

Exercice 1

1. Écrire les sommes et produits suivants avec le symbole $\sum$ ou $\prod$ et les calculer :

(a) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2027$

(b) $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n)$

2. Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à transformer un symbole $\sum$ ou $\prod$ en pointillés :

(a) $\prod_{k=1}^n e^{-k}$

(b) $\sum_{k=1}^n \ln(3k)$

Exercice 2

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. Retrouver cette formule en utilisant des formules de sommes du cours.

Exercice 3

Dans cet exercice, on fixe $q \in \mathbb{R}$ et $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $q \neq 1$ et $p \leq n$.

1. Rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^n q^k$.
2. En effectuant un "découpage" déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^n q^k$.
3. En effectuant le changement d'indice $j = k - p$, retrouver la valeur de $\sum_{k=p}^n q^k$ trouvée à la question précédente.

Exercice 4

Écrire avec des factorielles les nombres suivants :

$$P_1 = \prod_{k=n}^{2n} k \quad ; \quad P_2 = \prod_{k=0}^n (2k+1)$$

$$P_3 = \frac{5 \times 6 \times 7 \times \dots \times (n-1)}{9 \times 10 \times 11 \times \dots \times (n+1)}.$$

Exercice 5

Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à utiliser des pointillés :

1. $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n}$

2. $\sum_{k=0}^n \frac{k+1}{2}$

3. $\sum_{k=0}^n 2^k - 3^k$

4. $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k}$

5. $\sum_{k=50}^{100} k$

6. $\prod_{k=1}^n 2^{k+1}$

7. $\prod_{k=1}^n \frac{2^k}{k^2}$

8. $\sum_{k=0}^p \ln(k+1)$

9. $\sum_{k=5}^p \ln(k+3)$

10. $\prod_{k=5}^{n-1} 2\sqrt{k} k$

11. $2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots + 2^{2n} - 2^{2n+1}$

Exercice 6

1. Simplifier via un décalage d'indice :

(a) $\sum_{k=-2}^n (k+3)^2$

(b) $\sum_{k=5}^{n+5} 2^k$

2. Simplifier via un télescopage :

(a) $\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

(b) $\sum_{k=0}^n \sqrt{k+2} - \sqrt{k}$

Exercice 7

1. Simplifier via un retournement :

(a) $\sum_{k=0}^n \frac{e^n}{e^k}$

(b) $\prod_{k=1}^n (n+1-k)$

2. Simplifier via un télescopage :

(a) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

(b) $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Exercice 8

Remplacer les symboles “?” par la valeur correcte.

1. $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=?}^? a_j$
2. $\sum_{k=1}^n (k+1)a_k = \sum_{j=?}^? ja_j$
3. $\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} = \sum_{j=?}^? a_j$
4. $\sum_{k=2}^n (n-k)^3 = \sum_{j=?}^? j^3$

Exercice 9

1. Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$
3. Par une technique similaire, calculer

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}.$$

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme (dite harmonique) : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$

1. Montrer que la suite (H_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}. \text{ (On écrira } H_{2n} - H_n \text{ sous forme d'une somme).}$$
3. En déduire que $H_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. (On pourra utiliser qu'une suite croissante est soit convergente, soit tend vers $+\infty$).

Exercice 11

Soit n un entier naturel non nul, on considère la somme :

$$S = \sum_{k=0}^n \cos^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$$

Calculer S en effectuant le retournement $k' = n - k$.

Exercice 12

Pour $p \in \mathbb{N}$, que vaut : $p! \times (p+1)$?

Simplifier alors les expressions suivantes :

1. $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{(n+2)!}{n!}$
2. $\frac{(n+1)! - n!}{n}$
3. $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

Exercice 13

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

1. $\binom{7}{3}$
2. $\binom{n}{2}$
3. $\binom{23}{22}$
4. $\binom{130}{128}$

Exercice 14

Développez à l'aide du binôme de Newton et des premières lignes du triangle de Pascal les quantités :

1. $(a+b)^5$
2. $(1+x)^4$
3. $(1-x)^6$
4. $(2x-1)^3$

Exercice 15

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k-1}$
2. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}$
3. $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^k$
5. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{k-n}$
6. $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$

Exercice 16

Soient $0 \leq p \leq n$ des entiers.

1. Pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, montrer que :

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

2. À quoi correspond la formule ci-dessus lorsque $k = 1$?
3. Calculer $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$

Exercice 17

En utilisant la formule d'absorption, calculer pour $n \geq 2$:

1. $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
2. $T_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

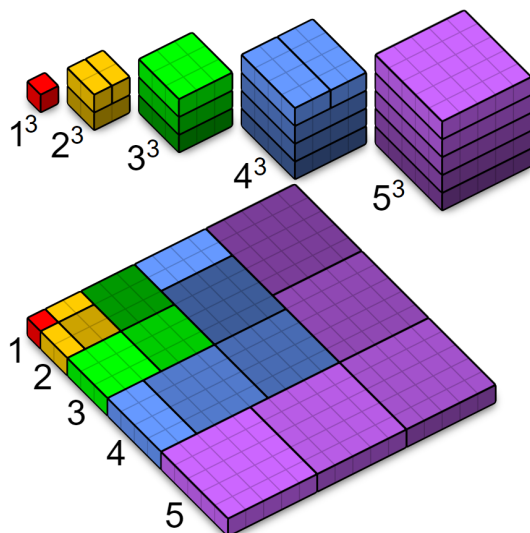
$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \in \mathbb{N}$$

Exercice 19

Calculer les valeurs de

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$$

On pourra s'intéresser aux quantités $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.

Exercice 20

Le dessin ci-contre illustre dans le cas $n = 5$ une égalité entre deux sommes de puissances d'entiers. On pourra consulter la version en couleur dans le fichier mis en ligne sur cahier de prépa.

De quelle égalité s'agit-il ? La démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.