

Conformément au programme de PCSI, on présente ici la résolution de systèmes linéaires de petite taille, c'est-à-dire contenant au maximum 3 équations et 3 inconnues. On renvoie à un chapitre ultérieur pour la présentation de l'algorithme du pivot de Gauss sur un système linéaire quelconque.

On s'intéresse aux systèmes linéaires, c'est-à-dire aux systèmes d'équations du type

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont les *coefficients* du système, les $b_j \in \mathbb{R}$ forment son *second membre*, et où $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sont les *inconnues*.

Par exemple, pour $n = 2$ et $p = 3$ on peut s'intéresser un système de 2 équations et 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + \quad + z = 4 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on peut procéder par *substitution*, c'est-à-dire en écrivant :

Dans ce document, on propose plutôt de procéder par *combinaison*, c'est-à-dire en faisant des opérations entre les lignes.

1 Opérations sur les lignes

On appelle *opérations élémentaires sur les lignes* du système les opérations suivantes :

- La *permutation* de deux lignes.
On note $L_i \leftrightarrow L_j$ la permutation des lignes L_i et L_j .
- La multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (ou *dilatation*).
On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ la multiplication de la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre (ou *transvection*).
On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ l'ajout à la ligne L_i de λL_j avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lorsqu'on effectue une de ces opérations sur un système linéaire, le système obtenu lui est équivalent, il a les mêmes solutions. On peut donc chercher à faire une suite d'opérations de ce type pour résoudre le système.

La stratégie à appliquer (appelée "*algorithme du pivot de Gauss*" et que nous ne décrirons entièrement que plus tard) consiste essentiellement à utiliser des lignes pour supprimer les inconnues des lignes inférieures. On présente ci-dessous différents exemples qu'il faut savoir adapter dans des situations similaires.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants.

$$1. \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x - y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

2 Ensemble des solutions

Dans le système linéaire général considéré en introduction :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

il y a p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$. Une solution de ce système est donc un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$. Ainsi lorsqu'on donnera l'ensemble des solutions, il faudra bien s'assurer de mettre des parenthèses et de placer les inconnues dans le bon ordre.

Souvent, en appliquant les opérations élémentaire à un système linéaire, il arrive qu'une ligne finisse par ne plus contenir d'inconnue, on parle d'*équation de compatibilité*. Si l'équation obtenue est fausse (c'est-à-dire du type $0 = 1$) alors l'ensemble des solutions est simplement :

Exercice 2

Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + \quad + 3z = 4 \end{cases}$$

A l'inverse, un système linéaire peut avoir une infinité de solutions. Ces solutions sont alors décrites en fonction d'une variable muette (correspondant en fait à une des inconnues, on parle d'*inconnue auxiliaire*). Il faut alors indiquer cette variable comme paramètre dans l'ensemble des solutions.

Exercice 3

Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants.

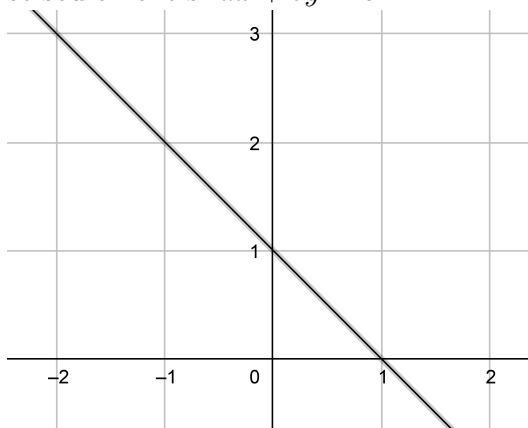
$$\begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & = & 5 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right. & \left| \right. & 3. \left\{ \begin{array}{rclcl} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & z & = & 4 \end{array} \right. \\ 2. \left\{ \begin{array}{rclcl} & & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array} \right. & \left| \right. & 4. \left\{ \begin{array}{rclcl} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & & & + & z & = & 3 \end{array} \right. \end{array}$$

3 Interprétation géométrique

3.1 Dans le plan

Dans le plan, une équation linéaire du type $ax + by = c$ où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$. Cela signifie qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $ax + by = c$.

Exemple : $x + y = 1$ est l'équation de la droite $\mathcal{D}$ tracée ci-contre.



Remarque :

- le cas $a = 0$ correspond à une droite
- le cas $b = 0$ correspond à une droite

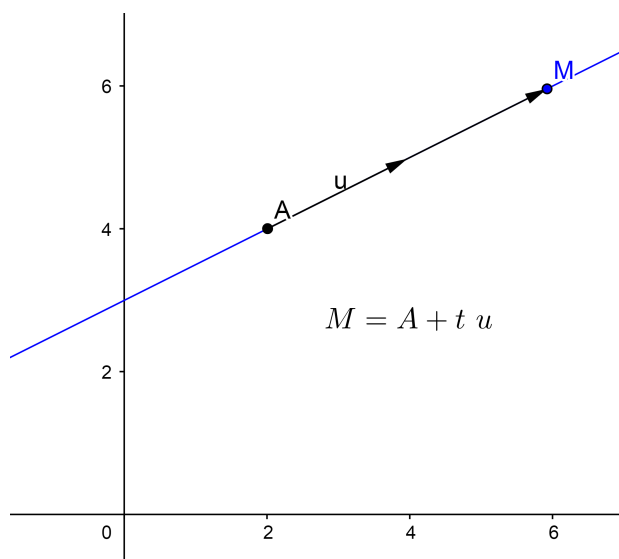
Équation paramétrique : Toute droite $\mathcal{D}$ du plan admet une équation dite paramétrique sous la forme :

$$\mathcal{D} = \{A + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}\}$$

où A est un point de la droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur (non nul).

Exemple : la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x + y = 1$ admet la représentation paramétrique suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{(x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 1) + t(1, -1), t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$



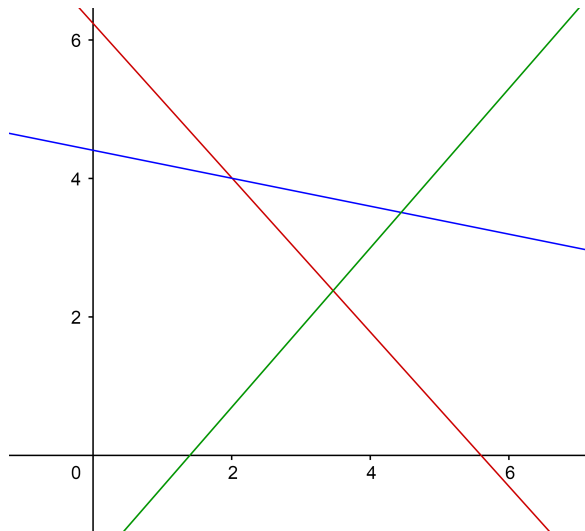
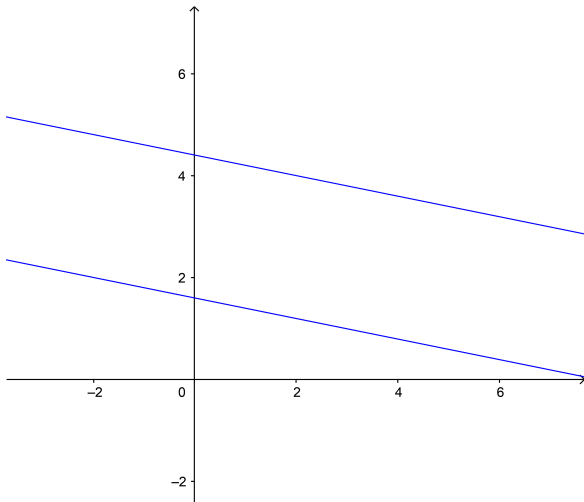
Résoudre un système linéaire à $p = 2$ inconnues et n équations du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny = c_n \end{cases}$$

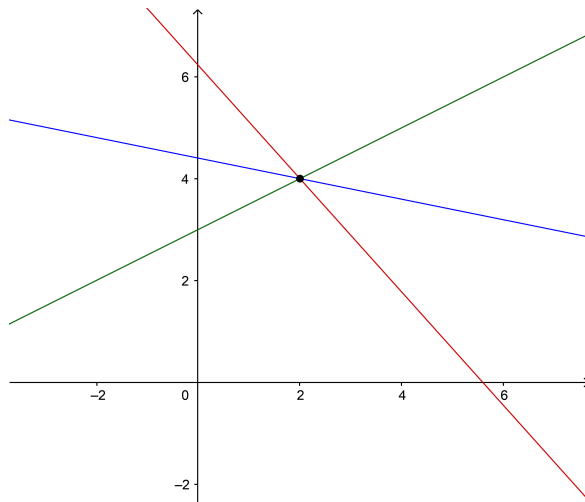
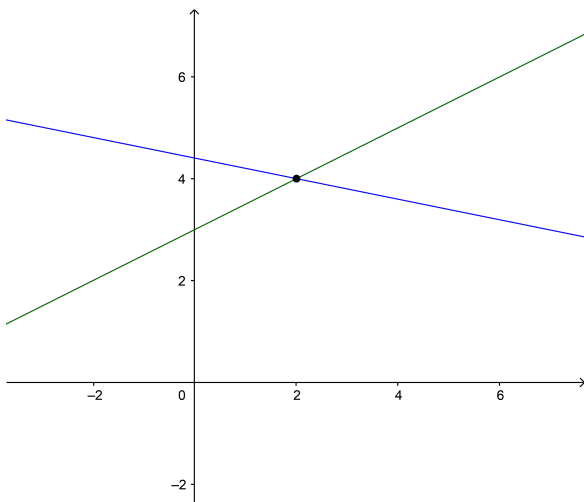
c'est déterminer l'ensemble des couples (x, y) satisfaisant ces n équations simultanément. Cela revient donc à déterminer l'intersection des n droites d'équations cartésiennes $a_kx + b_ky = c_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Différentes intersections sont alors possibles :

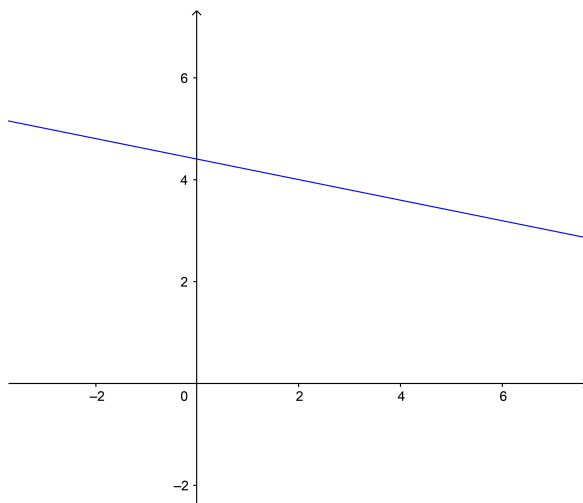
L'ensemble vide :



Un point :



Une droite :



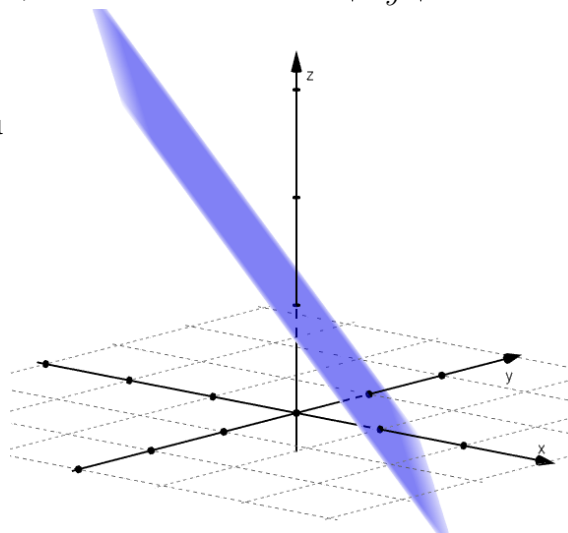
3.2 Dans l'espace

Dans l'espace, une équation linéaire du type $ax + by + cz = d$ où a, b, c et d sont quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est l'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$. Cela signifie qu'un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $ax + by + cz = d$.

Exemple : $x + y + z = 1$ est l'équation du plan $\mathcal{P}$ dessiné ci-contre.

Remarque :

- le cas $a = b = 0$ correspond à un plan
- le cas $c = 0$ correspond à un plan

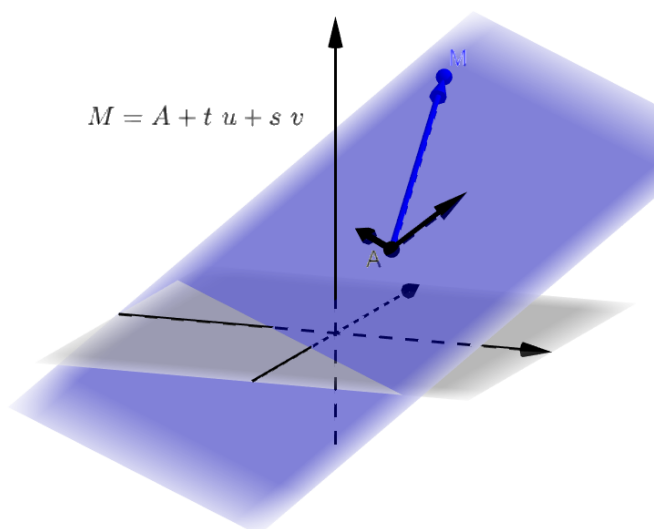


Équation paramétrique : Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet une équation dite paramétrique sous la forme :

$$\mathcal{P} = \{A + t\vec{u} + s\vec{v}, t, s \in \mathbb{R}\}$$

où A est un point du plan et $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs (non proportionnels).

Exemple : le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ admet l'équation paramétrique



$$\mathcal{P} = \{(x, y, 1 - x - y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, 1) + t(1, 0, -1) + s(0, 1, -1), t, s \in \mathbb{R}\}$$

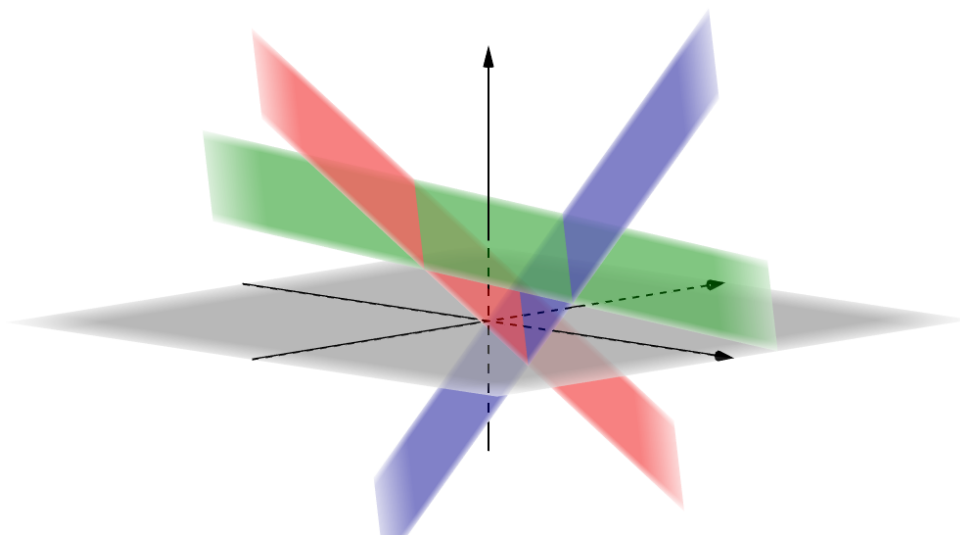
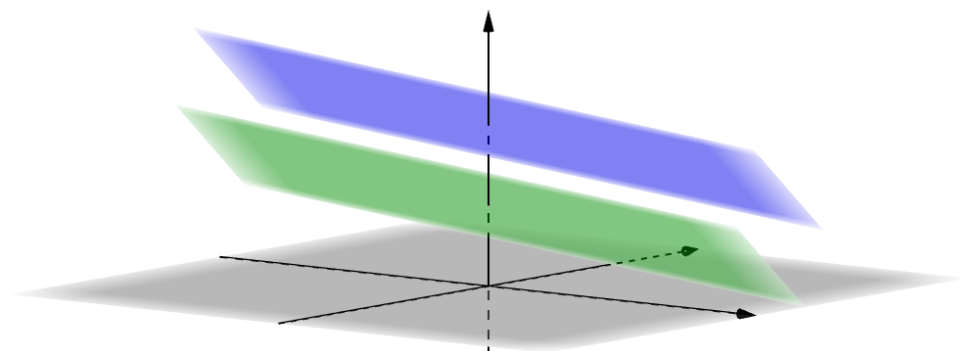
Résoudre un système linéaire à $p = 3$ inconnues et n équations du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz = d_n \end{cases}$$

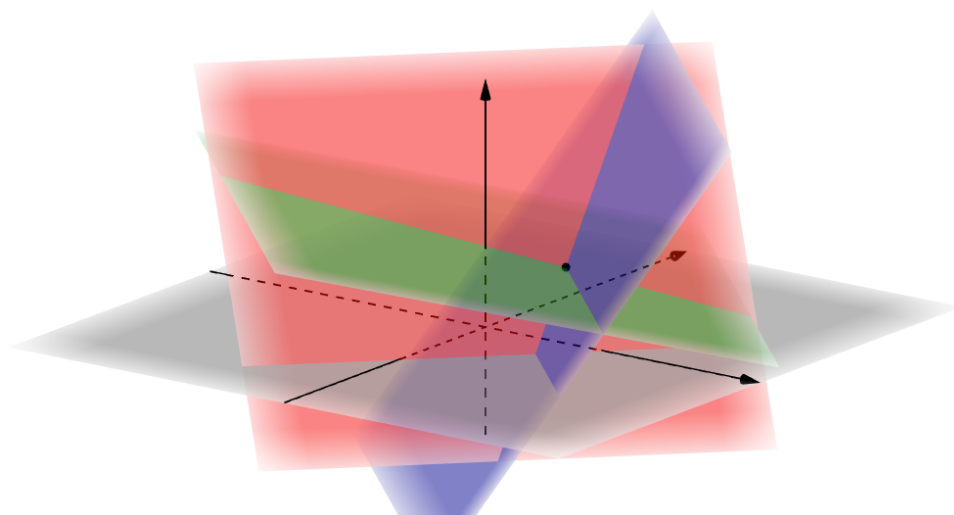
c'est déterminer l'ensemble des triplets (x, y, z) satisfaisant ces n équations simultanément. Cela revient donc à déterminer l'intersection des n plans d'équations cartésiennes $a_kx + b_ky + c_kz = d_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Différentes intersections sont alors possibles :

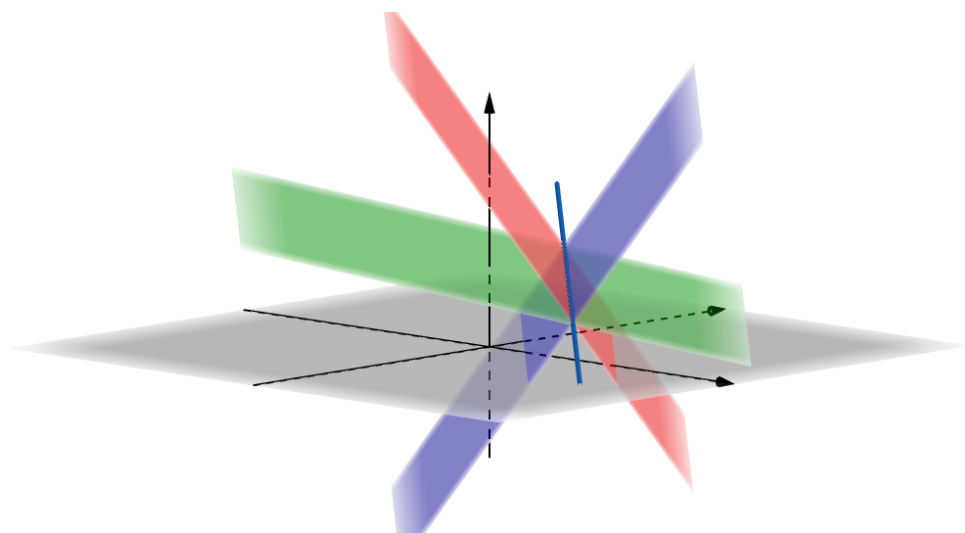
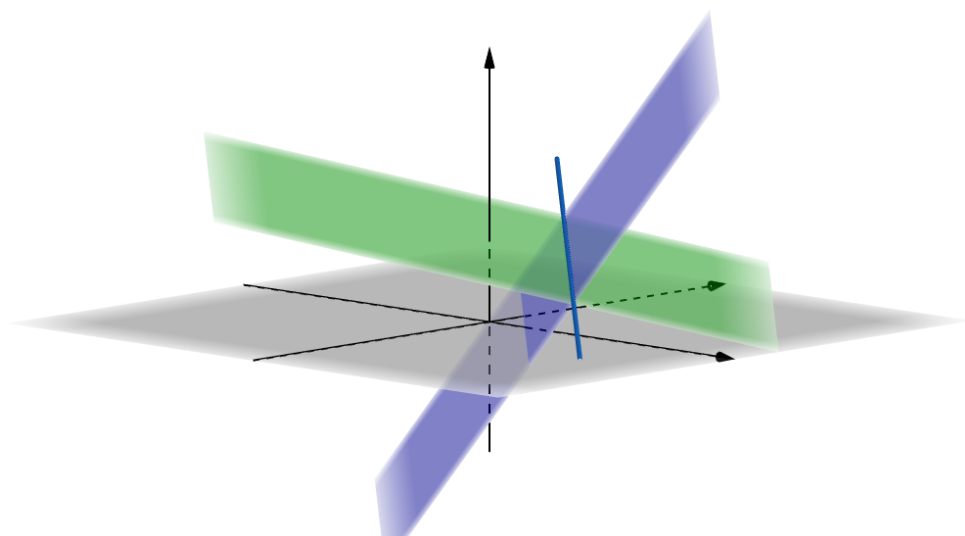
L'ensemble vide :



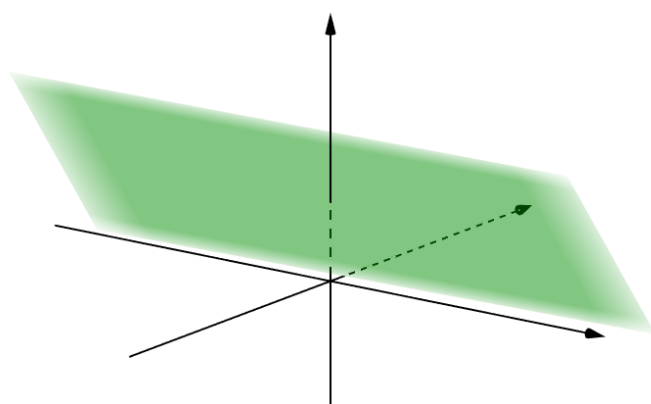
Un point :



Une droite :



Un plan :



Exercice 5

Soient les points suivants du plan : $A(0, 1)$, $B(2, 2)$, $C(0, 2)$ et $D(1, 0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (CD) .
2. Déterminer l'intersection de (AB) et (CD) .
3. Vérifier le résultat précédent à l'aide d'un schéma.