Modélisation SLCI
Laplace

Decour CPGE – 9 rue Francis-de-Croisset – 75018 Paris

Réponse temporelle 2ème ordre – Utilisation des abaques

À retenir

Forme canonique d'un système du second ordre :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec K le gain statique, ξ le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre (en rad/s).

Méthode pour tracer la réponse à un échelon d'amplitude E_0 (cas $\xi<1$) :

1. Mettre l'équation sous forme canonique et identifier K, ω_0 et ξ.
2. Calculer la valeur finale $s_\infty = K\,E_0$. La tangente à l'origine est horizontale dans le cas d'un système du 2ème ordre.
3. Lire les dépassements relatifs D_k sur l'abaque de dépassement.
4. Calculer la pseudo-période $T_p=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$. Les extrema sont atteints aux instants $t_k = k\,\dfrac{T_p}{2}$.

Exercice 1 – Système du second ordre peu amorti

Objectif Tracer la réponse indicielle d'un système du second ordre et déterminer son temps de réponse à 5 %

Soit le système (entrée $e(t)$, sortie $s(t)$) qui respecte l'équation différentielle suivante :

$$0{,}098\,\frac{d^2s(t)}{dt^2}+0{,}125\,\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t) \qquad \text{avec conditions initiales nulles}$$

On pose une entrée $e(t)=2\,u(t)$, avec $u(t)$ la fonction existence (échelon unitaire).

Q1. Tracer le plus précisément possible la sortie $s(t)$ en fonction du temps à l'aide de l'abaque de dépassement.

Identification : l'équation est déjà sous forme canonique (le coefficient de $s(t)$ vaut 1).

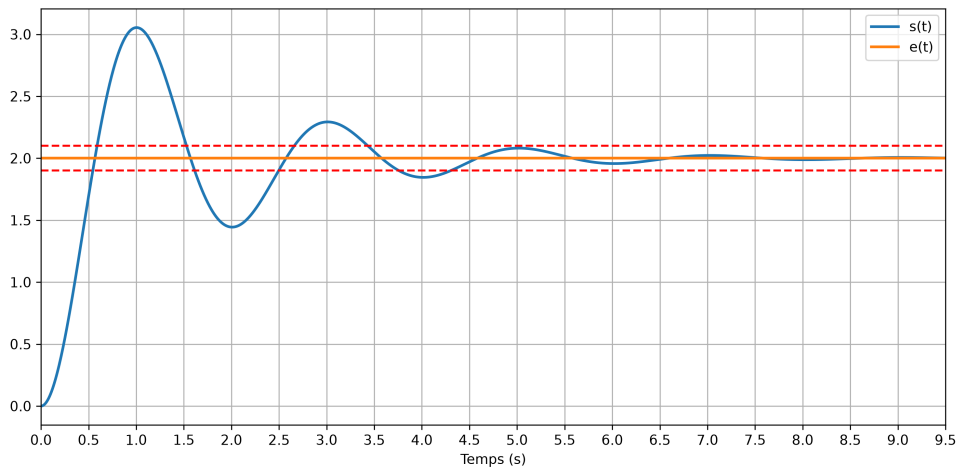
$$K = 1 \qquad \frac{1}{\omega_0^2} = 0{,}098 \;\Rightarrow\; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0{,}098}} \approx 3{,}19 \text{ rad/s}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = 0{,}125 \;\Rightarrow\; \xi = \frac{0{,}125 \times 3{,}19}{2} \approx 0{,}2$$

Caractéristiques de la réponse :

- Valeur finale : $s_\infty = K\,E_0 = 1 \times 2 = 2$;
- $\xi = 0{,}2 < 1$: la réponse est oscillante amortie, avec une tangente horizontale à l'origine ;
- Pseudo-période : $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{2\pi}{3{,}19 \times \sqrt{1-0{,}2^2}} \approx 2{,}0$ s, donc un extremum toutes les $\dfrac{T_p}{2} \approx 1{,}0$ s ;
- Dépassements lus sur l'abaque pour $\xi = 0{,}2$: $D_1 \approx 53\,\%$, $D_2 \approx 28\,\%$, $D_3 \approx 15\,\%$, $D_4 \approx 8\,\%$, $D_5 \approx 4\,\%$.

Extremum k	1	2	3	4	5	6
t_k (s)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
D_k	53 %	28 %	15 %	8 %	4 %	2 %
$s(t_k)$	3,05	1,44	2,29	1,85	2,08	1,96



Pour information un système sous-amorti ($0 < \xi < 1$), la réponse temporelle a pour équation :

$$\boxed{s(t) = 2 + 2{,}13e^{-0{,}638t}\sin(3{,}13t + 4{,}51)} \qquad (t \geq 0)$$

Q2. En déduire le temps de réponse à 5 %.

Le temps de réponse à 5 % est l'instant à partir duquel la sortie reste dans la bande $[0{,}95\,s_\infty\ ;\ 1{,}05\,s_\infty] = [1{,}9\ ;\ 2{,}1]$.
$D_4 \approx 8\,\% > 5\,\%$ et $D_5 \approx 4\,\% < 5\,\%$. La sortie quitte la bande pour la dernière fois au 4e extremum ($t_4 \approx 4{,}0$ s), et elle y entre définitivement peu après. On lit sur la courbe :

$$t_{r5\%} \approx 4{,}3 \text{ s}$$

Q3. À l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, déterminer le temps de réponse à 5 % du système et comparer avec les résultats de la question précédente.

Pour $\xi = 0{,}2$, on lit sur l'abaque : $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 14$. Donc :

$$t_{r5\%} \approx \frac{14}{\omega_0} = \frac{14}{3{,}19} \approx 4{,}4 \text{ s}$$

Ce résultat est cohérent avec la lecture graphique (4,3 s). L'écart vient de l'imprécision de lecture : pour un faible amortissement, la courbe de l'abaque est en « dents de scie », ce qui la rend difficile à lire.

D'après D-Leoni

Exercice 2 – Système du second ordre, gain non unitaire

Objectif Mettre une équation différentielle sous forme canonique et tracer la réponse indicielle

Soit le système (entrée $e(t)$, sortie $s(t)$) qui respecte l'équation différentielle suivante :

$$2{,}472\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3{,}276\,\frac{ds(t)}{dt} + 12\,s(t) = 36\,e(t) \qquad \text{avec conditions initiales nulles}$$

On pose une entrée $e(t) = u(t)$, avec $u(t)$ la fonction existence.

Q1. Tracer le plus précisément possible la sortie $s(t)$ en fonction du temps à l'aide de l'abaque de dépassement.

Forme canonique : on divise par 12, le coefficient de $s(t)$.

$$0{,}206\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 0{,}273\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 3\,e(t)$$

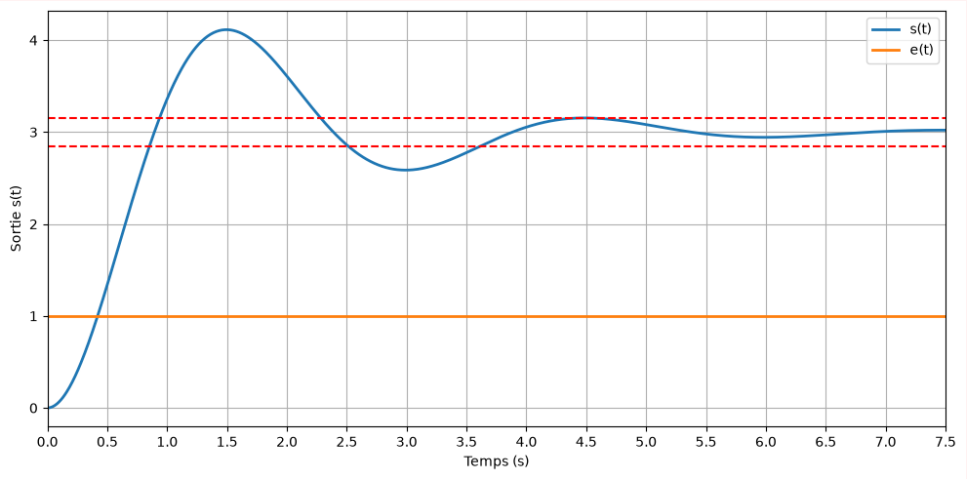
Identification :

$$K = 3 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0{,}206}} \approx 2{,}20 \text{ rad/s} \qquad \xi = \frac{0{,}273 \times 2{,}20}{2} \approx 0{,}3$$

Caractéristiques de la réponse :

- Valeur finale : $s_\infty = K\,E_0 = 3 \times 1 = 3$;
- Pseudo-période : $T_p = \dfrac{2\pi}{2{,}20 \times \sqrt{1 - 0{,}3^2}} \approx 3{,}0$ s, donc un extremum toutes les 1,5 s ;
- Dépassements lus sur l'abaque pour $\xi = 0{,}3$: $D_1 \approx 37\,\%$, $D_2 \approx 14\,\%$, $D_3 \approx 5\,\%$, $D_4 \approx 2\,\%$.

Extremum k	1	2	3	4
t_k (s)	1,5	3,0	4,5	6,0
D_k	37 %	14 %	5 %	2 %
$s(t_k)$	4,11	2,59	3,15	2,94



Q2. En déduire le temps de réponse à 5 %.

La bande à $\pm 5\,\%$ est [2,85 ; 3,15].
$D_3 \approx 5{,}1\,\%$, juste au-dessus de 5 %, et $D_4 \approx 2\,\% < 5\,\%$. La sortie sort de la bande de justesse au 3e extremum ($t_3 \approx 4{,}5$ s), puis elle y entre définitivement juste après :

$$t_{r5\%} \approx 4{,}6 \text{ s}$$

Remarque : comme D_3 est très proche de 5 %, la lecture graphique est délicate ici.

Q3. À l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, déterminer le temps de réponse à 5 % du système et comparer avec les résultats de la question précédente.

Pour $\xi = 0{,}3$, on lit sur l'abaque : $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 10$. Donc :

$$t_{r5\%} \approx \frac{10}{2{,}20} \approx 4{,}5 \text{ s}$$

Ce résultat est cohérent avec la lecture graphique (4,6 s).

D'après D-Leoni

Exercice 3 – Système du second ordre bien amorti

Objectif Tracer la réponse indicielle d'un système du second ordre bien amorti

Soit le système (entrée $e(t)$, sortie $s(t)$) qui respecte l'équation différentielle suivante :

$$0{,}03\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 0{,}36\,\frac{ds(t)}{dt} + 3\,s(t) = 6\,e(t) \qquad \text{avec conditions initiales nulles}$$

On pose une entrée $e(t) = u(t)$, avec $u(t)$ la fonction existence.

Q1. Tracer le plus précisément possible la sortie $s(t)$ en fonction du temps à l'aide de l'abaque de dépassement.

Forme canonique : on divise par 3, le coefficient de $s(t)$.

$$0{,}01\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 0{,}12\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 2\,e(t)$$

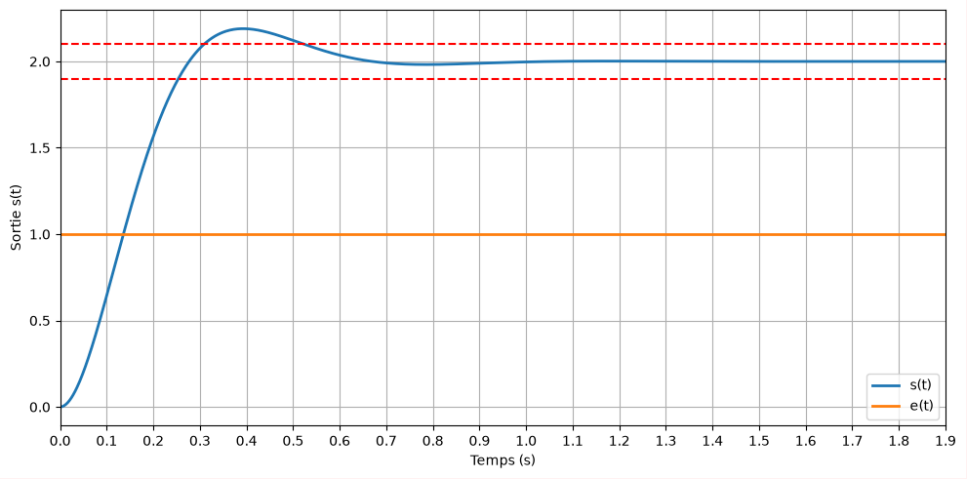
Identification :

$$K = 2 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0{,}01}} = 10 \text{ rad/s} \qquad \xi = \frac{0{,}12 \times 10}{2} = 0{,}6$$

Caractéristiques de la réponse :

- Valeur finale : $s_\infty = K\,E_0 = 2 \times 1 = 2$;
- Pseudo-période : $T_p = \dfrac{2\pi}{10 \times \sqrt{1 - 0{,}6^2}} = \dfrac{2\pi}{8} \approx 0{,}79$ s ;
- Dépassements lus sur l'abaque pour $\xi = 0{,}6$: $D_1 \approx 9{,}5\,\%$ et $D_2 \approx 1\,\%$, ce qui est quasiment invisible.

Le premier dépassement est atteint à $t_1 = \dfrac{T_p}{2} \approx 0{,}39$ s, avec $s(t_1) = 2 \times (1 + 0{,}095) \approx 2{,}19$.



Q2. En déduire le temps de réponse à 5 %.

La bande à $\pm 5\,\%$ est $[1{,}9\ ;\ 2{,}1]$.
$D_1 \approx 9{,}5\,\% > 5\,\%$ et $D_2 \approx 1\,\% < 5\,\%$. La sortie dépasse la bande au premier dépassement, puis elle y entre définitivement en redescendant, quand elle repasse sous 2,1 :

$$t_{r5\%} \approx 0{,}52 \text{ s}$$

Q3. À l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, déterminer le temps de réponse à $5\,\%$ du système et comparer avec les résultats de la question précédente.

Pour $\xi = 0{,}6$, on lit sur l'abaque : $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 5{,}2$. Donc :

$$t_{r5\%} \approx \frac{5{,}2}{10} = 0{,}52 \text{ s}$$

Ce résultat est cohérent avec la lecture graphique.

D'après D-Leoni

Identification à partir d'une réponse indicielle

On dispose maintenant de la réponse d'un système à un échelon. Le but est de trouver un modèle, c'est-à-dire une équation différentielle et une fonction de transfert. Une fois avoir déterminé le modèle il est possible de simuler la réponse du système.

À retenir

Reconnaître le modèle :

- **1er ordre** : tangente à l'origine non nulle, pas de dépassement.
- **2e ordre** : tangente à l'origine horizontale. Si la réponse présente des dépassements, alors $\xi < 1$.

Identification d'un 1er ordre $\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)$, avec une entrée $e(t) = E_0\, u(t)$:

- Gain statique : $K = \dfrac{s_\infty}{E_0}$;
- Constante de temps τ : $t_{r5\%} = 3\,\tau$.

Identification d'un 2e ordre $\dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_0}\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)$, avec une entrée $e(t) = E_0\, u(t)$:

- Gain statique : $K = \dfrac{s_\infty}{E_0}$;
- Coefficient d'amortissement ξ : on mesure le premier dépassement relatif $D_1 = \dfrac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty}$, puis on lit ξ sur l'abaque de dépassement ;
- Pulsation propre ω_0 : on mesure la pseudo-période T_p entre deux maxima successifs, puis $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}}$.

Exercice 4 – Identification d'un 1er ordre, échelon unitaire

Objectif Identifier un système du 1er ordre à partir de sa réponse à un échelon unitaire

On soumet un système à une entrée $e(t) = u(t)$, avec $u(t)$ un échelon unitaire. On relève sa sortie $s(t)$:

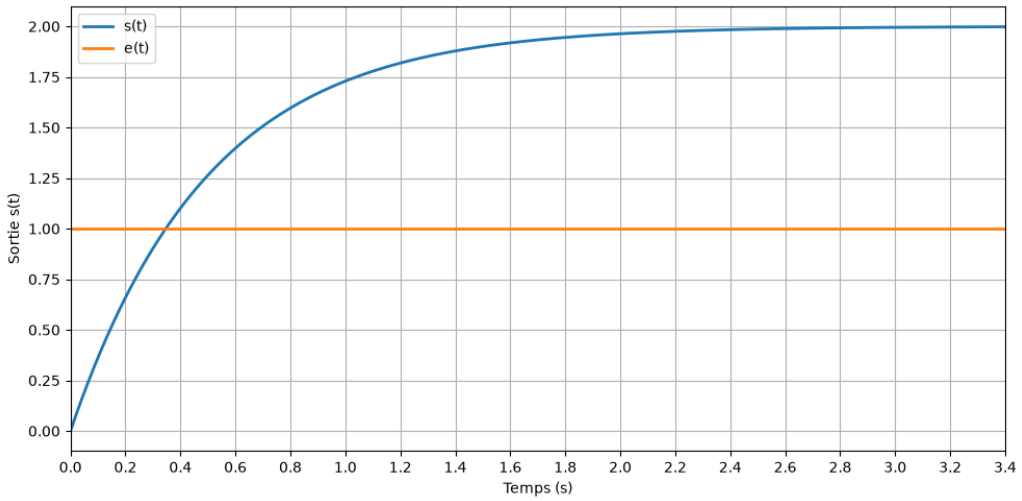


FIGURE 1 – Réponse temporelle du système

Q1. Justifier que ce système peut être modélisé par un système du 1er ordre.

La tangente à l'origine n'est pas horizontale et la réponse ne présente aucun dépassement : le système peut être modélisé par un 1er ordre.

Q2. Déterminer le gain statique K et la constante de temps τ du système.

Gain statique : on lit $s_\infty = 2$, avec $E_0 = 1$.

$$K = \frac{s_\infty}{E_0} = \frac{2}{1} = 2$$

Constante de temps : La sortie entre dans la bande [1,9 ; 2,1] à $t_{r5\%} \approx 1{,}5$ s.
Alors

$$\tau = \frac{t_{r5\%}}{3} = 0.5\text{s}$$

Q3. En déduire l'équation différentielle du système, puis sa fonction de transfert $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

$$0{,}5\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 2\,e(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad H(p) = \frac{2}{1 + 0{,}5\,p}$$

Exercice 5 – Identification d'un 2e ordre, échelon unitaire

Objectif Identifier un système du 2e ordre à partir de sa réponse à un échelon unitaire

On soumet un système à une entrée $e(t) = 1.5\,u(t)$. On relève sa sortie $s(t)$:

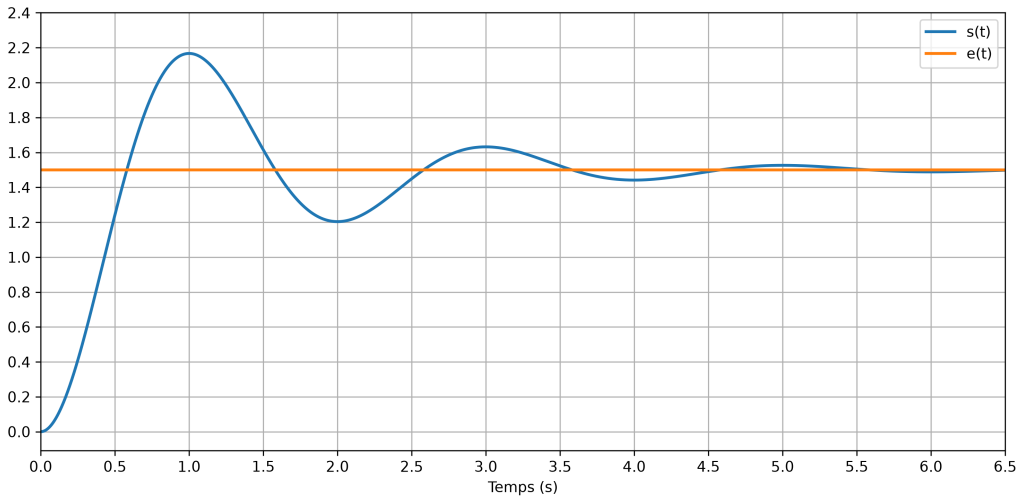


FIGURE 2 – Réponse temporelle du système

Q1. Justifier que ce système peut être modélisé par un système du 2e ordre. Que peut-on dire de son coefficient d'amortissement ?

La tangente à l'origine est horizontale : le système peut être modélisé par un 2e ordre. La réponse présente des dépassements, donc le système est sous-amorti : $\xi < 1$.

Q2. Déterminer le gain statique K.

On lit $s_\infty = 1{,}5$ avec $E_0 = 1.5$, donc $K = 1$.

Q3. Mesurer le premier dépassement relatif D_1, puis en déduire ξ à l'aide de l'abaque de dépassement.

On lit $s_{max} \approx 2{,}17$:

$$D_1 = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty} = \frac{2{,}17 - 1{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}44 = 44\,\%$$

L'abaque donne $\xi \approx 0{,}25$ pour $D_1 = 44\,\%$.

Remarque : on peut aussi calculer ξ par la formule $\xi = \dfrac{|\ln D_1|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 D_1}} = \dfrac{0{,}82}{\sqrt{\pi^2 + 0{,}82^2}} \approx 0{,}25$.

Q4. Mesurer la pseudo-période T_p, puis en déduire la pulsation propre ω_0.

Le premier maximum est atteint à $t_1 \approx 1$ s et le deuxième à $t_3 \approx 3$ s. Donc $T_p = t_3 - t_1 \approx 2$ s.
Pour plus de précision, on mesure si possible sur plusieurs pseudo-périodes.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{2 \times \sqrt{1 - 0{,}25^2}} \approx 3{,}24 \text{ rad/s}$$

Q5. En déduire l'équation différentielle du système, puis sa fonction de transfert.

$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{3{,}24^2} \approx 0{,}095$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{2 \times 0{,}25}{3{,}24} \approx 0{,}154$, donc :

$$0{,}095\,\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 0{,}154\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 1\,e(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad H(p) = \frac{1}{1 + 0{,}154\,p + 0{,}095\,p^2}$$

Exercice 6 – Identification d'un 2e ordre, échelon non unitaire

Objectif Identifier un système du 2e ordre à partir de sa réponse à un échelon non unitaire, et vérifier le modèle obtenu

On soumet un système à une entrée $e(t) = 5\,u(t)$. On relève sa sortie $s(t)$:

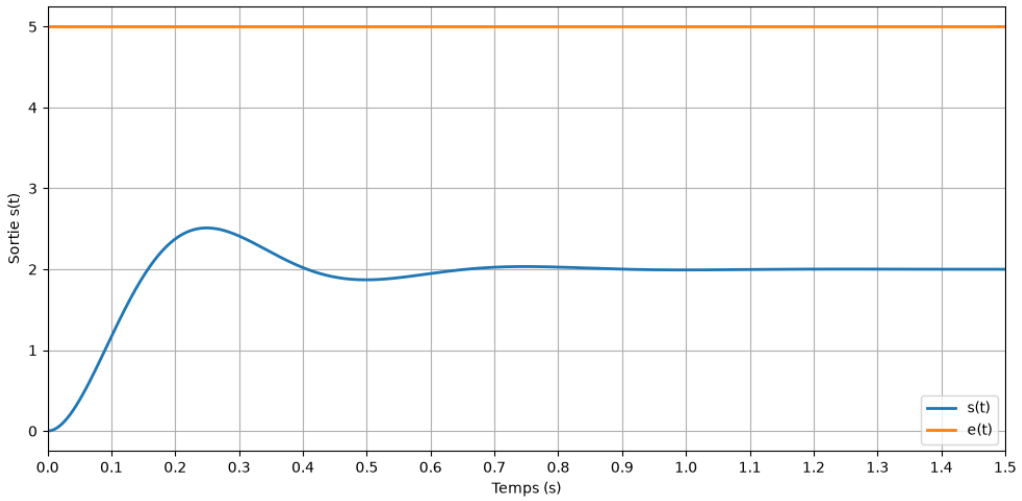


FIGURE 3 – Réponse temporelle du système

Q1. Déterminer le gain statique K.

On lit $s_\infty = 2$, pour un échelon d'amplitude $E_0 = 5$:

$$K = \frac{s_\infty}{E_0} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Q2. Déterminer le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0.

Amortissement : on lit $s_{max} \approx 2{,}5$.

$$D_1 = \frac{2{,}5 - 2}{2} = 0{,}25 = 25\,\%$$

L'abaque donne $\xi \approx 0{,}4$.
Pulsation propre : le premier maximum est atteint à $t_1 \approx 0{,}25$ s et le premier minimum à $t_2 \approx 0{,}5$ s. Donc $\dfrac{T_p}{2} \approx 0{,}25$ s, soit $T_p \approx 0{,}5$ s.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{0{,}5 \times \sqrt{1-0{,}4^2}} \approx 13{,}7 \text{ rad/s}$$

Q3. En déduire l'équation différentielle du système, puis sa fonction de transfert.

$\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{1}{13{,}7^2} \approx 5{,}3 \cdot 10^{-3}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{0{,}8}{13{,}7} \approx 0{,}058$, donc :

$$5{,}3{\cdot}10^{-3}\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 0{,}058\,\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0{,}4\,e(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad H(p) = \frac{0{,}4}{1 + 0{,}058\,p + 5{,}3 \cdot 10^{-3}\,p^2}$$

Q4. Vérifier le modèle obtenu : à l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit, prévoir le temps de réponse à 5 % du modèle, puis comparer avec celui que l'on lit sur la courbe.

Pour $\xi = 0{,}4$, l'abaque donne $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 7{,}5$. Donc $t_{r5\%} \approx \dfrac{7{,}5}{13{,}7} \approx 0{,}55$ s.
Sur la courbe, la bande à 5 % est [1,9 ; 2,1]. La sortie y entre définitivement après le premier minimum ($s \approx 1{,}87 < 1{,}9$), à $t \approx 0{,}55$ s.
Les deux valeurs concordent : le modèle identifié est validé.

Annexe – Abaques du second ordre

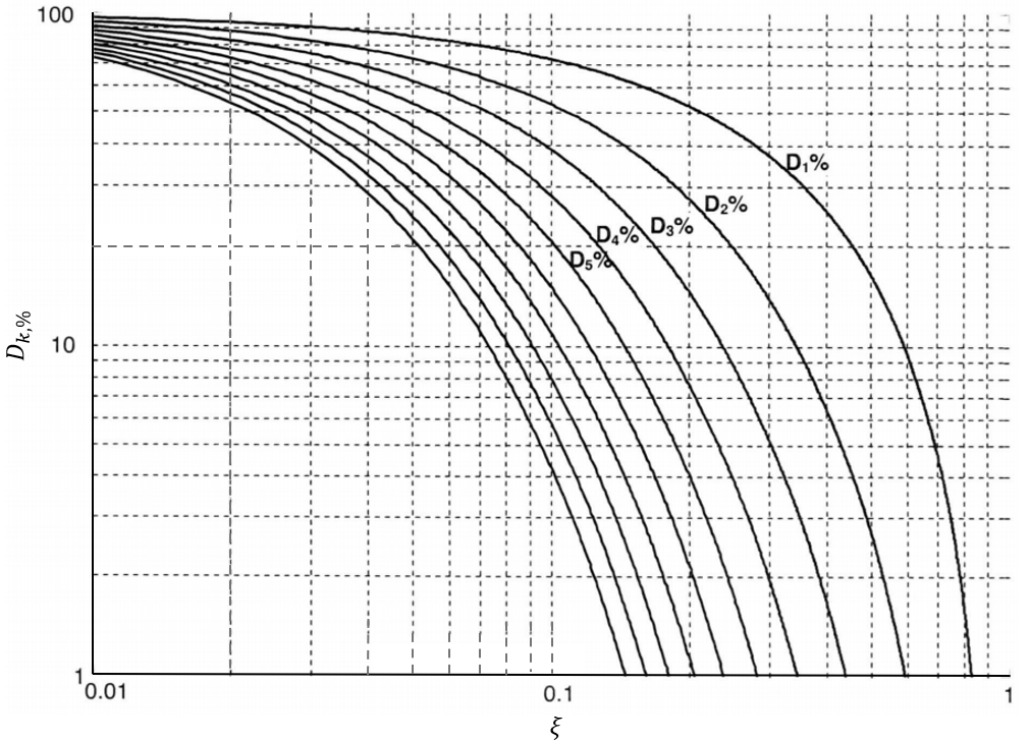


FIGURE 4 – Abaque des dépassements relatifs D_k en fonction de ξ

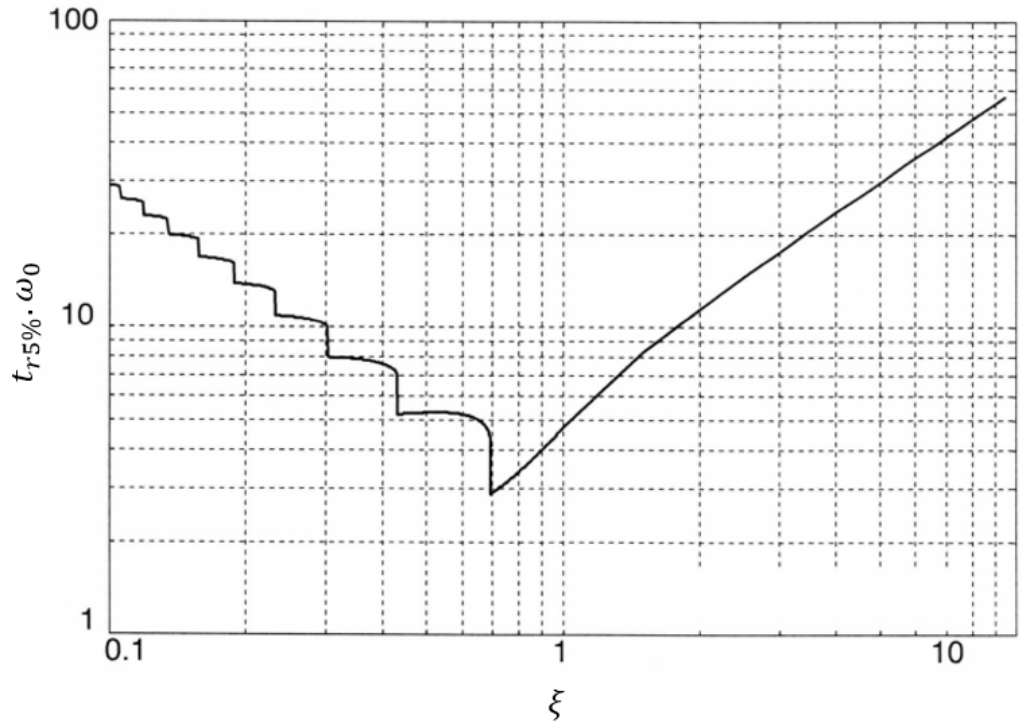


FIGURE 5 – Abaque du temps de réponse réduit $t_{r5\%} \cdot \omega_0$ en fonction de ξ