

Plusieurs solutions sont toujours possibles : en cas de doute, n'hésitez pas à me proposer une autre façon de mener les calculs. Si ce corrigé contient des erreurs, les élèves les signalant marquent des points de participation.

Partie A : exponentielle

Exercice 1

$$1. \quad e^{2x}e^{1-2x} = e^{2x+1-2x} \quad \text{via } e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$= e^1$$

$$= \boxed{e}$$

$$2. \quad (e^{2x-1})^2 e^{3x+4} = e^{2(2x-1)}e^{3x+4} \quad \text{via } (e^a)^n = e^{na}$$

$$= e^{4x-2}e^{3x+4}$$

$$= e^{(4x-2)+(3x+4)} \quad \text{via } e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$= e^{7x+2}$$

$$= \boxed{e^{7x+2}}$$

$$3. \quad \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^{(2x+3)-(x-1)} \quad \text{via } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$= e^{2x+3-x+1}$$

$$= e^{x+4}$$

$$= \boxed{e^{x+4}}$$

Exercice 2

$$1. \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})e^x}{2e^x} \quad \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } e^x$$

$$= \frac{e^x e^x + e^{-x} e^x}{2e^x}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^0}{2e^x} \quad \text{via } e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$= \boxed{\frac{e^{2x} + 1}{2e^x}} \quad \text{car } e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} &= \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} && \text{mise au même dénominateur} \\
&= \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x)^2 - 1} && \text{numérateur : factoriser par } e^x \\
&&& \text{et dénominateur : } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\
&= \frac{e^x \times 2}{e^{2x} - 1} && \text{via } (e^x)^2 = e^{2x} \\
&= \frac{2}{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}} && \text{division par } e^x \text{ au numérateur et au dénominateur} \\
&= \frac{2}{e^{2x-x} - e^{-x}} && \text{via } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \text{ et } \frac{1}{e^a} = e^{-a} \\
&= \boxed{\frac{2}{e^x - e^{-x}}}
\end{aligned}$$

Partie B : logarithme népérien

Exercice 3

$$\begin{aligned}
 1. \quad 3 \ln(2) - \ln(16) + \ln(4) &= 3 \ln(2) - \ln(2^4) + \ln(2^2) \\
 &= 3 \ln(2) - 4 \ln(2) + 2 \ln(2) \quad \text{via } \ln(a^b) = b \ln(a) \\
 &= \boxed{\ln(2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \text{ bis.} \quad 3 \ln(2) - \ln(16) + \ln(4) &= \ln(2^3) - \ln(2^4) + \ln(2^2) \quad \text{via } b \ln(a) = \ln(a^b) \\
 &= \ln\left(\frac{2^3}{2^4}\right) + \ln(2^2) \quad \text{via } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{2^3 \times 2^2}{2^4}\right) \quad \text{via } \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \\
 &= \ln(2^{3+2-4}) \quad \text{via } \frac{x^a x^b}{x^c} = x^{a+b-c} \\
 &= \boxed{\ln(2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \ln(49) - \ln(\sqrt{7}) &= \ln(7^2) - \ln(7^{1/2}) \quad \text{car } 49 = 7^2, \sqrt{7} = 7^{1/2} \\
 &= 2 \ln(7) - \frac{1}{2} \ln(7) \quad \text{via } \ln(a^b) = b \ln(a) \\
 &= \boxed{\frac{3}{2} \ln(7)} \\
 &= \ln(7^{3/2}) \\
 &= \ln(7\sqrt{7}) \quad \text{car } x^{3/2} = x^1 \times x^{1/2} = x\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \quad \text{via } \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \\
 &= \ln\left(\frac{\sqrt{5}^2 - 1^2}{2^2}\right) \quad \text{identité remarquable } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\
 &= \ln(1) \\
 &= \boxed{0} \quad \text{car } \ln(1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \ln\left(\frac{x^2 y}{z^3}\right) - 2\ln(x) + 2\ln(yz^2) - \ln(z) \\
&= \ln(x^2) + \ln(y) - \ln(z^3) - 2\ln(x) + 2\ln(yz^2) - \ln(z) \quad \text{via } \ln\left(\frac{ab}{c}\right) = \ln(a) + \ln(b) - \ln(c) \\
&= 2\ln(x) + \ln(y) - 3\ln(z) - 2\ln(x) + 2(\ln(y) + 2\ln(z)) - \ln(z) \quad \text{via } \ln(ab^2) = \ln(a) + 2\ln(b) \\
&= \boxed{3\ln(y)}
\end{aligned}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
1. \quad & \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) \\
&= \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}\right) \quad \text{via } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right) \quad \text{via les identités remarquables} \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}
\end{aligned}$$

Ce calcul est valable pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 > 0$ et $x^2 + 2x + 1 > 0$ c'est-à-dire $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Attention, si vous avez mené le calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
1 \text{ bis.} \quad & \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) \\
&= \ln((x-1)(x+1)) - \ln((x+1)^2) \quad \text{via les identités remarquables} \\
&= \ln(x-1) + \ln(x+1) - 2\ln(x+1) \quad \text{via } \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \text{ et } \ln(a^2) = 2\ln(a) \\
&= \ln(x-1) - \ln(x+1) \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} \quad \text{via } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

alors dans ce cas, ce calcul n'est valable que si $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$ soit seulement pour $x \in]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
2. \quad & \ln(\sqrt{2x}) \\
&= \frac{1}{2} \ln(2x) \quad \text{via } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \\
&= \frac{\ln(2) + \ln(x)}{2} \quad \text{via } \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)
\end{aligned}$$

Ce calcul est valable pour $x \in \mathbb{R}_*^+$.

Partie C : exponentielle et logarithme

Exercice 5

$$\begin{aligned}
 1. \quad \exp(-\tfrac{1}{2} \ln(z)) &= \frac{1}{\exp(\frac{1}{2} \ln(z))} && \text{via } e^{-a} = \frac{1}{e^a} \\
 &= \frac{1}{\exp(\ln(\sqrt{z}))} && \text{via } \tfrac{1}{2} \ln(a) = \ln(\sqrt{a}) \\
 &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{z}}} && \text{via } \exp(\ln(a)) = a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \ln\left(\frac{e^x}{(e^y)^2}\right) &= \ln(e^{x-2y}) && \text{via } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \text{ et } (e^a)^2 = e^{2a} \\
 &= \boxed{x - 2y} && \text{via } \ln(e^a) = a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \exp\left(\tfrac{1}{2} \ln(\sqrt{e^x})\right) &= \exp\left(\tfrac{1}{2} \ln((e^x)^{1/2})\right) && \text{via } \sqrt{a} = a^{1/2} \\
 &= \exp\left(\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \ln(e^x)\right) && \text{via } \ln(\sqrt{a}) = \tfrac{1}{2} \ln(a) \\
 &= \exp\left(\tfrac{1}{4} x\right) && \text{via } \ln(e^a) = a \\
 &= \boxed{e^{x/4}}
 \end{aligned}$$

Partie D : résolution d'équations

Exercice 6

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$e^{3x-1} = 3 \iff 3x - 1 = \ln(3) \iff x = \frac{\ln(3) + 1}{3}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{\ln(3)+1}{3} \right\}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$e^{3x} = \frac{e^{x+1}}{e^{-x}} \iff e^{3x} = e^{2x+1} \iff 3x = 2x + 1 \iff x = 1.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_3 = \{1\}$.

Les questions 3, 4 et 5 seront corrigées en classe. Les volontaires marqueront un point de participation chacun.

Exercice 7

1. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$:

$$\ln(2x + 3) = \ln(2) \iff 2x + 3 = 2 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Comme $-\frac{1}{2} \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_1 = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

2. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$:

$$\ln(2x + 3) < \ln(2) \iff 2x + 3 < 2 \iff x < -\frac{1}{2}.$$

Comme $-\frac{1}{2} \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_1 = \left] -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right[$.

3. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$:

$$\ln(2x + 3) = 0 \iff 2x + 3 = e^0 \iff 2x + 3 = 1 \iff x = -1.$$

Comme $-1 \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_3 = \{-1\}$.

Les questions 4 et 5 seront corrigées en classe. Les volontaires marqueront un point de participation chacun.