

TD 2 exo 2

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

→ Tout d'abord pour $n=1$ on a d'une part

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1) = 1 \times 2 = 2 \quad \text{et d'autre part} \quad \frac{1 \times (1+1) \times (1+2)}{3} = 2$$

$k=1$ donc la formule est vraie au rang $n=1$.

Supposons ensuite que $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pour un

certain $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=1}^n k(k+1) \right) + (n+1)(n+1+1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3} \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.} \end{aligned}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \times (2n+1 + 3) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} . \end{aligned}$$