DM1 SLCI

Decour CPGE – 9 rue Francis-de-Croisset – 75018 Paris

Exercice 1 – Modélisation d'un système par équation différentielle

On considère trois systèmes dont le comportement est décrit par les équations différentielles suivantes :

- $2\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 7e(t)$
- $6\frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 12e(t)$
- $a\frac{ds(t)}{dt} + bs(t) = ce(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$

Q1. Pour chacune des équations différentielles proposées :

— préciser l'ordre du système modélisé ;

— mettre l'équation sous sa forme canonique ;

— identifier les coefficients caractéristiques du modèle.

On cherche à mettre chaque équation différentielle sous la forme canonique d'un système du premier ordre :

$$\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

où τ est la constante de temps du système et K son gain statique.

1. Premier système

L'équation différentielle est :

$$2\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 7e(t)$$

Cette équation fait intervenir la dérivée première de $s(t)$. Le système est donc d'ordre 1.
L'équation est déjà sous sa forme canonique :

$$\boxed{\tau = 2 \quad ; \quad K = 7}$$

2. Deuxième système

L'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$2\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 4e(t)$$

Le système est d'ordre 1. Par identification avec la forme canonique, on trouve :

$$\boxed{\tau = 2 \quad ; \quad K = 4}$$

3. Troisième système

L'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{a}{b}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \frac{c}{b}e(t)$$

Le système est d'ordre 1. Par identification avec la forme canonique, on obtient :

$$\boxed{\tau = \frac{a}{b} \quad ; \quad K = \frac{c}{b}}$$

Exercice 2 – Asservissement en position d'un axe de machine-outil

On étudie un axe d'une machine-outil permettant de positionner avec précision une pièce à usiner.

Le calculateur reçoit un signal électrique $u_r(t)$, fourni par un capteur de position, qui renseigne sur la position angulaire $\theta(t)$ du mandrin auquel est liée la pièce à usiner. Ce signal est proportionnel à la position angulaire mesurée.

Le signal mesuré est comparé à un signal de consigne $u_c(t)$, proportionnel à la position angulaire souhaitée $\theta_c(t)$ définie par l'utilisateur. Cette comparaison permet de déterminer le signal d'erreur $\varepsilon(t)$.

Un régulateur électrique traite ce signal d'erreur et délivre un signal de commande au moteur électrique (u_m). Celui-ci entraîne le mandrin en rotation par l'intermédiaire d'un système de transmission de mouvement constitué d'une transmission par poulies-courroie et d'un système roue et vis sans fin.

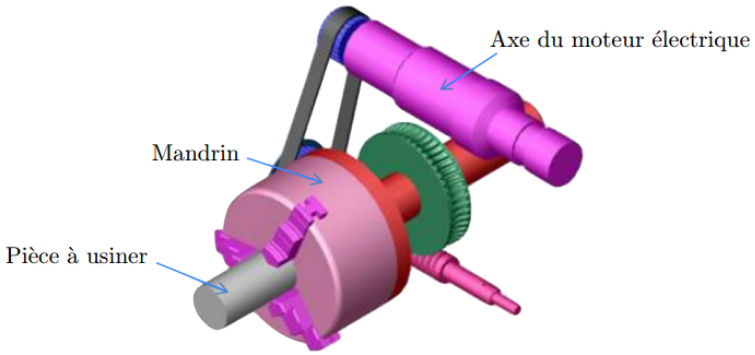
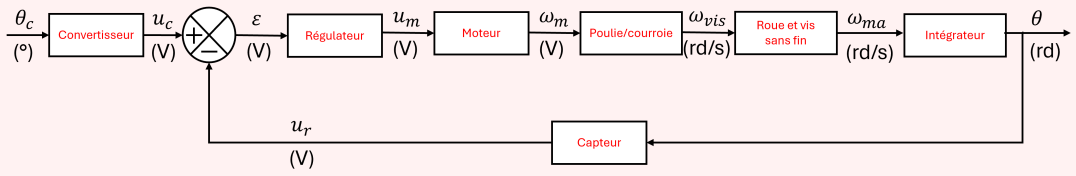


FIGURE 1 – Système de positionnement d'un axe de machine-outil

Q1. Établir le schéma-blocs fonctionnel du système de commande en précisant les grandeurs physiques mises en jeu et leurs unités.



On s'intéresse maintenant à l'asservissement du moteur électrique. En négligeant l'inductance de l'induit ainsi que les différents frottements, le modèle de connaissance de cet actionneur conduit aux équations électromécaniques suivantes :

$$e(t) = u_m(t) - Ri(t) = K_e\omega(t)$$

$$C_m(t) = K_i i(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

où :

— $u_m(t)$ est la tension d'alimentation du moteur, en V ;

— $i(t)$ est l'intensité du courant dans l'induit, en A ;

— R est la résistance électrique de l'induit, en Ω ;
— $e(t)$ est la force contre-électromotrice, en V ;
— K_e est la constante de force contre-électromotrice ;
— $C_m(t)$ est le couple moteur, en N·m ;
— K_i est la constante de couple moteur ;
— J est le moment d'inertie équivalent du rotor, en kg·m^2 ;
— $\omega(t)$ est la vitesse angulaire du moteur, en rad·s^{-1}.

Q2. À partir des équations précédentes, établir l'équation différentielle reliant la tension d'alimentation $u_m(t)$ à la vitesse angulaire $\omega(t)$. Mettre cette équation sous forme canonique.

Les équations électromécaniques du moteur sont :

$$u_m(t) - Ri(t) = K_e\omega(t)$$

$$K_i i(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

À partir de la seconde équation, on exprime le courant :

$$i(t) = \frac{J}{K_i}\frac{d\omega(t)}{dt}$$

En remplaçant cette expression dans la première équation, on obtient :

$$u_m(t) - \frac{RJ}{K_i}\frac{d\omega(t)}{dt} = K_e\omega(t)$$

L'équation différentielle reliant la tension d'alimentation $u_m(t)$ à la vitesse angulaire $\omega(t)$ s'écrit donc :

$$\frac{RJ}{K_i}\frac{d\omega(t)}{dt} + K_e\omega(t) = u_m(t)$$

En divisant cette équation par K_e, on obtient la forme canonique d'un système du premier ordre :

$$\boxed{\frac{RJ}{K_iK_e}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{K_e}u_m(t)}$$

Par identification, la constante de temps τ et le gain statique K sont donnés par :

$$\boxed{\tau = \frac{RJ}{K_iK_e}} \quad \text{et} \quad \boxed{K = \frac{1}{K_e}}$$

Le moteur est donc modélisé par un système du premier ordre.

Q3. Pour une entrée en échelon définie par $u_m(t) = u_0\,u(t)$ où $u(t)$ désigne l'échelon unité et u_0 son amplitude, déterminer l'expression temporelle de la vitesse angulaire $\omega(t)$ en supposant le moteur initialement à l'arrêt.

La tension d'alimentation est un échelon d'amplitude u_0 :

$$u_r(t) = u_0\, u(t)$$

Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle devient :

$$\tau \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K u_0$$

1. **Résolution de l'équation homogène** :

$$\tau . \frac{d\omega_h(t)}{dt} + \omega_h(t) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$\boxed{\omega_h(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

où A est une constante déterminée à partir des conditions initiales.

2. **Recherche d'une solution particulière** Pour $t \geq 0$, l'entrée est constante : $u_m(t) = u_0$. On recherche donc une solution particulière constante :

$$\omega_p(t) = K_p$$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\tau.0 + K_p = K.E_0$$

d'où :

$$\boxed{\omega_p(t) = K.u_0}$$

La solution générale est donc la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$\omega(t) = \omega_h(t) + \omega_p(t)$$

soit :

$$\omega(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + K.u_0$$

Sous les conditions de Heaviside, le système est initialement au repos :

$$s(0) = 0$$

On obtient alors :

$$0 = A + K.u_0$$

d'où :

$$A = -K.u_0$$

Finalement, la réponse temporelle du système à un échelon d'amplitude u_0 est :

$$\boxed{\omega(t) = K.u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Q4. Tracer l'allure de la réponse indicielle $\omega(t)$. Faire apparaître sur le graphe les principaux paramètres caractéristiques du système, notamment le gain statique et la constante de temps.

La vitesse angulaire augmente progressivement à partir de zéro et tend asymptotiquement vers une valeur constante.
La valeur finale est :

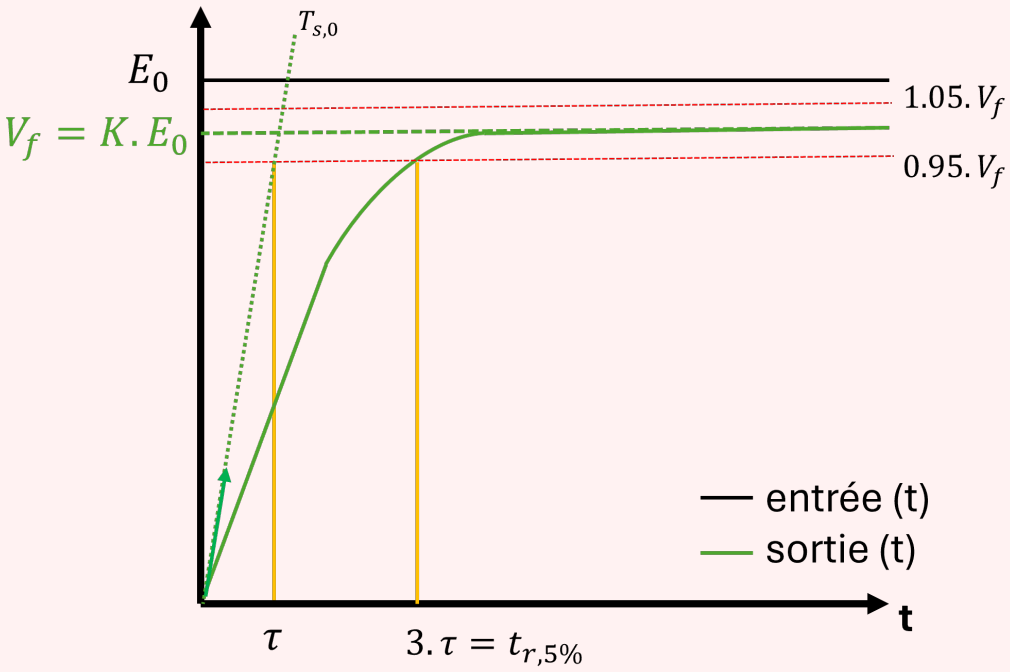
$$\boxed{\omega(\infty) = Ku_0 = \frac{u_0}{K_e}}$$

La constante de temps τ caractérise la rapidité de la réponse. À l'instant $t = \tau$, la vitesse atteint environ 63 % de sa valeur finale :

$$\boxed{\omega(\tau) = 0{,}63\,\omega(\infty)}$$

La réponse indicielle est donc une exponentielle croissante, tangente à l'origine de pente initiale :

$$\boxed{\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{Ku_0}{\tau} = \frac{K_i u_0}{RJ}}$$



Exercice 3 – Identification d'un système à partir de sa réponse indicielle

La réponse temporelle d'un système à une entrée en échelon d'amplitude $e_0 = 2$ a été déterminée expérimentalement. Cette réponse est représentée sur la figure ci-dessous.

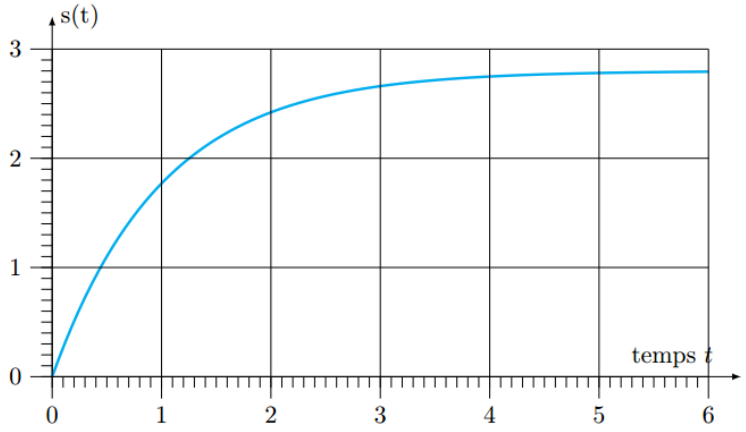
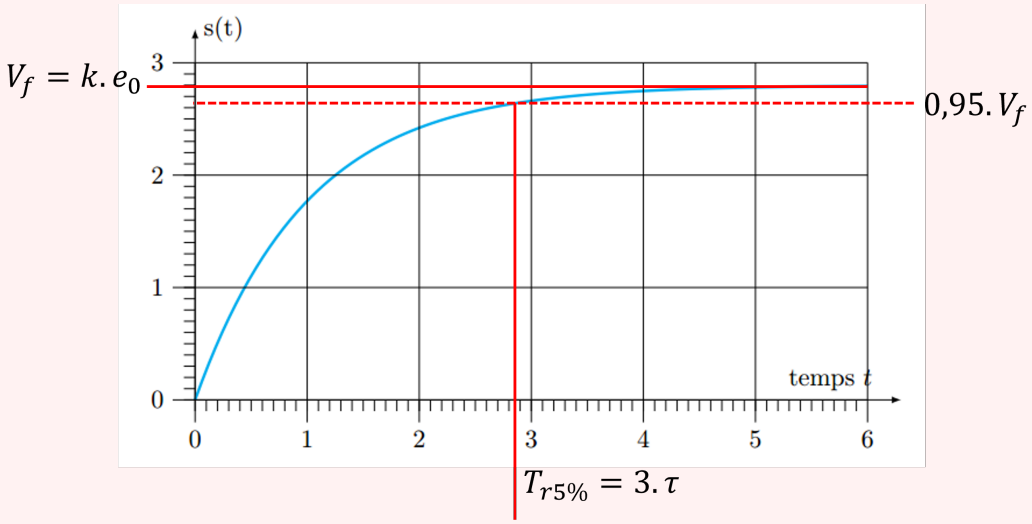


FIGURE 2 – Réponse indicielle expérimentale du système

On souhaite identifier un modèle de comportement du système à partir de cette réponse temporelle.

Q1. À partir de l'allure de la réponse indicielle, déterminer l'ordre du système étudié et les paramètres caractéristiques du système.



Par lecture graphique :

- La réponse indicielle présente une tangente à l'origine non nulle, sans dépassement. On retient donc un modèle du premier ordre.
- La valeur finale de la sortie est $s(\infty) = 2{,}8$. Le gain statique vaut alors :

$$K = \frac{s(\infty)}{e_0} = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4$$

- Le temps de réponse à 5 % est estimé à $t_{r,5\,\%} = 2{,}85\,\text{s}$. Pour un système du premier ordre, on utilise la relation approchée :

$$t_{r,5\,\%} = 3\tau$$

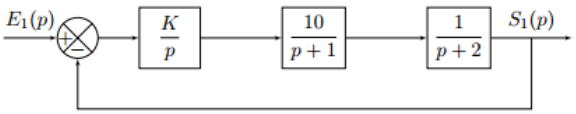
D'où :

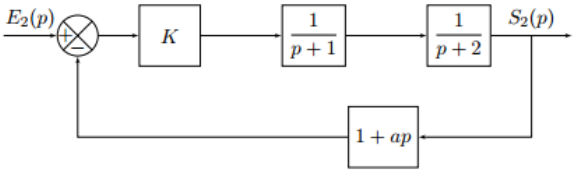
$$\tau \approx \frac{2{,}85}{3} = 0{,}95\,\text{s}$$

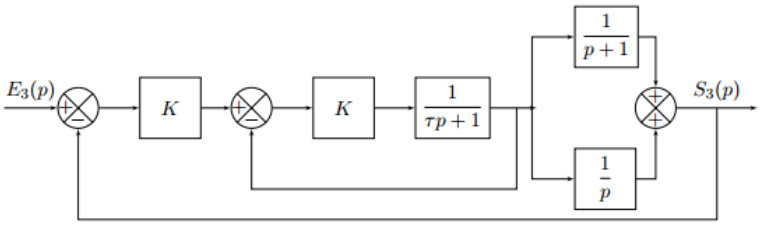
Le système est donc modélisé par l'équation différentielle canonique :

$$\boxed{0{,}95\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 1{,}4e(t)}$$

Exercice 4 – Mise en équation de schéma bloc







Q1. Déterminer la FTBO et la FTBF des systèmes suivants sous forme canonique

1. Premier système

La chaîne directe est constituée de trois blocs en série. Sa fonction de transfert est :

$$\text{FTBO}_1(p) = \frac{K}{p} \times \frac{10}{p+1} \times \frac{1}{p+2}$$

D'où :

$$\text{FTBO}_1(p) = \frac{10K}{p(p+1)(p+2)}$$

Mise sous forme canonique :

$$\text{FTBO}_1(p) = \frac{10K}{p(p^2+3p+2)}$$

$$\boxed{\text{FTBO}_1(p) = \frac{5K}{p(\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p+1)}}$$

Le système possède un retour unitaire. D'après la formule de Black :

$$\text{FTBF}_1(p) = \frac{\text{FTBO}_1(p)}{1+\text{FTBO}_1(p)}$$

On obtient :

$$\text{FTBF}_1(p) = \frac{\frac{10K}{p(p+1)(p+2)}}{1+\frac{10K}{p(p+1)(p+2)}}$$

Après simplification :

$$\text{FTBF}_1(p) = \frac{10K}{p(p+1)(p+2)+10K}$$

Alors :

$$\text{FTBF}_1(p) = \frac{10K}{p^3+3p^2+2p+10K}$$

Mise sous forme canonique :

$$\boxed{\text{FTBF}_1(p) = \frac{1}{\frac{1}{10K}p^3+\frac{3}{10K}p^2+\frac{2}{10K}p+1}}$$

2. Deuxième système

La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$\text{FTBO}_2(p) = K \times \frac{1}{p+1} \times \frac{1}{p+2} \times (1+ap)$$

soit :

$$\text{FTBO}_2(p) = \frac{K(1+ap)}{(p+1)(p+2)}$$

Mise sous forme canonique

$$\boxed{\text{FTBO}_2(p) = \frac{K}{2} \times \frac{ap+1}{\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p+1}}$$

D'après la formule de Black :

$$\text{FTBF}_2(p) = \frac{\dfrac{K}{(p+1)(p+2)}}{1 + \dfrac{K(1+ap)}{(p+1)(p+2)}}$$

Après simplification :

$$\text{FTBF}_2(p) = \frac{K}{(p+1)(p+2) + K(1+ap)}$$

En développant le dénominateur on obtient :

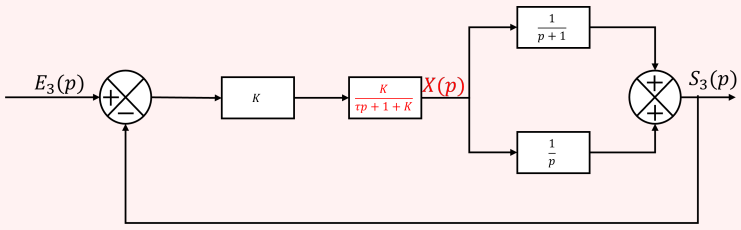
$$\text{FTBF}_2(p) = \frac{K}{p^2 + (3+aK)p + 2 + K}$$

Mise sous forme canonique :

$$\boxed{\text{FTBF}_2(p) = \frac{K}{2+K} \frac{1}{\frac{1}{2+K}p^2 + \frac{3+aK}{2+K}p + 1}}$$

3. Troisième système

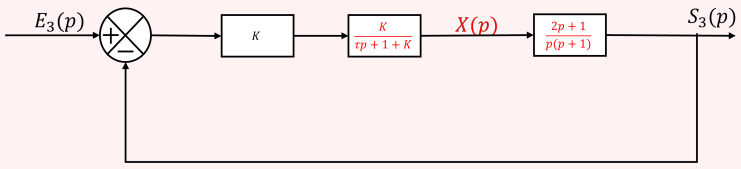
Simplification du schéma bloc, d'après la formule de black du second sommateur :



Simplification du dernier sommateur, pas lecture du schéma :

$$S_3(p) = X(p) \times \frac{1}{1+p} + X(p) \times \frac{1}{p} = X(p) \times \frac{2p+1}{p(1+p)}$$

alors :



Alors la FTBO :

$$\text{FTBO}_3(p) = \frac{K^2(2p+1)}{(\tau p+1+K)(p(p+1))} = \frac{K^2(2p+1)}{p(\tau p^2 + (\tau+1+K)p + 1 + K)}$$

Mise sous forme canonique :

$$\boxed{\text{FTBO}_3(p) = \frac{K^2}{1+K} \frac{(2p+1)}{p(\frac{\tau}{K+1}p^2 + \frac{\tau+1+K}{K+1}p + 1)}}$$

D'après la formule de black :

$$\mathrm{FTBF}_3(p) = \frac{\mathrm{FTBO}_3}{1+\mathrm{FTBO}_3} = \frac{\frac{K^2(2p+1)}{(\tau p+1+K)(p(p+1))}}{1+\frac{K^2(2p+1)}{(\tau p+1+K)(p(p+1))}}$$

$$\mathrm{FTBF}_3(p) = \frac{K^2(2p+1)}{(\tau p+1+K)(p^2+p)+K^2(2p+1)}$$

En développant :

$$\mathrm{FTBF}_3(p) = \frac{K^2(2p+1)}{\tau p^3+(\tau+1+K)p^2+(1+K+2K^2)p+K^2}$$

Sous forme canonique :

$$\mathrm{FTBF}_3(p) = \frac{2p+1}{\frac{\tau}{K^2}p^3+\frac{\tau+1+K}{K^2}p^2+\frac{1+K+2K^2}{K^2}p+1}$$