DM1 SLCI

Decour CPGE – 9 rue Francis-de-Croisset – 75018 Paris

Exercice 1 – Modélisation d'un système par équation différentielle

On considère trois systèmes dont le comportement est décrit par les équations différentielles suivantes :

- $2\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 7e(t)$
- $6\frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 12e(t)$
- $a\frac{ds(t)}{dt} + bs(t) = ce(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$

Q1. Pour chacune des équations différentielles proposées :

— préciser l'ordre du système modélisé ;

— mettre l'équation sous sa forme canonique ;

— identifier les coefficients caractéristiques du modèle.

Exercice 2 – Asservissement en position d'un axe de machine-outil

On étudie un axe d'une machine-outil permettant de positionner avec précision une pièce à usiner.

Le calculateur reçoit un signal électrique $u_r(t)$, fourni par un capteur de position, qui renseigne sur la position angulaire $\theta(t)$ du mandrin auquel est liée la pièce à usiner. Ce signal est proportionnel à la position angulaire mesurée.

Le signal mesuré est comparé à un signal de consigne $u_c(t)$, proportionnel à la position angulaire souhaitée $\theta_c(t)$ définie par l'utilisateur. Cette comparaison permet de déterminer le signal d'erreur $\varepsilon(t)$.

Un régulateur électrique traite ce signal d'erreur et délivre un signal de commande au moteur électrique (u_m). Celui-ci entraîne le mandrin en rotation par l'intermédiaire d'un système de transmission de mouvement constitué d'une transmission par poulies-courroie et d'un système roue et vis sans fin.

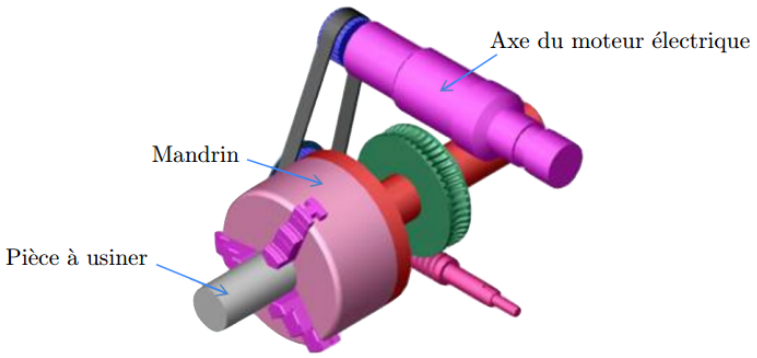


Figure 1 – Système de positionnement d'un axe de machine-outil

Q1. Établir le schéma-blocs fonctionnel du système de commande en précisant les grandeurs physiques mises en jeu et leurs unités.

On s'intéresse maintenant à l'asservissement du moteur électrique. En négligeant l'inductance de l'induit ainsi que les différents frottements, le modèle de connaissance de cet actionneur conduit aux équations électromécaniques suivantes :

$$e(t) = u_m(t) - Ri(t) = K_e\omega(t)$$

$$C_m(t) = K_i i(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

où :

— $u_m(t)$ est la tension d'alimentation du moteur, en V ;
— $i(t)$ est l'intensité du courant dans l'induit, en A ;
— R est la résistance électrique de l'induit, en Ω ;
— $e(t)$ est la force contre-électromotrice, en V ;
— K_e est la constante de force contre-électromotrice ;
— $C_m(t)$ est le couple moteur, en N·m ;
— K_i est la constante de couple moteur ;
— J est le moment d'inertie équivalent du rotor, en kg·m^2 ;
— $\omega(t)$ est la vitesse angulaire du moteur, en rad·s^{-1}.

Q2. À partir des équations précédentes, établir l'équation différentielle reliant la tension d'alimentation $u_m(t)$ à la vitesse angulaire $\omega(t)$. Mettre cette équation sous forme canonique.

Q3. Pour une entrée en échelon définie par $u_m(t) = u_0\,u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité et u_0 son amplitude, déterminer l'expression temporelle de la vitesse angulaire $\omega(t)$ en supposant le moteur initialement à l'arrêt.

Q4. Tracer l'allure de la réponse indicielle $\omega(t)$. Faire apparaître sur le graphe les principaux paramètres caractéristiques du système, notamment le gain statique et la constante de temps.

Exercice 3 – Identification d'un système à partir de sa réponse indicielle

La réponse temporelle d'un système à une entrée en échelon d'amplitude $e_0 = 2$ a été déterminée expérimentalement. Cette réponse est représentée sur la figure ci-dessous.

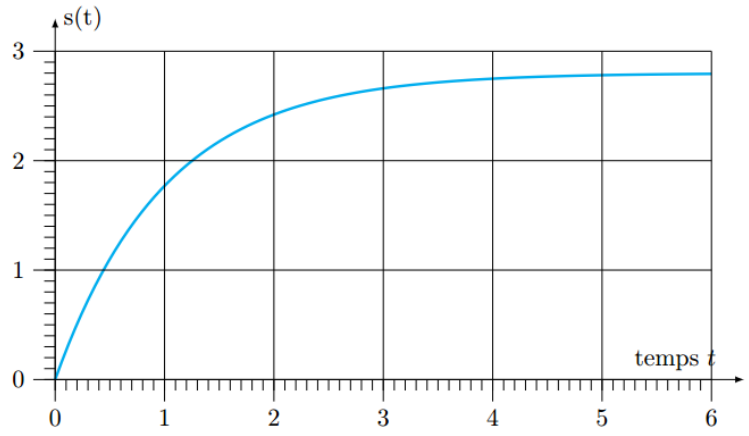
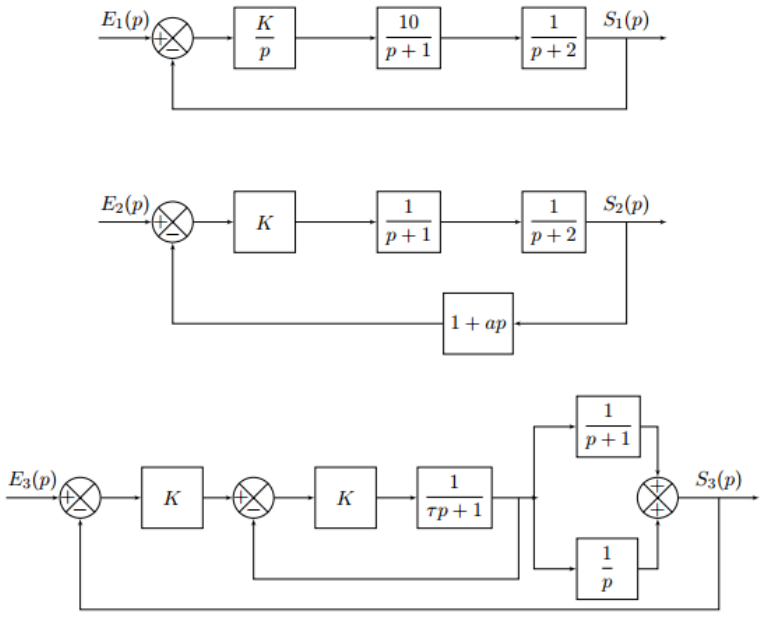


FIGURE 2 – Réponse indicielle expérimentale du système

On souhaite identifier un modèle de comportement du système à partir de cette réponse temporelle.

Q1. À partir de l'allure de la réponse indicielle, déterminer l'ordre du système étudié et les paramètres caractéristiques du système.

Exercice 4 – Mise en équation de schéma bloc



Q1. Déterminer la FTBO et la FTBF des systèmes suivants sous forme canonique