Exercice 1

1. On fait une étude de fonction pour chaque inégalité.
   - Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\forall x>1,\ f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\ln(x+1)+\ln(x).$$

   La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x>1$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{-(x+1)-x^2+x(x+1)}{x^2(x+1)}>0=\frac{-1}{x^2(x+1)}<0.$$

   Ainsi, f est décroissante sur $]1,+\infty[$.
   Or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

   Par conséquent, pour tout $x>1$, $f(x)\geq 0$ c'est-à-dire : $\boxed{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{x}.}$
   - Similairement avec g définie par :

$$\forall x>1,\ g(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{1}{x}=\ln(x)-\ln(x-1)-\frac{1}{x}.$$

   On a

$$\forall x>1,\ g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2(x-1)}<0.$$

   Ainsi, g est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.
   Or,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

   Par conséquent, pour tout $x>1$, $g(x)\geq 0$ c'est-à-dire : $\boxed{\dfrac{1}{x}\leq\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right).}$
2. Pour tout entier $k\geq 2$, la première question donne

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\leq\frac{1}{k}\leq\ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

   En sommant ces inégalités pour k allant de n à $3n$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{3n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\leq S_n\leq\sum_{k=n}^{3n}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

   Or par téléscopage on a :

$$\sum_{k=n}^{3n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=n}^{3n}\ln(k+1)-\ln(k)=\ln(3n+1)-\ln(n)=\ln\left(\frac{3n+1}{n}\right).$$

et de même

$$\sum_{k=n}^{3n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=n}^{3n} \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(3n) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{3n}{n-1}\right).$$

(on pouvait aussi écrire des téléscopages sur des produits en utilisant les propriétés du logarithme). Finalement on obtient :

$$\boxed{\ln\left(\frac{3n+1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{3n}{n-1}\right).}$$

3. D'après la question précédente,

$$\ln\left(3+\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{3}{1-\frac{1}{n}}\right).$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(3+\frac{1}{n}\right) = \ln(3)$$

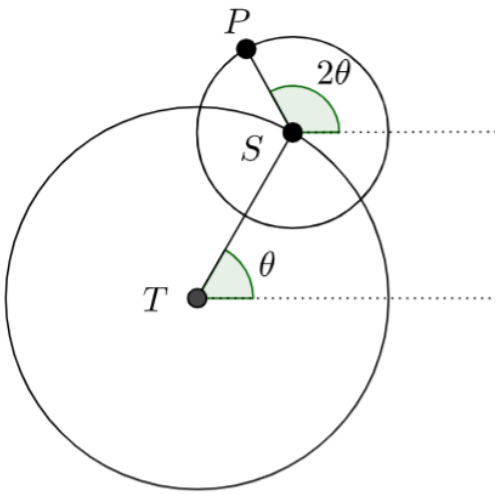
et

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{3}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln(3).$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(3).}$$

Exercice 2

1. 

Si on place l'origine du repère à l'emplacement de la Terre (T) et si θ désigne l'angle repérant le Soleil (S) depuis l'horizontale, alors - puisque la distance Terre-Soleil est ramenée à 1 - les coordonnées du Soleil sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
Comme la planète P orbite autour du Soleil sur un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ à une vitesse deux fois plus grand que le Soleil n'orbite autour de la Terre, le vecteur $\overrightarrow{SP}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}\cos(2\theta), \frac{1}{2}\sin(2\theta))$. Finalement, par rapport à l'origine T, P a pour coordonnées :

$$(\cos(\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta), \sin(\theta) + \frac{1}{2}\sin(2\theta))$$

La cardioïde est alors paramétrée par cette équation lorsque le Soleil parcourt toute l'orbite, c'est-à-dire lorsque θ parcourt $[0, 2\pi[$.

2. - Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $\tan(\frac{\theta}{2})$ est bien défini si et seulement si $\frac{\theta}{2} \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Or pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \theta = \pi + 2k\pi$. Comme on considère seulement $\theta \in [0, 2\pi[$, seule la valeur $\theta = \pi$ (correspondant à $k = 0$) est à exclure, et finalement $\Theta = [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.
   - Pour $\theta \in [0, \pi[$ on a $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ parcourt $[0, +\infty[$. Et pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$ on a $\frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ donc $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ parcourt $]-\infty, 0[$. Ainsi lorsque θ parcourt Θ, t parcourt $\mathbb{R}$.
   - Le point de la cardioïde correspondant à $\theta = \pi$ sera exclu. C'est le point P^0 de coordonnées $(\cos(\pi)+\frac{1}{2}\cos(2\pi), \sin(\pi)+\frac{1}{2}\sin(2\pi)) = (-\frac{1}{2}, 0)$ (celui qui est au "creux" de la cardioïde).

3. Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\frac{1}{1+\tan^2(\varphi)} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos^2\varphi$$

4. Ainsi pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}\cos(\theta) = \cos(2\frac{\theta}{2}) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1 &= \frac{2}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} - 1 \\ = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-1-t^2}{1+t^2} &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\theta) = \sin(2\frac{\theta}{2}) = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) &= 2\tan(\frac{\theta}{2})\cos^2(\frac{\theta}{2}) \\ = 2\tan(\frac{\theta}{2})\frac{1}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

5. Dès lors pour $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) = \cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{2} = \frac{(1-t^2)(1+t^2)+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{2} \\ y(\theta) &= \sin(\theta) + \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \times \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t(1+t^2+1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Enfin, comme θ parcourt Θ, t parcourt $\mathbb{R}$ et obtient la paramétrisation souhaitée de la cardioïde privée de P^0.

Pour $\theta \in [0, \pi[$, i.e. $t \in [0, +\infty[$, on décrit la partie supérieure de la cardioïde ; et pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$, i.e. $t \in]-\infty, 0[$, la partie inférieure. Le point P^0 correspondant à $\theta = \pi$, correspond donc en un certain sens à "$t = \pm\infty$". En fait, on obtient P^0 comme limite de $(x(t), y(t))$ quand t tend vers $\pm\infty$:

$$\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2t}{(1+t^2)^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Voici les photos prises par Ilakya, Armance et Valentine :





7. Notons $\alpha = \widehat{AMO}$. D'après les règles de la réflexion en optique, on a aussi $\widehat{OMN} = \alpha$. De plus, comme M, N et A sont sur le cercle de centre 0, les triangles OMA et OMN sont isocèles en O et donc $\widehat{OAM} = \widehat{ONM} = \alpha$. Dès lors en utilisant que la somme des angles d'un triangle vaut π on obtient dans les triangles OMA et OMN :

$$\pi = \widehat{AOM} + \widehat{AMO} + \widehat{OAM} = \theta + 2\alpha \quad \text{et} \quad \pi = \widehat{MON} + \widehat{ONM} + \widehat{OMN} = \widehat{MON} + 2\alpha$$

Ainsi $\widehat{MON} = \theta$ et donc $\widehat{AON} = \widehat{AOM} + \widehat{MON} = 2\theta$.

8. On obtient les figures ci-dessous. Les rayons lumineux sont tangents à une cardioïde qui apparaît donc “en creux”.

