

Feuille de cours 2.2 : sommes doubles

Dans tout ce document, $n, p, n_0, n_1, p_0, p_1, \dots$ désignent des entiers ad hoc, et on considère pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ des nombres réels (ou complexes) $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1 Sommes doubles “rectangulaires”

Dans ce paragraphe, on cherche à calculer des sommes du type $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$. C'est-à-dire qu'on cherche à déterminer la somme de tous les $a_{i,j}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Notation : lorsque $n = p$ on note $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$

1.1 Principe de sommes imbriquées

Pour sommer les $a_{i,j}$ pour toutes les valeurs de i et de j , on somme d'abord les $a_{i,j}$ pour les différentes valeurs de j :

puis on somme le résultat obtenu pour les différentes valeurs de i :

Inversement, on peut commencer par sommer les valeurs pour l'indice i , puis ensuite pour l'indice j :

Enfinement :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} =$$

Remarque : Les indices ne commencent pas forcément à 1. Plus généralement, on a :

$$\sum_{\substack{n_0 \leq i \leq n_1 \\ p_0 \leq j \leq p_1}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n_1} \left(\sum_{j=p_0}^{p_1} a_{i,j} \right) = \sum_{j=p_0}^{p_1} \left(\sum_{i=n_0}^{n_1} a_{i,j} \right)$$

Plus généralement encore, on peut sommer sur des indices (i, j) appartenant à n'importe quel produit cartésien : $I \times J$ (c'est-à-dire pour tous les couples (i, j) avec $i \in I$ et $j \in J$) et alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

Remarque : Il faut ensuite utiliser les outils usuels des sommes simples, en particulier :

Si $a_{i,j} = \tilde{a}_j$ ne dépend pas de i on peut simplifier la somme $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_j =$

De même, Si $a_{i,j} = \tilde{a}_i$ ne dépend pas de j on peut simplifier la somme $\sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \tilde{a}_i =$

Exercice 1

Calculer $S_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} 1$, $S_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} i$, $S_3 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.

1.2 Cas des termes séparables

On s'intéresse au cas particulier où $a_{i,j}$ s'écrit $a_{i,j} = a_i b_j$.

Proposition 1

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On a :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^p b_j \right)$$

Démonstration :

Exercice 2

Écrire sous forme d'une somme double : $\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

Exercice 3

Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $S_5 = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a^{i+j}$, $S_6 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p}} i a^j$.

2 Sommes doubles “triangulaires”

On se place dans le cas “carré” $n = p$. On range les nombres $a_{i,j}$ dans un tableau (à n lignes et n colonnes). Le nombre $a_{i,j}$ est placé ligne i colonne j .

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On souhaite calculer la somme des coefficients du tableau placés au-dessus ou en-dessous de la diagonale (diagonale incluse), c’est-à-dire les sommes :

- $\sum a_{i,j}$ (termes au-dessus de la diagonale), ou
- $\sum a_{i,j}$ (termes en-dessous de la diagonale).

Dans la suite, on s’intéresse à la deuxième somme, les résultats sont bien sûr similaires dans le cas de la première.

2.1 Principe de sommes imbriquées

Comme précédemment, pour calculer ces sommes doubles, on écrit deux sommes imbriquées (une sur i , l’autre sur j). La différence avec le cas précédent vient alors du fait que les indices i et j ne sont plus indépendants puisqu’il faut prendre en compte la condition :

Ainsi, si on écrit $\sum_{i=1}^n$ alors la somme sur j doit s’écrire $\sum$

Inversement si on écrit $\sum_{j=1}^n$ alors la somme sur i doit s’écrire $\sum$

Finalement : $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} =$

Exercice 4

Calculer $S = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1$.

Important : Attention, la somme à l'intérieur dépend de l'indice de la somme à l'extérieur. Contrairement aux sommes "rectangulaires" il ne suffit donc pas d'échanger les deux symboles sommes. En particulier, les égalités :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^i \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij} = \sum_{i=j}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

sont fausses (et n'ont aucun sens!).

Généralisations : De manière plus générale, pour $m, n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\sum_{m \leq k \leq \ell \leq n} a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,\ell}$$

On peut aussi traiter des inégalités strictes (cas où la diagonale " $i = j$ " est exclue) :

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

Exercice 5

Calculer $T = \sum_{1 \leq j < i \leq n} 1$.

2.2 Méthodes

Il faut ensuite utiliser les outils usuels des sommes simples, en particulier :

- Si $a_{i,j} = \tilde{a}_i$ ne dépend pas de j on peut simplifier la somme $\sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^i \tilde{a}_i =$
- Si $a_{i,j} = \tilde{a}_j$ ne dépend pas de i on peut simplifier la somme $\sum_{i=j}^n a_{i,j} = \sum_{i=j}^n \tilde{a}_j =$

Cette utilisation est un peu plus subtile que dans le cas “rectangulaire” car l’indice dont dépend $a_{i,j}$ peut lui-même être une borne...

Important : Le choix de l’ordre de sommation devient donc ici une étape essentielle du calcul : choisir le bon ordre simplifie (voire rend possible) le calcul de la somme.

Exercice 6

Écrire les deux ordres de sommations possibles pour calculer les sommes suivantes, choisir le

bon, et terminer le calcul : $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j}$, et $S_2 = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

Pour conclure, certaines sommes “rectangulaires” se prêtent particulièrement à un “découpage” en sommes “triangulaires”. On écrit alors par exemple que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j}$$

Exercice 7

Calculer $S_4 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$ et $S_5 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

Exercice 8

Calculer les sommes suivantes pour $n, p \in \mathbb{N}^*$:

$$1. S_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 j$$

$$2. S_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} 2^{i-j}$$

Exercice 9

Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1. S_1 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

$$3. S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n-i}$$

$$5. S_5 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i^2}{j^2 - j}$$

$$2. S_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \binom{n}{j}$$

$$4. S_4 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$$

$$6. S_6 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i-j}$$

Exercice 10

Pour $n \geq 1$ on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = \sum_{k=1}^n H_k$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = (n+1)H_n - n$.