

NOM :

PRÉNOM :

*Durée : 30 min. Calculatrice interdite.**Répondez directement sur la feuille. Présentez vos calculs intermédiaires. Simplifiez les résultats au maximum.*Spé Maths en Terminale : ☐ oui ☐ nonOption Maths expertes : ☐ oui ☐ non

Note du bac en Maths (sur 20) :

Situation particulière à signaler :

Question 1 (Fractions, puissances). (/2 pts)

- $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{20-9}{24} = \frac{11}{24}$
- $\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x y^2} = \frac{y}{x^2 y^2} - \frac{x}{x^2 y^2} = \frac{y-x}{x^2 y^2}$
- $\frac{2^{1-2n} \times 4^n}{2^{-n}} = 2^n \times 2^{1-2n} \times 2^{2n} = 2^{n+1-2n+2n} = 2^{n+1}$
- $\frac{x^5}{\sqrt{x^3}} = \frac{x^5}{x\sqrt{x}} = \frac{x^4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} x^3$

Question 2 (Exponentielles et logarithmes). (/2 pts)

- $(e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$
- $\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$
- $\ln\left(\frac{e^x}{e^{2x-1}}\right) = \ln(e^{x-(2x-1)}) = \ln(e^{-x+1}) = 1-x$
- $\exp\left(\frac{1}{2} \ln(4)\right) = \exp(\ln(\sqrt{4})) = \sqrt{4} = 2$

Question 3 (Dérivation). (/4 pts)*Calculez les dérivées des fonctions suivantes. On n'attend pas de rédaction.*

- $f(x) = 3 \cos(x)$. $f'(x) = -3 \sin(x)$
- $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
- $h(x) = \frac{2x-1}{3-x}$ $h'(x) = \frac{2(3-x) - (2x-1) \times (-1)}{(3-x)^2} = \frac{6-2x+2x-1}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)^2}$
- $u(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ $u'(x) = -\frac{\ln'(x)}{(\ln(x))^2} = -\frac{1}{x \ln^2(x)}$

Question 4 (Équations et inéquations). (/4 pts)

Résoudre les équations et inéquations suivantes. On attend une rédaction comme au Bac.

a) $2x - 1 = 3 - x$

b) $\ln(1+x) \leq 0$

c) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

d) $\frac{2x-3}{x+1} < 1$

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

b) On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, $1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$
Puis, pour $x \in]-1, +\infty[$:

$\ln(1+x) \leq 0 \Leftrightarrow 1+x \leq e^0 \Leftrightarrow 1+x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$
Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-1, 0]$.

c) Le discriminant du polynôme $-X^2 + 2X + 3$ est

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$

donc ses racines sont $\frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + 4}{-2} = -1$

et $\frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1, 3\}$.

d) On distingue 2 cas selon le signe de $x+1$:

• si $x > -1$ alors $x+1 > 0$ et donc

$\frac{2x-3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow 2x-3 < x+1 \Leftrightarrow x < 4$

Dans ce cas on trouve que les éléments de $] -1, 4[$ sont solutions.

• si $x < -1$ alors $x+1 < 0$ et donc

$\frac{2x-3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow 2x-3 > x+1 \Leftrightarrow x > 4$

il n'y a donc pas de solutions dans ce cas.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-1, 4[$.

Question 5 (Raisonnement et expression). (/3 pts)

1. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$, quelle différence faites-vous entre f et $f(x)$?

$f(x)$ désigne un nombre réel (l'image de x par f)
tandis que f désigne une fonction.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times (3^n + 1)$

Tout d'abord pour $n=0$ on a $2 \times (3^0 + 1) = 4 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons ensuite que $u_n = 2 \times (3^n + 1)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors
 $u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3 \times (2 \times (3^n + 1)) - 4 = 2 \times 3 \times 3^n + 6 - 4 = 2 \times (3^{n+1} + 1)$
ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, par récurrence on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2(3^n + 1)$.

3. Un étranger parlant français couramment vous demande de lui expliquer comment fonctionne l'élection présidentielle française. Présentez-lui les modalités de cette élection dans un court exposé de 5 à 10 lignes en vous efforçant au maximum d'être précis, clair et concis (comme il faut l'être dans une copie de mathématiques).