

Mathématiques - samedi 19 septembre 2026
Devoir n°1 Durée : 3h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) et le respect des consignes de présentation (encadrement, pagination...) représenteront entre 5 et 10% de la note finale.**
- **Le sujet comporte 2 pages et 3 exercices, ainsi qu'un exercice bonus hors barème.**

Exercice 1.

On étudie la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2}.$$

On introduit de plus la suite (y_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{x_n + 3}.$

1. En utilisant une récurrence, démontrer que la suite (x_n) est bien définie. En déduire que (y_n) est bien définie.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = \frac{1 - y_n}{3}.$
3. En déduire l'expression de y_n puis celle de x_n en fonction de n .
4. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Exercice 2.

On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$.
Calculer y_0 et y_1 et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n$.
2. Démontrer qu'il existe un réel α tel que la suite (t_n) de terme général $t_n = \alpha 2^n$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n = 2^n.$$

On précisera la valeur de α .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = y_n - t_n$.
(a) Démontrer que la suite (r_n) vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_{n+2} - r_{n+1} - 6r_n = 0.$$

- (b) En déduire l'expression de r_n puis celle de y_n en fonction de n .

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$ et en déduire l'expression de x_n en fonction de n .

Exercice 3.

Dans cet exercice on s'intéresse aux valeurs des sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_0(n) = \sum_{k=0}^n 1 \quad ; \quad S_1(n) = \sum_{k=0}^n k \quad ; \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^n k^2 \quad \text{et} \quad S_3(n) = \sum_{k=0}^n k^3.$$

1. Donner sans démonstration les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on démontre selon trois méthodes indépendantes le résultat (*) suivant :

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. *Via un retournement.*

(a) Démontrer que $S_3(n) = \sum_{k=0}^n (n-k)^3$.

(b) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ développer la quantité $(n-k)^3$.

(c) En déduire que $2S_3(n) = n^3 S_0(n) - 3n^2 S_1(n) + 3n S_2(n)$ puis utiliser la question 1. pour obtenir le résultat (*).

3. *Via un télescopage.*

On introduit la somme $T(n) = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4)$.

(a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ développer et simplifier l'expression $(k+1)^4 - k^4$.

(b) En déduire l'expression de $T(n)$ en fonction des sommes $S_i(n)$ pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

(c) Simplifier la somme $T(n)$ puis retrouver le résultat (*).

4. *Via une somme de nombres impairs.*

En 1854, le physicien Charles Wheatstone donne une preuve du résultat (*) s'appuyant sur le tableau triangulaire ci-contre. Dans ce tableau, seuls des nombres impairs apparaissent, et on remarque que la somme des nombres placés sur la k -ème ligne vaut k^3 .

La somme $S_3(n)$ sera donc égale à la somme de tous les nombres présents dans ce tableau jusqu'à la n -ème ligne, ce qui permet de la calculer.

1	...	$1 = 1^3$
3 + 5	...	$8 = 2^3$
7 + 9 + 11	...	$27 = 3^3$
13 + 15 + 17 + 19	...	$64 = 4^3$
21 + 23 + 25 + 27 + 29	...	$125 = 5^3$
31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41	...	$216 = 6^3$

(a) Démontrer que pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, on a $\sum_{j=p}^q (2j-1) = q^2 - (p-1)^2$.

(b) Expliquer pourquoi la somme des nombres placés sur la k -ème ligne du tableau présenté ci-dessus est donnée par $L_k = \sum_{j=S_1(k-1)+1}^{S_1(k)} (2j-1)$ où S_1 désigne toujours la somme introduite au début de l'exercice.

(c) En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $L_k = k^3$.

(d) En utilisant que $S_3(n) = \sum_{k=1}^n L_k$, retrouver le résultat (*).

Exercice 4 (Question bonus). *Cette question bonus sera corrigée uniquement si les consignes de présentation ont été scrupuleusement respectées dans toute la copie.*

Quelles sont les suites à la fois arithmétiques et géométriques ?