

Programme de colles : semaine 1, du 21/09 au 25/09

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Logique

- assertions avec des quantificateurs
- connecteurs logiques ou, et, non, implique, équivaut
- négation d'une assertion avec des quantificateurs
- raisonnement par récurrence, récurrences double et forte.
- principe d'exemple et de contre-exemple pour prouver une propriété du type " $\exists x \in E : \mathcal{P}(x)$ " ou nier une propriété du type " $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ "
- principe pour prouver une propriété du type " $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ " ("soit $x \in E$ alors ... donc $\mathcal{P}(x)$ ")
- principe de double implication pour prouver une équivalence

- principe de contraposition pour prouver une implication
- raisonnement par l'absurde
- raisonnement par analyse-synthèse

2 Suites usuelles

- suites arithmétiques, géométriques, limites de telles suites. *La somme des termes successifs de telles suites n'a pas été abordée.*
- suites arithmético-géométriques. *La méthode de détermination du terme général doit être connue.*
- exemples d'utilisation de suites auxiliaires pour se ramener à des suites usuelles
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2. **Attention, pas de discriminant strictement négatif**

3 Sommes et produits

- symboles $\sum$ et $\prod$, caractère muet de l'indice de sommation, convention $\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$.
- exemple de la factorielle
- règles de calcul : linéarité de la somme, somme d'une constante, formules analogues pour les produits
- $\exp\left(\sum_{k=p}^n a_k\right) = \prod_{k=p}^n \exp(a_k)$ et $\ln\left(\prod_{k=p}^n b_k\right) = \sum_{k=p}^n \ln(b_k)$
- démonstration d'une valeur de somme/produit par récurrence
- découpage : relation de Chasles, exemples : écriture de $\prod_{k=p}^n k$ avec des factorielles, formules pour $\sum_{k=m}^n q^k$ et $\sum_{k=m}^n k$. *Ces deux dernières formules ne sont pas à connaître par cœur mais doivent pouvoir être retrouvées sans difficulté.*
- décalage : $\sum_{k=p}^n a_{k+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$, formule analogue pour le produit
- télescopage : $\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$, $\prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$, exemple : calcul de la somme géométrique. *On conseille aux élèves de revenir au changement d'indice $j = k + 1$ avant de simplifier une somme ou un produit télescopique.*
- retournement : $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{n-j}$, formule analogue pour le produit, exemple : calcul de $\sum_{k=0}^n k$
- coefficients binomiaux, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$. *L'interprétation combinatoire de ces coefficients n'a pas été abordée en classe.*

- formule de symétrie : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, d'absorption : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ et de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
 - triangle de Pascal
 - formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, exemple : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
 - formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
 - sommes doubles rectangulaires : $\sum_{\substack{n_0 \leq i \leq n_1 \\ p_0 \leq j \leq p_1}}$.
 - On note $\sum_{n_0 \leq i, j \leq n_1} = \sum_{\substack{n_0 \leq i \leq n_1 \\ n_0 \leq j \leq n_1}}$
 - cas des termes séparables pour les sommes rectangulaires : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j = (\sum_{i=1}^n a_i) \times (\sum_{j=1}^p b_j)$
 - sommes triangulaires : $\sum_{n_0 \leq i \leq j \leq n_1}$ et triangulaires strictes $\sum_{n_0 \leq i < j \leq n_1}$
 - choix judicieux de l'ordre de sommation : exemple du calcul de $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j}$
 - séparation d'une somme rectangulaire en sommes triangulaires : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j}$.
- Exemple : calcul de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.
2. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux assertions, que sont la contraposée et la réciproque de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$?
3. Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.
4. Donner la définition d'une suite arithmétique (ou géométrique) $(u_n)_{n \geq 0}$, puis donner et démontrer la formule donnant l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n .
5. Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ en fonction de $q \in \mathbb{R}$ et illustrer chacun des quatre cas $q > 1$, $0 < q < 1$, $-1 < q < 0$ et $q < -1$ par un schéma.
6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n si (u_n) est une suite arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 2 choisie par l'examineur. **Attention, pas de discriminant strictement négatif**
7. Énoncer la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ puis la démontrer par récurrence.
8. Énoncer la valeur de $S = \sum_{k=0}^n q^k$ puis la démontrer dans le cas $q \neq 1$ en considérant $(1-q)S$.
9. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer une des formules parmi : symétrie, absorption, Pascal.
10. Énoncer la formule du binôme de Newton, puis développer rapidement $(1+x)^5$ et $(x-1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examineur).

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type révision" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités en :

- Révision 1.2, exos 1 et 2 : <https://cahier-de-prepa.fr/pcs11-decour/download?id=863&v=0204d>

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.