fonction du temps à l'aide de l'abaque de dépassement.

Q2. En déduire le temps de réponse à 5 %.

Q3. À l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, déterminer le temps de réponse à 5 % du système et comparer avec les résultats de la question précédente.

D'après D-Leoni

Identification à partir d'une réponse indicielle

On dispose maintenant de la réponse d'un système à un échelon. Le but est de trouver un modèle, c'est-à-dire une équation différentielle et une fonction de transfert. Une fois avoir déterminé le modèle il est possible de simuler la réponse du système.

Exercice 4 – Identification d'un 1er ordre, échelon unitaire

Objectif Identifier un système du 1er ordre à partir de sa réponse à un échelon unitaire

On soumet un système à une entrée $e(t) = u(t)$, avec $u(t)$ un échelon unitaire. On relève sa sortie $s(t)$:

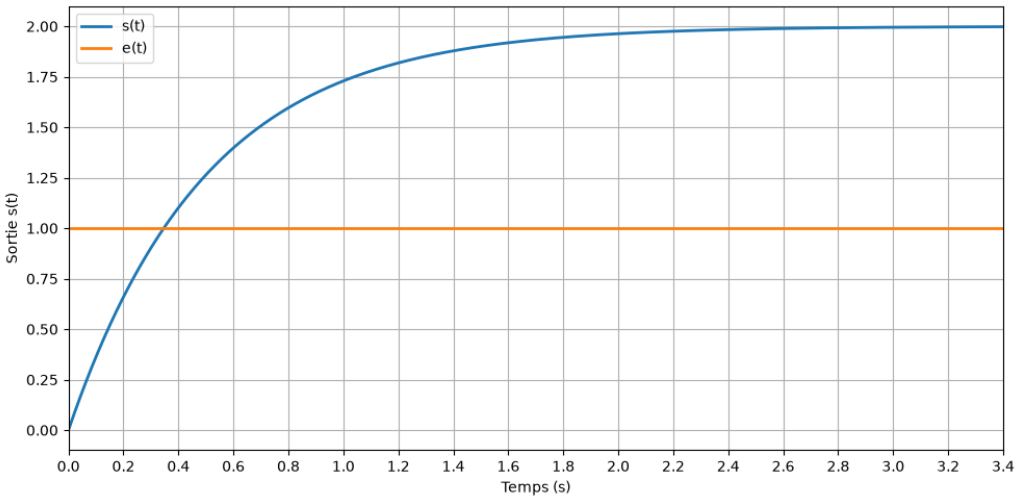


FIGURE 1 – Réponse temporelle du système

Q1. Justifier que ce système peut être modélisé par un système du 1er ordre.

Q2. Déterminer le gain statique K et la constante de temps τ du système.

Q3. En déduire l'équation différentielle du système, puis sa fonction de transfert $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Exercice 5 – Identification d'un 2e ordre, échelon unitaire

Objectif Identifier un système du 2e ordre à partir de sa réponse à un échelon unitaire

On soumet un système à une entrée $e(t) = 1.5\,u(t)$. On relève sa sortie $s(t)$:

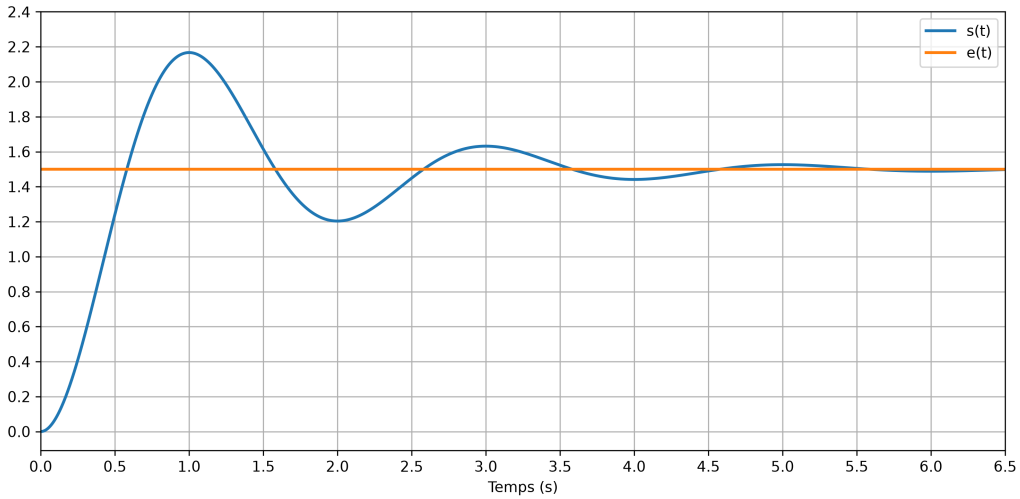


FIGURE 2 – Réponse temporelle du système

Q1. Justifier que ce système peut être modélisé par un système du 2e ordre. Que peut-on dire de son coefficient d'amortissement ?

Q2. Déterminer le gain statique K.

Q3. Mesurer le premier dépassement relatif D_1, puis en déduire ξ à l'aide de l'abaque de dépassement.

Q4. Mesurer la pseudo-période T_p, puis en déduire la pulsation propre ω_0.

Q5. En déduire l'équation différentielle du système, puis sa fonction de transfert.

Exercice 6 – Identification d'un 2e ordre, échelon non unitaire

Objectif Identifier un système du 2e ordre à partir de sa réponse à un échelon non unitaire, et vérifier le modèle obtenu

On soumet un système à une entrée $e(t) = 5\,u(t)$. On relève sa sortie $s(t)$:

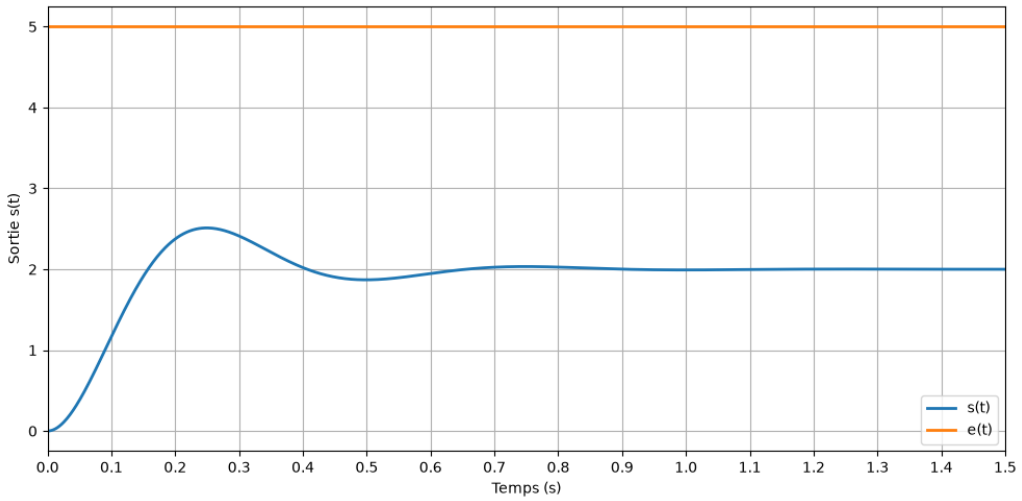


FIGURE 3 – Réponse temporelle du système

Q1. Déterminer le gain statique K.

Q2. Déterminer le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0.

Q3. En déduire l'équation différentielle du système, puis sa fonction de transfert.

Q4. Vérifier le modèle obtenu : à l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, prévoir le temps de réponse à 5 % du modèle, puis comparer avec celui que l'on lit sur la courbe.

Annexe – Abaques du second ordre

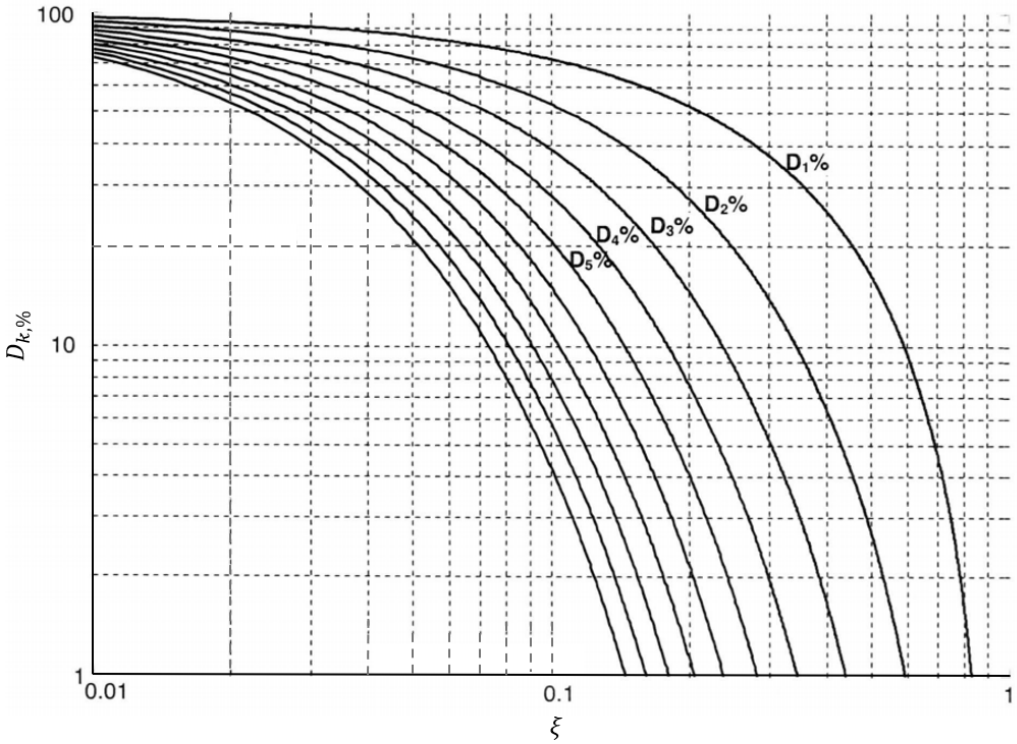


FIGURE 4 – Abaque des dépassements relatifs D_k en fonction de ξ

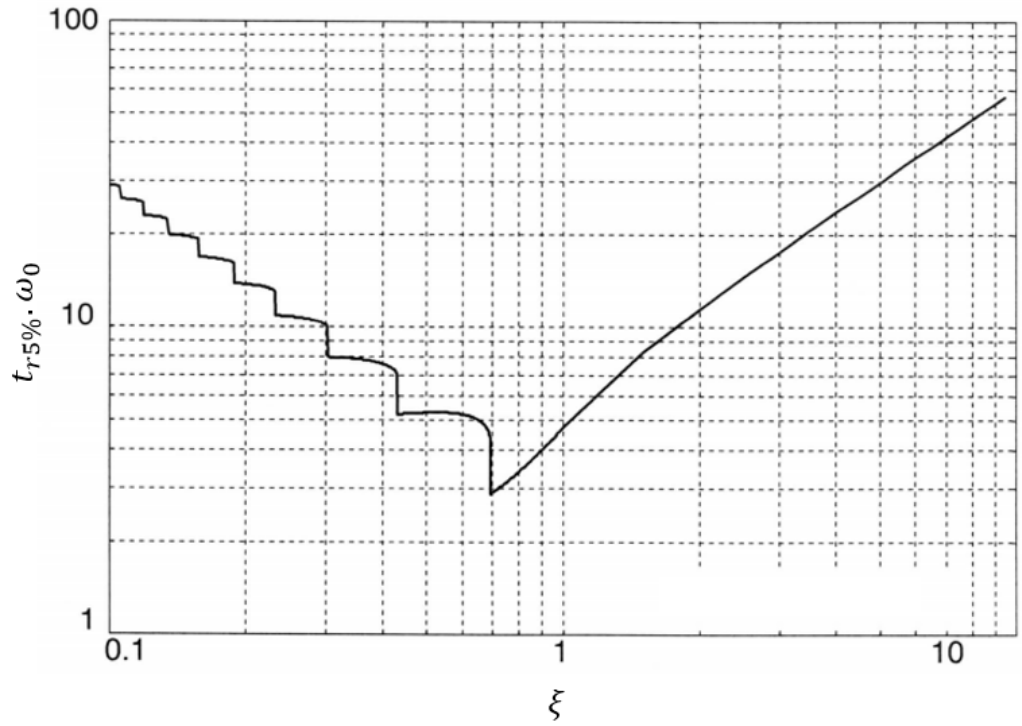


FIGURE 5 – Abaque du temps de réponse réduit $t_{r5\%} \cdot \omega_0$ en fonction de ξ