TD 7

Exo 23 :

1) ABC est équilatéral direct $\Leftrightarrow$ ABC est isocèle en A et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $AB = AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $|b-a| = |c-a|$ et $\text{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$ et $\text{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$

2) Poursuivons les équivalences :

ABC est équilatéral direct $\Leftrightarrow$ $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$ $\Leftrightarrow$ $c-a = e^{i\pi/3}(b-a)$

$\Leftrightarrow$ $(e^{i\pi/3} - 1)a - e^{i\pi/3} b + c = 0$ (*)

Or $e^{i\pi/3} - 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} = j$

De plus $j^2 = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{i\pi/3}$

Et naturellement, $j^3 = e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi} = 1$.

Ainsi (*) $\Leftrightarrow$ $ja + j^2 b + j^3 c = 0$

$\Leftrightarrow$ $a + jb + j^2 c = 0$

3) Comme l'indique l'énoncé, ABC est équilatéral si et seulement si ABC ou ACB est équilatéral direct. Faisant jouer à c le rôle de b et inversement, on a donc : ABC équilatéral $\Leftrightarrow$ $a + jb + j^2 c = 0$ ou $a + jc + j^2 b = 0$

$\Leftrightarrow$ $(a + jb + j^2 c)(a + jc + j^2 b) = 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2 + j(ac + ba) + j^2(ca + bc + ab) + j^3(b^2 + c^2) + j^4 bc = 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + bc + ac) = 0$ (*)

où la dernière équivalence vient du fait que $j^3 = 1$ et $j^4 = j$.

Or $j + j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$, donc finalement :

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow$ (*) $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac) = 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.