Feuille de cours 9 : calculs de primitives et d'intégrales

1 Primitives usuelles

Dans le tableau suivant, on donne des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et leurs primitives $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle I en notant $c \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration.

$f(x)$	I	$F(x)$
a $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$ax + c$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
x^n $(n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x) + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x) + c$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_*^+$	
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x) + c$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin(x) + c$
	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + c$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

Proposition 1 (linéarité de l'intégration)
Soient I un intervalle, soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + \lambda G$ est une primitive de $f + \lambda g$ sur I.

Démonstration :

Exemples :

- une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{x}$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto 3\cos(x)$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{2}$ est $F : x \longmapsto$

Proposition 2 (primitive de $f(ax+b)$)
Soit f une fonction continue et soit $g : x \longmapsto f(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ des constantes.
Si F est une primitive de f alors la fonction $G : x \longmapsto \dfrac{F(ax+b)}{a}$ est une primitive de g.

Démonstration :

Exemples :

- une primitive de $f : x \longmapsto e^{2x}$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto \cos(2x+1)$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto (3x-1)^4$ est $F : x \longmapsto$

Exercice 1
Déterminer les primitives des fonctions suivantes ou calculer les intégrales demandées :

1. $f_1 : x \longmapsto 2\sqrt{x} + 1$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$
3. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{3x} + \ln(2x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^7} + 7\,dx$
5. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{1}{5x+2}$ sur $]-\dfrac{2}{5}, +\infty[$
6. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{5x+2}\,dx$
7. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sur $]-1, +\infty[$
8. $f_5 : x \longmapsto \dfrac{1}{4x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{t}{2})\,dt$

Erreur à ne pas faire : Que pensez-vous du raisonnement suivant pour trouver une primitive de $f : x \longmapsto \cos(x^2)$?

« Une primitive de cos *est* sin*, et comme la dérivée de* $x \longmapsto x^2$ *est* $x \longmapsto 2x$*,*
alors une primitive de $f : x \longmapsto \cos(x^2)$ *est* $F : x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{2x}$ *»*

Moralité : En fait, on ne peut intégrer $f(u(x))$ en $\dfrac{F(u(x))}{u'(x)}$ que si

C'est donc que de manière générale, il faut reconnaître une expression du type $u'(x)f(u(x))$ pour pouvoir l'intégrer en $F(u(x))$ (et non du type $f(u(x))$).

2 Primitives par composée

Rappel : Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : u(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables alors la fonction $F \circ u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $(F \circ u)' = u' \times (F' \circ u)$.

Ainsi, si on reconnaît un "motif" en $u'(x)F'(u(x))$ on peut intégrer en $F(u(x)) + c$!

"motif" en $u'(x)F'(u(x))$	Primitive en $F(u(x)) + c$	valable sur tout intervalle où
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{Z} \text{ avec } n \leq -2)$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement négative
$u'(x)\ u(x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$		u dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$		u dérivable et ne s'annule pas
$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	u dérivable
$u'(x)\ \sin(u(x))$		u dérivable
	$\sin(u(x)) + c$	u dérivable
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2+1}$	$\arctan(u(x)) + c$	u dérivable

Exemples : Compléter selon le schéma proposé pour f_1 :

1. Les primitives de $f_1 : x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les

$$F_1 : x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en
$u(x) = -x^2$	$f_1(x) = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$	$F_1(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + c$

Vérification : $F_1'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} = f_1(x)$

2. Les primitives de $f_2 : x \longmapsto \cos(x)\sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

3. Les primitives de $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+1}$ sur $\mathbb{R}$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

4. Les primitives de $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

5. Les primitives de $f_5 : x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

Exercice 2
Donner les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles demandés ou calculer les intégrales demandées :

1. (a) $f_1 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)^5$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$
   (c) $f_3 : x \longmapsto e^{\cos(x)}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$
   (e) $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0,\pi[$
   (f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^4}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$
2. (a) $g_1 : x \longmapsto x\sin(2x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $g_2 : x \longmapsto xe^{2x^2}$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
   (d) $g_4 : x \longmapsto \tan(x)$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$
   (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$