

Feuille de cours 1 : suites usuelles

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

4.1 Définition

Définition 1

Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Remarque 2

Pour a, b fixés, la suite (u_n) est entièrement déterminée par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 . On dira donc par exemple, pour donner une telle suite : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = -2, \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n. \end{cases}$$

Exemple 1

La suite de Fibonacci $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ définie par $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Pour démontrer des résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on utilise naturellement la récurrence double.

Dans toute la suite de ce paragraphe, les réels a et b sont fixés. On suppose de plus que b est différent de 0. En effet, si $b = 0$ alors, la suite (u_n) est

4.2 Caractère linéaire et solutions particulières

On cherche à “résoudre” la relation de récurrence, c'est-à-dire à connaître l'expression des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ satisfaisant l'équation

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Faisons une première remarque sur l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ solutions de (E) .

Proposition 3 (principe de superposition)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites satisfaisant l'équation (E) et soient λ et μ deux réels. Alors la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ vérifie aussi l'équation (E) .

Démonstration :

Poursuivons en recherchant les suites *géométriques*, solutions de (E) . Soit $q \in \mathbb{R}$; pour que la suite (q^n) soit solution de E il faut et il suffit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n.$$

En simplifiant¹ par q^n , on voit que cela revient à demander que :

Les solutions q de cette équation polynomiale ont donc une importance particulière.

Définition 4

On appelle polynôme caractéristique de l'équation (E) le polynôme $P(X) = X^2 - aX - b$.

Lemme 5

Soit $q \in \mathbb{R}$ une racine du polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - aX - b$. Alors,

1. la suite géométrique $(q^n)_{n \geq 0}$ satisfait (E) ,
2. si de plus le discriminant de P est nul, alors la suite $(nq^n)_{n \geq 0}$ satisfait aussi (E) .

Démonstration :

Remarque 6

Le lemme donne des suites (u_n) , (v_n) solutions de (E) . En appliquant le principe de superposition, on peut en construire d'autres : les $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n \geq 0}$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques.

1. il faut ici supposer que $q \neq 0$, mais si $q = 0$ alors la suite (q^n) est la suite nulle, qui est solution de (E)

4.3 Expression de u_n en fonction de n

Proposition 7

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit $P(X) = X^2 - aX - b$ son polynôme caractéristique et soit $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de ce polynôme.

1. Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines distinctes $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ et il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$,
2. Si $\Delta = 0$, alors P admet une seule racine $q \in \mathbb{R}$ et il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q^n + \mu n q^n$,
3. Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; notons $r = |z_1|$ et $\theta = \arg(z_1)$ (c'est-à-dire que $z_1 = re^{i\theta}$) avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))r^n$.

Remarque 8

Attention à l'ordre des quantificateurs ! Les conclusions sont bien de la forme :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dots$$

et non

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R} : u_n = \dots$$

Démonstration :

4.4 Exemples

Exercice 1

Déterminer le terme général des suites suivantes :

1. La suite de Fibonacci (φ_n) définie par $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$.
2. La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{-5u_{n+1} + 3u_n}{2}$.
3. La suite (v_n) définie par $v_0 = 4$, $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$.
4. (*cas* $\Delta < 0$) : la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
5. (*cas* $\Delta < 0$) : la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$, $v_1 = -4\sqrt{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = -2\sqrt{3}v_{n+1} - 4v_n$.