

Feuille de cours 0.2 : récurrence

1 Récurrence simple

1.1 Principe

Le principe de récurrence est une méthode permettant de démontrer un énoncé pour tout entier naturel, c'est-à-dire pour prouver un résultat du type : $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n))$ où $\mathcal{P}(n)$ désigne une propriété qui dépend de n , comme par exemple : $2^n \geq n + 1$.

Remarque 1

L'énoncé à prouver peut aussi porter sur tous les entiers supérieurs à un certain $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Remarque 2

Il est donc inutile de se lancer dans une preuve par récurrence pour montrer un résultat ne faisant pas intervenir d'entiers, comme un énoncé du type $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}(x)$.

Proposition 3 (récurrence simple)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, et
- pour tout $n \geq n_0$, on a : $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 4

La démonstration de cette propriété repose en fait sur la définition des entiers naturels $\mathbb{N}$, par exemple à travers l'axiome suivant (un des "axiomes de Péano") : si $E \subset \mathbb{N}$ est tel que $0 \in E$, et $n \in E \implies n + 1 \in E$, alors $E = \mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence donné ci-dessus correspond à cet axiome appliqué à l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{P}(n + n_0) \text{ est vraie}\}$.

Remarque 5

Un raisonnement par récurrence comporte donc deux étapes :

- l'initialisation : c'est la partie où l'on prouve que la propriété est vraie **pour le plus petit** des entiers pour laquelle on veut la prouver ;
- l'hérédité : c'est la partie où l'on prouve que **si** la propriété est vraie pour un entier n **quelconque** (parmi ceux pour lesquels on veut la démontrer) **alors** elle est vraie pour l'entier $n + 1$.

Exercice 1

Démontrer que : $\forall n \geq 4, 2^n \geq 4n$.

1.2 Rédaction d'une récurrence simple

Pour être correcte, la rédaction d'une récurrence doit faire apparaître clairement chacun des points suivants :

1. L'annonce du raisonnement qui va suivre, qui doit préciser :
 - le fait qu'on va travailler par *récurrence* (le mot doit être dit),
 - l'identification de la propriété $\mathcal{P}(n)$,
 - l'ensemble d'entiers pour lequel on va prouver la propriété.
2. L'étape d'initialisation où on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (il s'agit généralement d'une vérification facile).
3. L'étape d'hérédité où on montre que pour $n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. Cette étape doit préciser :
 - qu'on fixe un $n \geq n_0$ (c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}$, si $n_0 = 0$),
 - qu'on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie,
 - puis montrer que cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.
4. Une conclusion, indiquant que la preuve se termine ici.

Par exemple, la trame suivante contient tous les points demandés :

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n)$.

Tout d'abord, $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie puisque ...

Ensuite, soit $n \geq n_0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie (). Alors on en déduit que ..., et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*

Finalement, cela prouve par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 6

La phrase signalée par (*) : “soit $n \geq n_0$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie” a le même sens que : “supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie **pour un certain entier** $n \geq n_0$ ”. On peut donc utiliser (entre autres) ces deux formulations.

Attention, aux erreurs classiques suivantes :

- L'étape d'initialisation consiste souvent en une simple vérification. Il faut pourtant bien *démontrer* que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, et pas seulement “recopier bêtement” $\mathcal{P}(n_0)$.
- L'étape d'hérédité constitue le cœur de la preuve. À nouveau, il faut *démontrer* que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Se contenter d'écrire “si on a $\mathcal{P}(n)$ alors on a nécessairement $\mathcal{P}(n+1)$ ” sans donner d'argument n'est pas satisfaisant. En particulier on doit obtenir $\mathcal{P}(n+1)$ **en utilisant** $\mathcal{P}(n)$. On dit que $\mathcal{P}(n)$ est l'hypothèse de récurrence. Si vous n'utilisez pas $\mathcal{P}(n)$ pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$ alors c'est que vous n'avez pas besoin de raisonner par récurrence.
- L'hypothèse de récurrence consiste à supposer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie **pour un certain** n , et non pas pour tout n ! Ainsi l'hypothèse de récurrence *n'est pas* : “ $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ ”, mais bien : “supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $\mathcal{P}(n)$ ”.
- L'hérédité consiste à prouver une implication seulement. Inutile donc de raisonner par équivalence pour montrer que $\mathcal{P}(n) \iff \mathcal{P}(n+1)$. Par ailleurs, on attend un raisonnement en français donc :

1.3 Exemples

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Il arrive souvent que la propriété à démontrer ne soit pas donnée, et qu'il faille l'intuiter, par exemple en testant sur de petites valeurs de n . On forme alors une conjecture au brouillon, qu'on démontre par récurrence :

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. Déterminer la valeur de u_n en fonction de n .

Exercice 4

Montrer que pour tout $n \geq 6$, $2^n \geq 6n + 7$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2}$.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2}$.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.

2 Récurrence double

Proposition 7 (récurrence double)

Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies, et
- pour tout $n \geq n_0$, on a $[\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n + 1)] \Rightarrow \mathcal{P}(n + 2)$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 8

La preuve de cette proposition consiste à utiliser une récurrence simple en utilisant la propriété $\mathcal{Q}(n) = [\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n + 1)]$.

La rédaction d'une récurrence double est similaire à celle d'une récurrence simple. Il y a pourtant deux changements :

1. L'étape d'initialisation comporte *deux* points à démontrer : $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ (typiquement, démontrer que la propriété est vraie au rang 0 et au rang 1).
2. Pour l'hérédité, l'hypothèse de récurrence est que : $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ sont vraies. C'est là que réside l'intérêt d'une récurrence double : on dispose d'une hypothèse plus forte que dans une récurrence simple pour prouver la propriété au rang suivant.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

3 Récurrence forte

Proposition 9 (récurrence forte)

Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, et
- pour tout $n \geq n_0$, on a $\left[\mathcal{P}(k) \text{ est vraie pour tout } k \in \llbracket n_0, n \rrbracket \right] \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque 10

La preuve de cette proposition consiste à utiliser une récurrence simple en utilisant la propriété $\mathcal{Q}(n) = \left[\mathcal{P}(k) \text{ est vraie pour tout } k \in \llbracket n_0, n \rrbracket \right]$.

La rédaction d'une récurrence double est similaire à celle d'une récurrence simple. L'initialisation porte seulement sur le premier rang concerné. En revanche l'hypothèse de récurrence est bien plus forte : on peut utiliser que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_{n-1} + 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Émettre une conjecture sur la valeur de u_n pour tout n puis la démontrer.