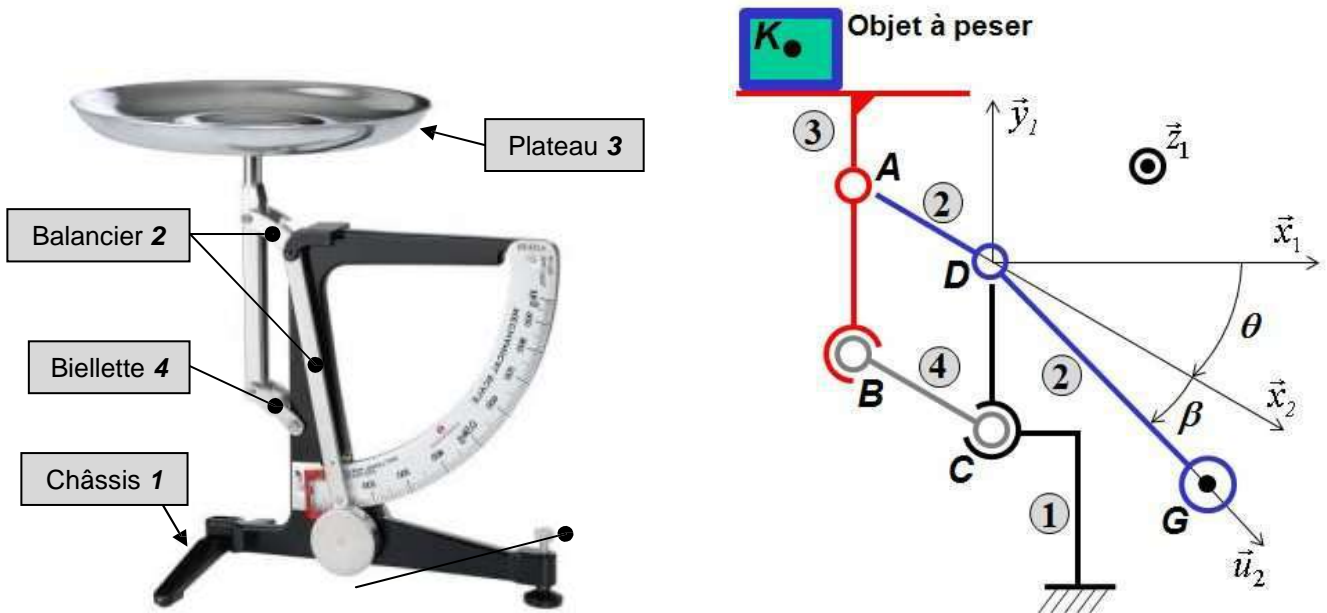


PESE LETTRE (statique)

On considère le pèse lettre présenté sur la photo ci-dessous :



Lorsqu'un objet est posé sur le plateau 3, le mécanisme prend une nouvelle position à l'équilibre caractérisée par un angle θ dont la valeur est relevée par le biais d'un index placé devant une graduation donnant directement la masse M de l'objet.

Paramétrage : le pèse-lettre étudié comporte quatre ensembles :

- Un châssis **1** auquel est associée la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ avec \vec{y}_1 orientant la verticale ascendante.
On pose : $\overline{CD} = a \cdot \vec{y}_1$.
- Un balancier **2** assimilable à une ligne brisée ADG , en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}) avec le châssis **1**. On lui associe la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ et on pose : $\theta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. L'angle de brisure est noté β avec $\beta = cte = (\vec{u}_2, \vec{x}_2)$. La masse totale du balancier vaut m_2 , elle est concentrée au point G tel que : $\overline{DG} = e \cdot \vec{u}_2$. On pose $\overline{AD} = b \cdot \vec{x}_2$. Attention sur la figure l'angle θ est négatif.
- Un plateau **3** de masse négligeable sur lequel est posé l'objet à peser de masse M et de centre de gravité K . Il est en liaison pivot d'axe Az_1 avec le balancier **2** et en liaison sphérique de centre B avec la biellette **4**. On pose $\overline{BA} = \overline{CD} = a \cdot \vec{y}_1$ et $\overline{AK} = -c \cdot \vec{x}_1 + d \cdot \vec{y}_1$.
- Une biellette **4** en liaison sphérique à ses extrémités (centres B et C), de masse négligée.
On pose : $\overline{BC} = \overline{AD} = b \cdot \vec{x}_2$

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

$$\beta = 15^\circ \quad b = 4,5 \text{ cm} \quad e = 7 \text{ cm} \quad m_2 = 50 \text{ g}$$

Hypothèses :

- Etude cinématique et statique planes
- Les liaisons sont supposées parfaites et au final toutes de type pivot en modélisation plane.

Objectifs : mettre en place la relation liant la masse M de l'objet posé sur le plateau en fonction de l'angle de rotation θ .

Etude avec Mecaplan

Lancer le logiciel et ouvrir le fichier fourni pour lequel l'angle θ est initialement de valeur nulle. Les deux actions mécaniques extérieures sont déjà définies :

- Le glisseur $-m_2 \cdot g \cdot \vec{y}_1$ au point G qui s'exerce sur le balancier **2**
- Le glisseur $F \cdot \vec{y}_1$ au point K de valeur inconnue qui s'exerce sur le plateau **3**.

1. Piloter la liaison L_{21} à raison d'un 1 tr/min. Choisir le débattement afin d'obtenir une amplitude de rotation de 36° puis prendre un incrément 6 fois plus petit que le débattement afin d'obtenir 6 positions calculées. Compléter le tableau suivant à l'aide du menu Résultats/courbes :
- 2.

$\theta = \theta_{21}$ en degré	$y_A(t) = \overline{DA} \cdot \vec{y}_1$ en mm	Effort F en N
0	0	
6		
12		
18		
24		
30		
36		

Etude théorique

On cherche à retrouver à l'aide d'une étude théorique les valeurs issues de la modélisation informatique.

3. Justifier la direction de l'action de la biellette **4** sur le plateau **3**.
4. Exprimer le torseur de l'action du balancier **2** sur le plateau **3** au point A dans la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$
5. On isole le plateau 3 qui est soumis à 3 glisseurs :
 - a. L'effort $F \cdot \vec{y}_1 = -M \cdot g \cdot \vec{y}_1$ exercé au point K
 - b. L'action de la biellette **4** sur le plateau **3**
 - c. L'action du balancier **2** sur le plateau **3**

Quelle est le nombre d'inconnues statiques associées à cet isolement ? Déterminer à l'aide d'une unique équation : $Y_{23} = \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_2$ en fonction de l'effort F.

6. Isoler le balancier **2** et effectuer le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur ce solide.
7. Exprimer la composante Y_{23} en fonction du poids $m_2 \cdot g$, des angles θ et β , et des différentes longueurs.
8. En déduire l'expression de l'effort F en fonction du poids $m_2 \cdot g$, des angles θ et β , et des différentes longueurs.
9. La position de la masse M influe t-elle sur le résultat obtenu ?
10. Déterminer la tension dans la biellette **4**.

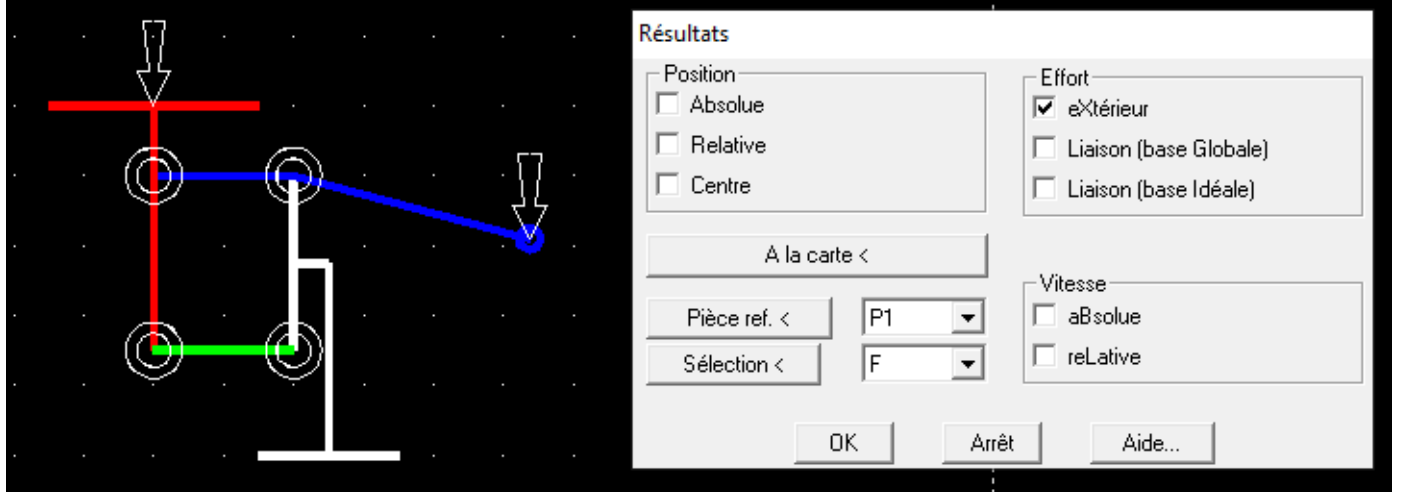
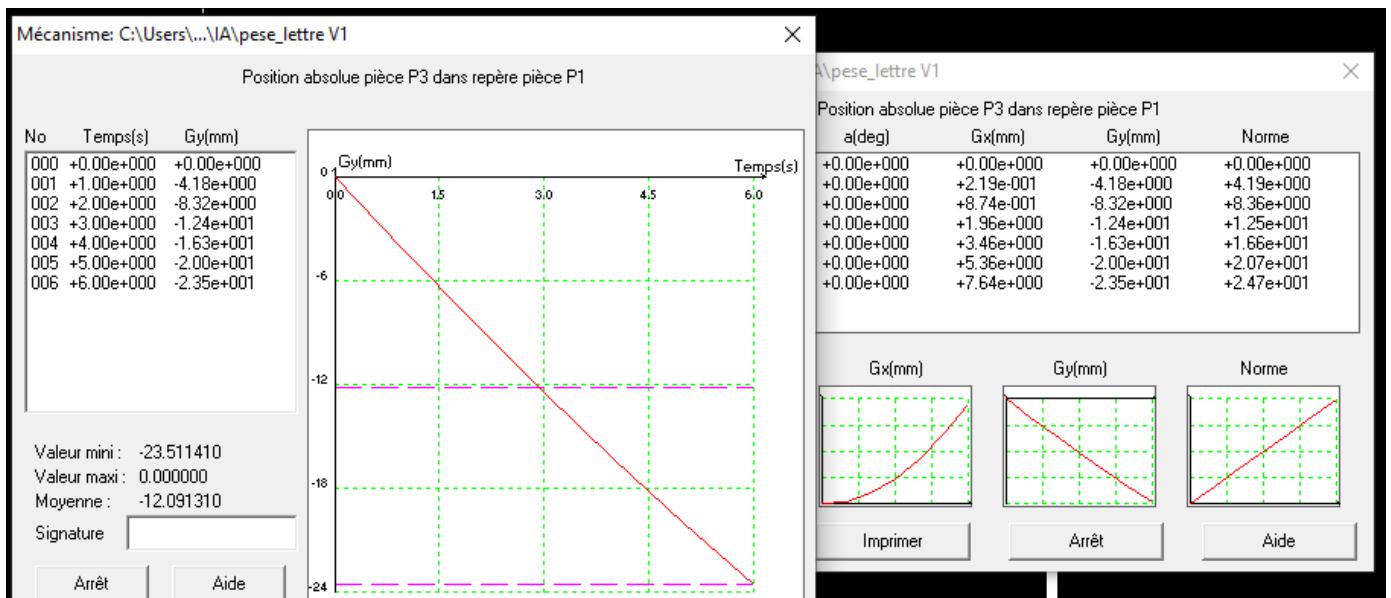
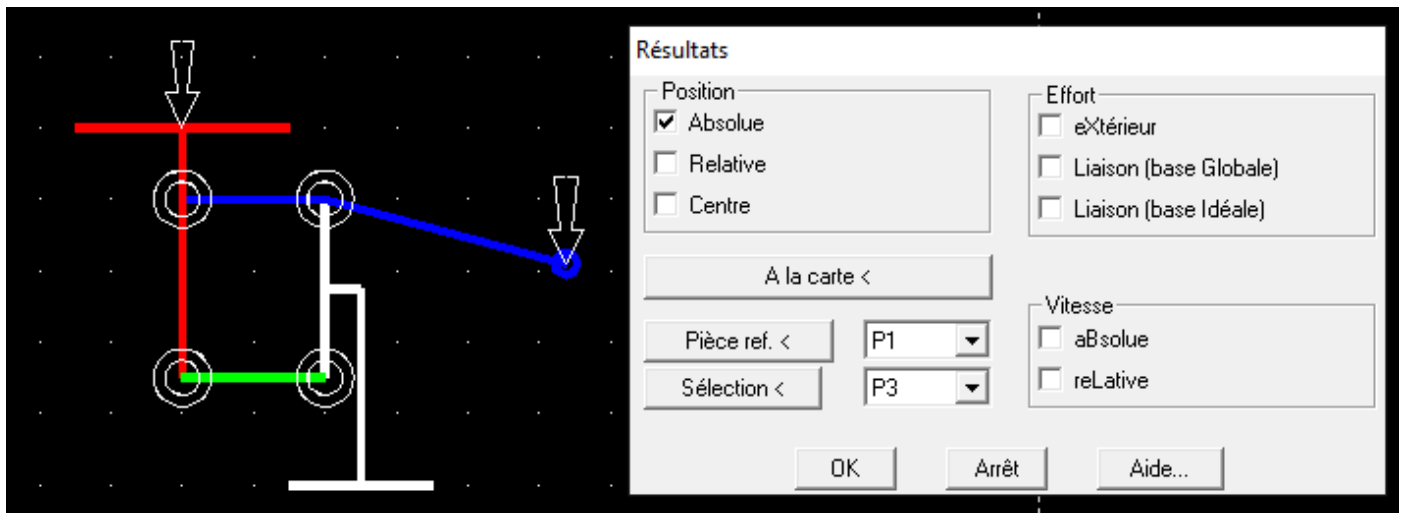
Script Python

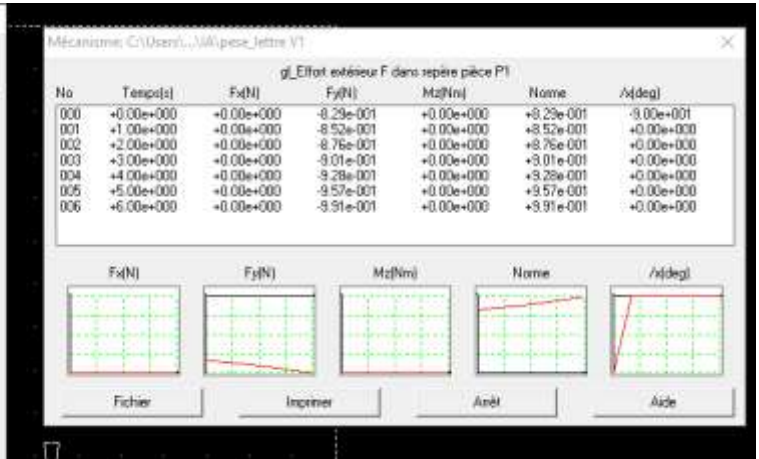
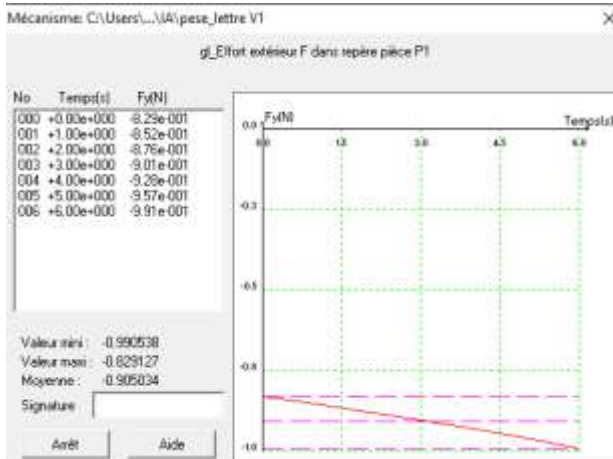
Ouvrir à l'aide de Pyzo l'annexe fournie à la fin de ce document.

11. Compléter la fonction $yA(\theta : \text{float})$ qui à partir de l'angle θ exprimé en degré renvoie l'ordonnée du point A exprimée en mm.
12. Compléter la fonction $F(\theta : \text{float})$ qui à partir de l'angle θ exprimé en degré renvoie la valeur de l'effort F et donc de la masse M, assurant pour la position étudiée l'équilibre de l'ensemble.
13. Comparer les différents résultats obtenus.

Corrigé

1. 36 degrés souhaités soit un dixième de tour. A raison d'un tour par minute, débattement de 6s. Increment de 1s. On obtient les résultats suivants :





$\theta = \theta_{21}$ en degré	$y_A(t) = \overline{DA} \cdot \vec{y}_1$ en mm	Effort F en N
0	0	-0.829
6	-4.18	-0.852
12	-8.32	-0.876
18	-12.4	-0.901
24	-16.3	-0.928
30	-20	-0.957
36	-23.5	-0.991

2. La bielle **4** est soumise à **2** glisseurs qui s'exercent aux points B et C, donc :

- l'action $\vec{B}_{4 \rightarrow 3}$ est colinéaire à \overline{BC} donc \vec{x}_2

3. Le torseur de l'action du balancier **2** sur le plateau **3** au point A dans la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ s'écrit :

$$\{\mathfrak{T}_{2 \rightarrow 3}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{23} \\ Y_{23} \\ -0 \end{Bmatrix}_{B2}$$

4. On isole le plateau **3** qui est soumis à 3 glisseurs :

- L'effort $F \cdot \vec{y}_1 = -M \cdot g \cdot \vec{y}_1$ exercé au point K
- L'action de la bielle **4** sur le plateau **3** qui est de direction \vec{x}_2
- L'action du balancier **2** sur le plateau **3**

En écrivant la somme des forces suivant \vec{y}_2 , on obtient :

$$F \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 + (X_{23} \cdot \vec{x}_2 + Y_{23} \cdot \vec{y}_2) \cdot \vec{y}_2 = 0 = F \cdot \cos(\theta) + Y_{23}$$

5. Le balancier **2** est soumis à 3 glisseurs :

- $\{\mathfrak{T}_{3 \rightarrow 2}\} = -\{\mathfrak{T}_{2 \rightarrow 3}\} = - \begin{Bmatrix} X_{23} \\ F / \cos \theta \\ -0 \end{Bmatrix}_{B2}$
- $\{\mathfrak{T}_{pes \rightarrow 2}\}_G = \begin{Bmatrix} -m_2 \cdot g \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\{\mathfrak{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ avec $\vec{M}_{D,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = 0$

6. Afin de ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison entre le balancier **2** et le bâti **1**, on calcule la somme des moments en D en projection sur le vecteur \vec{z} :

$$\vec{M}_{D,3 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{D,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{D,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[\overrightarrow{DA} \wedge (-X_{23} \cdot \vec{x}_2 - Y_{23} \cdot \vec{y}_2) \right] \cdot \vec{z} + 0 + \left[\overrightarrow{DG} \wedge (-m_2 \cdot g \cdot \vec{y}_1) \right] \cdot \vec{z} = 0 \\ & -b \cdot Y_{23} + \left[(-m_2 \cdot g \cdot \vec{y}_1) \wedge \vec{z} \right] \cdot e \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ & -b \cdot Y_{23} - m_2 \cdot g \cdot \vec{x}_1 \cdot e \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ & -b \cdot Y_{23} - m_2 \cdot g \cdot e \cdot \cos(\theta - \beta) = 0 \end{aligned}$$

7. En combinant les deux dernières équations écrites, on en déduit :

$$F = -M \cdot g = -\frac{m_2 \cdot g \cdot e \cdot \cos(\theta - \beta)}{b \cdot \cos(\theta)}$$

8. On observe que le résultat est indépendant de la position du point K de dépôt de l'objet sur le plateau.

9. On isole, de nouveau, le plateau 3 qui est soumis à 3 glisseurs :

a. L'effort $F \cdot \vec{y}_1 = -M \cdot g \cdot \vec{y}_1$ exercé au point K

b. L'action de la biellette 4 sur le plateau 3 de direction \vec{x}_2 : $\vec{B}_{4 \rightarrow 3} = T_4 \cdot \vec{x}_2$

c. L'action du balancier 2 sur le plateau 3

On calcule la somme des moments en A en projection sur le vecteur \vec{z} :

$$\begin{aligned} & \vec{M}_{A, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{A, 4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = 0 \\ & \left[\overrightarrow{AK} \wedge (F \cdot \vec{y}_1) \right] \cdot \vec{z} + 0 + \left[\overrightarrow{AB} \wedge (T_4 \cdot \vec{x}_2) \right] \cdot \vec{z} = 0 \\ & F \cdot \vec{x}_1 \cdot \overrightarrow{AK} - T_4 \cdot \vec{y}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ & -c \cdot F + a \cdot T_4 \cdot \cos(\theta) = 0 \\ & T_4 = \frac{c \cdot F}{a \cdot \cos(\theta)} = \frac{-c \cdot M \cdot g}{a \cdot \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Si le point K est à gauche de la verticale issue du point A (c positif), T_4 est négatif donc la biellette 4 est comprimée.

Script Python

```
import numpy as np
b = 40 # distance AD=BC en mm
e = 70 # distance DG en mm
m2 = 50 # masse m2 placée au point G en gramme
g = 9.81 # champ de pesanteur en m/s2
beta = 15 # angle AD, DG en degré
L_theta = np.linspace(0,36,7) # 7 valeurs de l'angle theta de 0 à 36 degrés bornes incluses

def yA(theta) :
    """
    renvoie le déplacement vertical du point A exprimé en mm
    """
    return -b*np.sin(theta*np.pi/180)

def F(theta):
    """
    renvoie l'effort F exprimé en Newton
    """
    return e*m2*g*np.cos((theta-beta)*np.pi/180.0) / np.cos(theta*np.pi/180) / b / 1000

print('déplacement suivant y du point A en mm : ', yA(L_theta))
# [-0. -4.18113853 -8.31646763 -12.36067977 -16.26946572 -20. -23.51141009] en mm
print('Effort F assurant l'équilibre en N pour les différentes positions : ', F(L_theta))
# [ 0.82912658 0.85247694 0.87634895 0.90131197 0.92804028 0.95739291 0.99053803] en N
```