TD 7

exo 2a

1) Soit $x \in]0,\pi[$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{(2k+1)ix}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix}\right)$

calculons donc la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ix}\right)^k$$

Comme $x \in]0,\pi[$ on a $2x \in]0,2\pi[$ donc $e^{2ix} \neq 1$, ainsi :

$$S = e^{ix} \times \frac{1-(e^{2ix})^n}{1-e^{2ix}} = e^{ix} \times \frac{1-e^{2inx}}{1-e^{2ix}}$$

$$= e^{ix} \times \frac{e^{inx}\left(e^{-inx} - e^{inx}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)} = e^{inx} \times \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}\right)$$

$$= \left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right) \times \frac{2i\sin(nx)}{2i\sin(x)}$$

$$= \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right)$$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \mathrm{Im}(S) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}$

2) Prenons $n=4$ dans la question 1), on obtient que, pour tout $x \in]0,\pi[$,

$$\frac{\sin^2(4x)}{\sin(x)} = \sum_{k=0}^{3} \sin((2k+1)x) = \sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \sin(7x).$$

Dès lors, pour $x \in]0,\pi[$ on a :

$$\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$

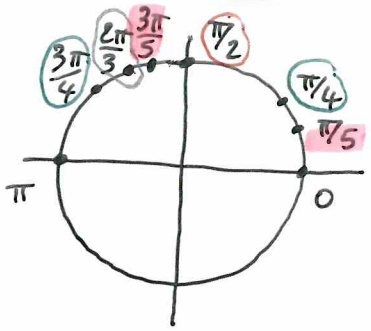
$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2(4x)}{\sin(x)} - \sin(4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x)\left(\frac{\sin(4x)}{\sin(x)} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x) = 0 \text{ ou } \sin(4x) = \sin(x) \quad \text{(correct car } \sin(x) \neq 0 \text{ car } x \in]0,\pi[\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 4x \equiv 0\,[2\pi] \text{ ou } 4x \equiv \pi\,[2\pi] \text{ ou } 4x \equiv x\,[2\pi] \text{ ou } 4x \equiv \pi - x\,[2\pi]$$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$



Comme $x \in]0, \pi[$, en plaçant ces angles sur le cercle ci-contre, on constate que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$