Exercice 1
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 1$ est un multiple de 7. On proposera deux méthodes : par récurrence, et en utilisant le binôme de Newton.

Exercice 2
On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est $n = a_p \dots a_1 a_0$. Ainsi :

$$n = a_p 10^p + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k.$$

1. Montrer que : n est un multiple de 3 $\iff \sum_{k=0}^{p} a_k$ est un multiple de 3.
2. Montrer que : n est un multiple de 9 $\iff \sum_{k=0}^{p} a_k$ est un multiple de 9.
3. Montrer que : n est un multiple de 11 $\iff \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est un multiple de 11.

Exercice 3
En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le $PGCD$ des nombres suivants :

1. 9110 et 1848.
2. 382 et 251.

Reprendre ensuite ces deux questions en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $PGCD(n^3 + 2n\,,\, n^4 + 3n^2 + 1)$.

Exercice 5
Déterminer les entiers $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $PPCM(28, b) = 140$.

Exercice 6
Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + y = 56$ et $PPCM(x, y) = 105$.

Exercice 7

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$, alors $PGCD(a, b) = 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $a > b$ et $PGCD(a, b) = 1$, alors $PGCD(a - b, b) = 1$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, (a, b) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$PGCD(a, b) = 1 \implies \exists\, u, v \in \mathbb{Z}\,,\ au + bv = 1.$$

On pourra procéder par récurrence forte sur n.

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $PGCD(a, b) = 1$ et a divise bc, alors a divise c.

Exercice 8

1. Soit $q \in \mathbb{N}$ un entier impair. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{N}$:
$$x^q + 1 = (x + 1)\,(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{q-3} - x^{q-2} + x^{q-1}).$$
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = 2^m + 1$. Montrer qu'on est forcément dans un des deux cas suivants :
   - ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2^n$,
   - ou bien il existe $q \in \mathbb{N}$ un entier impair et $x \in \mathbb{N}$ tels que $A = x^q + 1$.
3. En déduire que si $m \in \mathbb{N}^*$ est tel que $2^m + 1$ soit premier alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2^n$.

Exercice 9
Soit p un nombre premier.

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que, si p divise ab alors p divise a ou p divise b.
   On pourra utiliser le résultat de la fin de l'exercice 7.
2. Soit $k \in [\![1, p - 1]\!]$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
3. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}\,,\ p$ divise $(a + b)^p - a^p - b^p$.