Exercice 1 (intégration directe)
Calculer les intégrales suivantes :

1. (a) $\displaystyle\int_1^2 x^2 - 1\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+3}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(t)\,dt$
   (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

2. (a) $\displaystyle\int_0^2 (x+1)^7\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^7\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} + e^{1-x}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,dx$

3. (a) $\displaystyle\int_0^1 x^5\cos(x^6)\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^2 xe^{1-x^2}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^5}{x}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^4}\,dt$

Exercice 2 (intégration par parties)

1. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties :

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} t\cos(2t)\ dt$ | (b) $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{-t}\ dt$ | (c) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{t}\ln(t)\ dt$

2. Calculer pour tout $x > 0$ les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^x e^t\sin(t)\ dt$ | (b) $\displaystyle\int_1^x \sin(\ln(t))\,dt$ | (c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\ln(e^{2t}+1)\,dt$

3. Déterminer les primitives de :

   (a) arctan sur $\mathbb{R}$ | (b) $x \longmapsto x^2\ln x$ sur $\mathbb{R}_*^+$ | (c) $x \longmapsto \ln(x)^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$

Exercice 3 (changement de variables)
Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. (a) $\displaystyle\int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi)} e^t\cos(e^t)\ dt$ via $u = e^t$
   (b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{t}-1)^4}{\sqrt{t}}\,dt$ via $u = \sqrt{t}$
   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin(t)}\,dt$ via $u = \sin(t)$

2. (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{x^2}\,dx$ via $t = \frac{1}{x}$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+e^{-t}}\,dt$ avec $u = e^t$
   (c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\ dx$ via $u = \sqrt{1+x}$

3. (a) $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln(\ln(t))}{t}\ dt$ via $u = \ln(t)$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\ dt$ via un changement de variables à déterminer
   (c) $\displaystyle\int_1^x e^{\sqrt{t}}\ dt$ via $u = \sqrt{t}$

Exercice 4 (décomposition en éléments simples)

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.
2. Déterminer les primitives de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x-6}$ sur son ensemble de définition.
3. (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}.$$
(b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$.
4. Déterminer, en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$, les primitives de $f_a : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a}$

Exercice 5
Soient $S = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt$ et $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,dt$.

1. Effectuer les changements de variables $u = \cos(t)$ sur S, et $u = \sin(t)$ sur C.
2. Calculer $C + S$.
3. En déduire les valeurs de C et de S.

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,dt$.

1. Déterminer le sens de variation des suites $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et $(J_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de (J_n).

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n\,dx$.

1. Étudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la valeur de ℓ.

Exercice 8
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis W_n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t) \Big)^n \, dt$$

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Montre que la suite (W_n) est décroissante.
   En déduire qu'elle converge.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+2} \;=\; (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n .
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)\,!}{\Big(2^n\, n\,!\Big)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)\, W_{n+1}\, W_n$.
   Montrer que (u_n) est constante et préciser sa valeur.
6. En déduire l'expression de W_{2n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9
On considère la fonction ϕ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\phi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$.

1. Déterminer le sens de variation de ϕ sur $]0, +\infty[$.
2. Étudier le signe de $g(x) = \phi(x) - \ln x$ pour tout réel $x > 0$.
   On pourra écrire $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.
3. En déduire la limite de ϕ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $T-$périodique.
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.
On commencera par faire un dessin pour représenter la situation.