Programme de colles : semaine 7, du 16/11 au 20/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Nombres complexes

- forme algébrique, parties réelle et imaginaire
- résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations polynomiales de degré 2 à coefficients réels. *Les élèves ne doivent pas utiliser le discriminant pour résoudre $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.*
- conjugaison, règles de calcul
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$, $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- calcul de la forme algébrique d'un quotient
- notion d'affixe d'un point du plan, interprétation géométrique de la somme, de l'opposé, du conjugué
- module : définition, règles de calcul, le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$
- interprétation géométrique du module : si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $AB = |z_A - z_B|$. Exemple de résolutions d'équation du type $|z - i| = |z - 1|$.
- inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$. Cas d'égalité. *Le corollaire permettant de minorer $|z - z'|$ n'a pas été abordé en classe.*
- forme trigonométrique, argument, notation exponentielle, règles de calculs, interprétation géométrique. *Vocabulaire : on ne fait pas de distinction entre formes trigonométrique, polaire et exponentielle.*
- pour $r, r' \in \mathbb{R}^+$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \ : \ \theta = \varphi + 2k\pi$
- retour sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$)
- formules d'Euler. Application à la linéarisation de produits de cosinus et sinus
- technique "de l'angle moitié" pour déterminer la forme trigonométrique de $e^{i\theta} \pm e^{i\varphi}$
- formule de Moivre, "délinéarisation" de $\cos(k\,\theta)$, $\sin(k\,\theta)$
- calculs de sommes trigonométriques
- exponentielle complexe : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on définit $e^z = e^x e^{iy}$. Résolution de $e^z = w$ où $w \in \mathbb{C}$ est donné.
- résolution de $z^2 = w$ pour $w \in \mathbb{C}$ en passant par la forme polaire ou par la forme algébrique de z. Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$.
- racines n-èmes de l'unité. On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Représentation géométrique.
- interprétation géométrique de $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$, alignement, orthogonalité

2 Arithmétique

Nous n'avons pas encore fait d'exercices en classe, on pourra proposer des exercices simples pour s'assurer que les définitions sont connues. L'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD n'a pas encore été abordé en classe.

- diviseurs, multiples, notation $a|b$. On note $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a et $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a. On a $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}$.
- propriétés de la divisibilité : reflexivité, antisymétrie, transitivité, stabilité par combinaison linéaire, si $a|bc$ alors $a|b$ et $a|c$ mais la réciproque est fausse
- division euclidienne, caractérisation de la divisibilité par le reste
- PGCD et PPCM. Pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$, $PGCD(a, 0) = a$.
- nombres premiers entre eux
- nombres premiers : on dit que $p \in \mathbb{N}$ est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et p.
- tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier, infinité de l'ensemble des nombres premiers
- décomposition en facteurs premiers
- si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ alors les diviseurs de n sont les $d = \pm \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \in [\![0, \alpha_i]\!]$
- si $a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$ alors $PGCD(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ et $PPCM(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab$

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition du conjugué de $z \in \mathbb{C}$. Démontrer ensuite que : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et en déduire que : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$) choisie par l'examinateur.
3. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$ *(sans corollaire ni cas d'égalité).*
4. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
5. Linéariser $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ ou tout autre expression du type $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ avec $p, q \in [\![0, 4]\!]$ choisie par l'examinateur.
6. Pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$ déterminer les valeurs de $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
7. Donner la définition des racines n-èmes de l'unité puis énoncer et démontrer leur forme exponentielle, on précisera combien de racines n-èmes de l'unité existent.
8. Donner la définition de la relation de divisibilité entre deux entiers, puis énoncer et démontrer les résultats appelés "transitivité" et "stabilité par combinaison linéaire" de la divisibilité.
9. Énoncer le théorème de la division euclidienne.
10. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.