

NOM :

PRÉNOM :

Bonus de participation : /2 pts (en dehors du barème sur 10 points)

Question 1 (Calculs). (/2 pts) Simplifiez au maximum les expressions suivantes.

$$\bullet \frac{\sqrt{x^5}}{x^3} = \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\bullet \ln\left(\frac{e^x}{e^{2x-1}}\right) = \ln(e^{x-(2x-1)}) = 1-x$$

Question 2 (Expression). (/2 pts)

1. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$, quelle différence faites-vous entre f et $f(x)$?

f désigne la fonction, $f(x)$ désigne un nombre

2. Écrire en toutes lettres comment vous lisez : "soit $f : x \mapsto x^2$ ".

Soit f qui à x associe x au carré

Question 3 (Logique). (/2 pts)

1. Soient P et Q deux assertions. Quelle est la réciproque de $P \Rightarrow Q$?

$$Q \Rightarrow P$$

2. Énoncer une des deux règles de De Morgan sur la négation (celle de votre choix).

Pour deux assertions P et Q on a : $\text{Non}(P \text{ ET } Q) = \text{Non}(P) \text{ OU } \text{Non}(Q)$

Question 4 (Suites usuelles). (/2 pts)

1. Quand dit-on qu'une suite (u_n) est géométrique ?

Lorsque : $\exists q \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$

2. Donner, en fonction de $q \in \mathbb{R}$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

Question 5 (Un exercice). (/2 pts)

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est

$$P(X) = X^2 + X - 2$$

son discriminant vaut $1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$ donc il a deux racines :

$$\frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2.$$

Ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 1^n + \mu (-2)^n = \lambda + \mu (-2)^n$$

On détermine alors λ et μ en résolvant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu (-2)^0 = u_0 \\ \lambda + \mu (-2)^1 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 3\lambda = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n$.

NOM :

PRÉNOM :

Bonus de participation : /2 pts (en dehors du barème sur 10 points)

Question 1 (Calculs). (/2 pts) Simplifiez au maximum les expressions suivantes.

$$\bullet \frac{x^5}{\sqrt{x^3}} = \frac{x^5}{x\sqrt{x}} = x^3\sqrt{x}$$

$$\bullet \ln\left(\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}\right) = \ln(e^{2x+1-(x-1)}) = x+2$$

Question 2 (Expression). (/2 pts)

1. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$, quelle différence faites-vous entre f et $f(x)$?

f désigne la fonction et $f(x)$ désigne un nombre.

2. Écrire en toutes lettres comment vous lisez : "soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ".

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Question 3 (Logique). (/2 pts)

1. Soient P et Q deux assertions. Quelle est la contraposée de $P \Rightarrow Q$?

C'est $\text{Non}(Q) \Rightarrow \text{Non}(P)$

2. Énoncer une des deux règles appelée distributivité de ET et OU (celle de votre choix).

Soient P, Q et R trois assertions alors

$$P \text{ ET } (Q \text{ OU } R) = (P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R)$$

Question 4 (Suites usuelles). (/2 pts)

1. Quand dit-on qu'une suite (u_n) est arithmétique ?

Lorsque : $\exists r \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$

2. Donner, en fonction de $q \in \mathbb{R}$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

Question 5 (Un exercice). (/2 pts)

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est

$$P(X) = X^2 - X - 2.$$

On disciminant vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$ donc il a 2 racines :

$$\frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

Ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda 2^n + \mu (-1)^n$$

On détermine alors λ et μ en résolvant :

$$\begin{cases} \lambda 2^0 + \mu (-1)^0 = u_0 \\ \lambda 2^1 + \mu (-1)^1 = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 3\lambda = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} (-1)^n.$