

Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = a &\iff e^x - e^{-x} = 2a \iff e^x - \frac{1}{e^x} = 2a \\ &\iff (e^x)^2 - 2ae^x - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - 2ay - 1 = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Le discriminant de $X^2 - 2aX - 1$ est

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4(a^2 + 1) > 0.$$

Ses racines sont donc

$$a + \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{et} \quad a - \sqrt{a^2 + 1}.$$

Or $\sqrt{a^2 + 1} > \sqrt{a^2} = |a| > a$ donc $a - \sqrt{a^2 + 1} < 0$, tandis que $a + \sqrt{a^2 + 1} > 0$. Comme $e^x > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} y = e^x \\ y = a + \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \\ &\iff e^x = a + \sqrt{a^2 + 1} \\ &\iff x = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}). \end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \right\}}.$$