

exo 11 :

$\Rightarrow$ Si (u_n) est arithmétique de raison r alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$
et donc $\frac{u_{n+2} + u_n}{2} = \frac{u_0 + (n+2)r + u_0 + nr}{2} = u_0 + (n+1)r = u_{n+1}$.

$\Leftarrow$ Si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_{n+2} + u_n}{2}$ alors

$$2u_{n+1} = u_{n+2} + u_n \text{ donc } u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad (*)$$

On peut alors conclure en utilisant le résultat du cours donnant l'expression des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

($P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu n$
d'où (u_n) arithmétique de raison μ).

De manière plus élégante, on peut aussi conclure en écrivaint $(*)$

$$\text{sous la forme : } u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad (**)$$

Cela fournit que la suite $(v_n) = (u_{n+1} - u_n)$ est constante

(car $(**)$ s'écrit aussi $v_{n+1} = v_n$) ce qui, d'après le cours, implique que (u_n) est arithmétique.