

EXERCICE : Préhenseur

Le système à étudier représente un système de préhension qui permet de saisir un objet et de le déplacer (voir **figure 2 page 3/4**). Le système est constitué :

- D'un bâti fixe (0), repère lié $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$.
- D'une colonne (1), repère lié $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$, en liaison pivot d'axe (O, \bar{z}_0) avec le bâti (0).
On note : $\alpha = (\bar{x}_0, \bar{x}_1) = (\bar{y}_0, \bar{y}_1)$
- D'un bras (2), repère lié $R_2(A, \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$, en liaison pivot parfaite d'axe (A, \bar{x}_1) avec la colonne (1). On note $\theta = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (\bar{z}_0, \bar{z}_2)$ et $\overline{OA} = a\bar{y}_1 + h\bar{z}_0$ (a et h constantes).
(2) est aussi en liaison pivot parfaite d'axe (B, \bar{x}_1) avec le bras (3).
- D'un bras (3), repère lié $R_3(B, \bar{x}_1, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$, de centre d'inertie G_3 tel que $\overline{BG}_3 = -b\bar{z}_3$ (b constante).
- D'une barre (4) repère lié $R_4(D, \bar{x}_1, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$.
La barre (4) est liée à la colonne (1) par une liaison pivot d'axe (D, \bar{x}_1) et au bras (3) par une liaison pivot d'axe (C, \bar{x}_1) .
- D'un vérin qui assure la rotation de (2) par rapport à (1), ce vérin est constitué de la tige (5) et du corps (6) avec $L(5/6) =$ liaison pivot glissant d'axe (E, \bar{y}_6) .
On a aussi $L(6/1) =$ liaison pivot (E, \bar{x}_1) et $L(5/2) =$ pivot d'axe (F, \bar{x}_1) .
On note $R_6(E, \bar{x}_1, \bar{y}_6, \bar{z}_6)$ le repère lié au corps (6), $\beta = (\bar{y}_1, \bar{y}_6) = (\bar{z}_0, \bar{z}_6)$,
 $\overline{AF} = \frac{l_2}{2}\bar{y}_2$, $\overline{AE} = -e\bar{z}_0$ (e et l_2 constantes).

A noter qu'on a $AB = DC = l_2$ et $AD = BC = l_1$ (l_1 et l_2 constantes).

Questions :

- 1) Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ au point A, En déduire $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ au point F.
- 2) Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point F, En déduire $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point F.
- 3) En notant $\overline{EF} = \lambda(t)\bar{y}_6$, exprimer dans la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_6, \bar{z}_6)$ les vecteurs vitesses $\overline{V}(F \in 5/6)$ et $\overline{V}(F \in 6/1)$.
- 4) En exprimant la fermeture cinématique au point F ($\overline{V}(F \in 2/2) = \vec{0}$) écrire les deux équations différentielles liant $\lambda, \dot{\lambda}, \theta, \dot{\theta}, \beta, \dot{\beta}$ et l_2 .
- 5) Quelle est la nature du mouvement de (3) par rapport à (1) ? Justifier.
- 6) En déduire le vecteur rotation $\overline{\Omega}(3/1)$.
- 7) Quelles sont les trajectoires :
 - * du point B du solide (3) dans (1) ;
 - * du point G_3 du solide (3) dans (1).
- 8) Déterminer les torseurs cinématiques :
 $\{\mathcal{V}(3/1)\}$ au point B, $\{\mathcal{V}(3/1)\}$ au point G_3 , $\{\mathcal{V}(3/2)\}$ au point A, $\{\mathcal{V}(2/5)\}$ au point F.
- 9) Déterminer le vecteur vitesse $\overline{V}(G_3 \in 3/0)$.

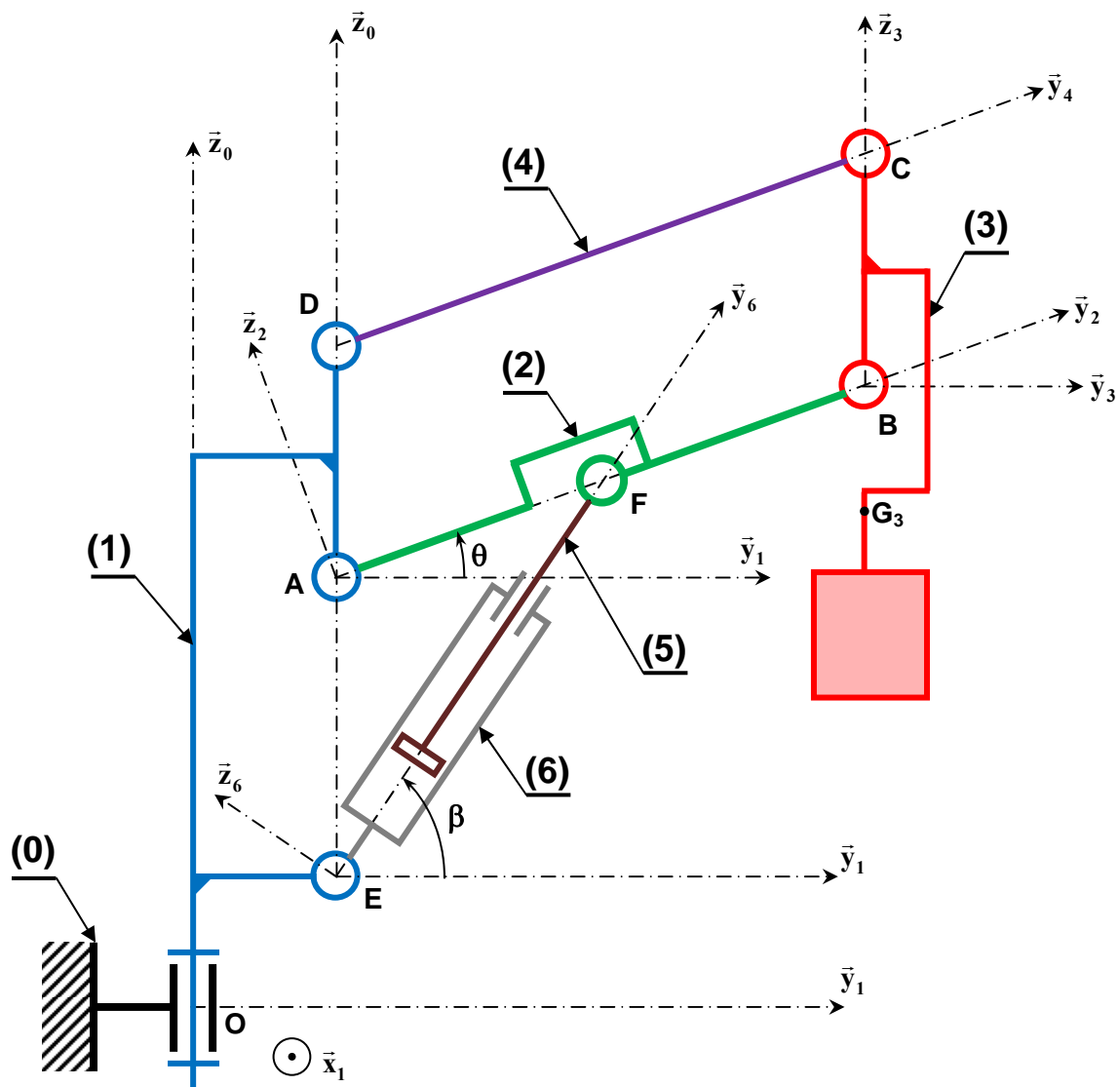
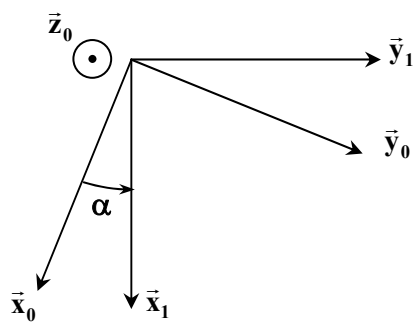


Figure 2



Corrigé :

$$1) .) \{v(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(2/1) \\ \overline{V}(A \in 2/1) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \bar{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$.) \{v(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(2/1) = \dot{\theta} \bar{x}_1 \\ \overline{V}(F \in 2/1) \end{array} \right\}_F \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{V}(F \in 2/1) = \overline{V}(A \in 2/1) + \overline{\Omega}(2/1) \wedge \overline{AF} \\ = \vec{0} + \dot{\theta} \bar{x}_1 \wedge \frac{l_2}{2} \bar{y}_2 = \frac{l_2}{2} \dot{\theta} \bar{z}_2 \end{array} \right.$$

$$2) .) \{v(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha} \bar{z}_0 \\ \overline{V}(F \in 1/0) \end{array} \right\}_F \quad \text{avec} \quad \overline{V}(F \in 1/0) = \overline{V}(A \in 1/0) + \overline{\Omega}(1/0) \wedge \overline{AF}$$

$$\text{On a } \overline{V}(A \in 1/0) = \overline{V}(A/0) = \left. \frac{d\overline{OA}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(a \bar{y}_1 + h \bar{z}_0)}{dt} \right|_{R_0} = -a \dot{\alpha} \bar{x}_1$$

$$\left(\left. \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right|_{R_1} + \overline{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \bar{y}_1 = \vec{0} + \dot{\alpha} \bar{z}_0 \wedge \bar{y}_1 = -\dot{\alpha} \bar{x}_1 \right)$$

$$\text{Donc } \overline{V}(F \in 1/0) = -a \dot{\alpha} \bar{x}_1 + \dot{\alpha} \bar{z}_0 \wedge \frac{l_2}{2} \bar{y}_2 = - \left(a + \frac{l_2}{2} \cos \theta \right) \dot{\alpha} \bar{x}_1$$

$$.) \{v(2/0)\}_F = \{v(2/1)\}_F + \{v(1/0)\}_F$$

$$\{v(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(2/0) = \dot{\theta} \bar{x}_1 + \dot{\alpha} \bar{z}_0 \\ \overline{V}(F \in 2/0) = \frac{l_2}{2} \dot{\theta} \bar{z}_2 - \left(a + \frac{l_2}{2} \cos \theta \right) \dot{\alpha} \bar{x}_1 \end{array} \right\}_F$$

$$3) .) \overline{V}(F \in 5/6) = \overline{V}(F/6) = \left. \frac{d\overline{EF}}{dt} \right|_{R_6} = \dot{\lambda} \bar{y}_6$$

$$.) \overline{V}(F \in 6/1) = \overline{V}(E \in 6/1) + \overline{\Omega}(6/1) \wedge \overline{EF} \\ = \vec{0} + \dot{\beta} \bar{x}_1 \wedge \lambda \bar{y}_6 = \lambda \dot{\beta} \bar{z}_6$$

$$4) \overline{V}(F \in 2/2) = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\overline{V}(F \in 2/5)}_{\vec{0} \text{ car } L(2/5) = \text{Pivot}(F, \bar{x}_1)} + \overline{V}(F \in 5/6) + \overline{V}(F \in 6/1) + \overline{V}(F \in 1/2) = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \overline{V}(F \in 5/6) + \overline{V}(F \in 6/1) - \overline{V}(F \in 2/1) = \vec{0}$$

$$\dot{\lambda} \bar{y}_6 + \lambda \dot{\beta} \bar{z}_6 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta} \bar{z}_2 = \vec{0}$$

En projetant sur la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \cos \beta - \lambda \dot{\beta} \sin \beta + \frac{l_2}{2} \dot{\theta} \sin \theta = 0 \\ \dot{\lambda} \sin \beta + \lambda \dot{\beta} \cos \beta - \frac{l_2}{2} \dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Remarque : On peut aussi projeter sur la base $(\bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \cos(\beta - \theta) - \lambda \dot{\beta} \sin(\beta - \theta) = 0 \\ \dot{\lambda} \sin(\beta - \theta) + \lambda \dot{\beta} \cos(\beta - \theta) - \frac{l_2}{2} \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

- 5) Le mouvement de (3) Par rapport à (1) est une **translation circulaire** car (ABCD) est un parallélogramme $\forall t$.
- 6) En en déduit que $\overline{\Omega(3/1)} = \vec{0}$
- 7) .) $T(B \in 3/1) =$ Cercle de centre A et de rayon $AB = l_2$
 .) $T(G_3 \in 3/1) =$ Cercle de centre H tel que (HG₃BA) est un parallélogramme et de rayon $HG_3 = AB = l_2$

8) .) $\{v(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega(3/1)} = \vec{0} \\ \overline{V(B \in 3/1)} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 \end{array} \right\}_B$

.) $\{v(3/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega(3/1)} = \vec{0} \\ \overline{V(G_3 \in 3/1)} = \overline{V(B \in 3/1)} \end{array} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 \end{array} \right\}_{G_3}$

.) $\{v(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega(3/2)} = \overline{\Omega(3/1)} - \overline{\Omega(2/1)} \\ \overline{V(A \in 3/2)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\theta} \vec{x}_1 \\ l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 \end{array} \right\}_A$

$$\left(\overline{V(A \in 3/2)} = \overline{V(A \in 3/1)} + \underbrace{\overline{V(A \in 1/2)}}_{\vec{0}} = \overline{V(B \in 3/1)} = l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 \right)$$

.) $\{v(2/5)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega(2/5)} \\ \overline{V(F \in 2/5)} \end{array} \right\}_F = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} - \dot{\beta}) \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_F$

9) $\overline{V(G_3 \in 3/0)} = \overline{V(G_3 \in 3/1)} + \overline{V(G_3 \in 1/0)}$
 $= l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 + \overline{V(A \in 1/0)} + \overline{\Omega(1/0)} \wedge \overline{AG_3}$
 $= l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 - a \dot{\alpha} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (l_2 \vec{y}_2 - b \vec{z}_3)$
 $= l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 - (a + l_2 \cos \theta) \dot{\alpha} \vec{x}_1 \quad (\vec{z}_3 = \vec{z}_0)$

Autre méthode : Par dérivation

$$\begin{aligned} \overline{V(G_3 \in 3/0)} = \overline{V(G_3/0)} &= \left. \frac{d\overline{OG_3}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d}{dt} (a \vec{y}_1 + h \vec{z}_0 + l_2 \vec{y}_2 - b \vec{z}_3) \right|_{R_0} \\ &= a \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{R_0} + \vec{0} + l_2 \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} - b \left. \frac{d\vec{z}_3}{dt} \right|_{R_0} \\ &= -a \dot{\alpha} \vec{x}_1 + l_2 \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} + \vec{0} \quad (\vec{z}_3 = \vec{z}_0) \end{aligned}$$

On a $\left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_2} + \overline{\Omega(R_2/R_0)} \wedge \vec{y}_2 = \vec{0} + (\dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta} \vec{z}_2 - \dot{\alpha} \cos \theta \vec{x}_1$

D'où $\overline{V(G_3 \in 3/0)} = l_2 \dot{\theta} \vec{z}_2 - (a + l_2 \cos \theta) \dot{\alpha} \vec{x}_1$