

CORRIGÉ

Mathématiques - samedi 19 septembre 2026
Devoir n°1 Durée : 3h

Exercice 1.

1. Pour montrer que (x_n) est bien définie, il faut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -2$.

Montrons en fait par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.

Tout d'abord, pour $n = 0, x_0 = 5 > 0$.

Supposons ensuite que $x_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_n + 2 > 0$ et donc $\frac{3}{x_n + 2} > 0$, donc $x_{n+1} > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0}$, a fortiori $x_n \neq -2$.

Pour finir, comme pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$, on a $x_n \neq -3$.

Cela implique que $\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est correctement définie.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule que :

$$y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1} + 3} = \frac{1}{\frac{3}{x_n + 2} + 3} = \frac{x_n + 2}{3 + 3(x_n + 2)} = \frac{1}{3} \times \frac{x_n + 2}{x_n + 3}$$

Donc :

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{(x_n + 3) - 1}{x_n + 3} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{x_n + 3}\right) = \frac{1}{3} \times (1 - y_n)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{1 - y_n}{3}}$$

3. On reconnaît que (y_n) est une suite arithmético-géométrique.

On résout donc pour $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\ell = \frac{1 - \ell}{3} \iff 3\ell = 1 - \ell \iff 4\ell = 1 \iff \ell = \frac{1}{4}$$

On introduit alors la suite $(v_n) = \left(y_n - \frac{1}{4}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule que :

$$v_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1 - y_n}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \left(1 - y_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \left(-y_n + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3} \times \left(y_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme :

$$v_0 = y_0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{x_0 + 3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5 + 3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, et donc $y_n = v_n + \frac{1}{4}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Dès lors, comme $y_n = \frac{1}{x_n + 3}$, on a $x_n + 3 = \frac{1}{y_n}$, donc :

$$x_n = \frac{1}{y_n} - 3 = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 3$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{8}{2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 3}$$

4. Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{8}{2 - 0} - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1}$$

Exercice 2.

1. On a $y_0 = x_1 - x_0 = 3 - 0 = 3$: $\boxed{y_0 = 3}$

Puis $y_1 = x_2 - x_1 = 1 - 3 = -2$: $\boxed{y_1 = -2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n &= (x_{n+3} - x_{n+2}) - (x_{n+2} - x_{n+1}) - 6(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n}$

2. Après calculs au brouillon, il semble que $\alpha = -\frac{1}{4}$ convienne. Vérifions-le.

On pose $\alpha = -\frac{1}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n &= -\frac{1}{4} \times 2^{n+2} - \left(-\frac{1}{4}\right) \times 2^{n+1} - 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times 2^n \\ &= -2^n + \frac{1}{2} \times 2^n + \frac{3}{2} \times 2^n \\ &= \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{4}$, la suite (t_n) de terme général $t_n = \alpha 2^n$ vérifie bien la relation donnée.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait que : $y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n$ (puisque ces deux quantités sont égales à 2^n).

Cela implique que $(y_{n+2} - t_{n+2}) - (y_{n+1} - t_{n+1}) - 6(y_n - t_n) = 0$ soit finalement :

$\boxed{(r_n) \text{ vérifie la relation : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad r_{n+2} - r_{n+1} - 6r_n = 0}$

(b) • Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 est $X^2 - X - 6$.

Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$, donc il admet deux racines

$$r_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } r_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

• On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \lambda \times (-2)^n + \mu \times 3^n$.

• On détermine alors λ et μ grâce aux valeurs initiales.

On sait que :

$$r_0 = y_0 - t_0 = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) \times 2^0 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$r_1 = y_1 - t_1 = -2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \times 2^1 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

On résout donc le système :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{13}{4} \\ -2\lambda + 3\mu = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{13}{4} \\ 5\mu = -\frac{3}{2} + 2 \times \frac{13}{4} = 5 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda = \frac{13}{4} - \mu = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4} \\ \mu = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{9}{4} \times (-2)^n + 3^n \quad \text{et} \quad y_n = \frac{9}{4} \times (-2)^n + 3^n - \frac{1}{4} \times 2^n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une somme télescopique fournit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = x_n$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{9}{4} \times (-2)^k + 3^k - \frac{1}{4} \times 2^k \right) \\ &= \frac{9}{4} \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k && \text{(par linéarité)} \\ &= \frac{9}{4} \times \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} + \frac{1 - 3^n}{1 - 3} - \frac{1}{4} \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} && \text{(sommes géométriques)} \\ &= \frac{9}{4} \times \frac{1 - (-2)^n}{3} + \frac{1 - 3^n}{-2} - \frac{1}{4} \times \frac{1 - 2^n}{-1} \\ &= \frac{3}{4} (1 - (-2)^n) - \frac{1}{2} (1 - 3^n) + \frac{1}{4} (1 - 2^n) \\ &= -\frac{3}{4} \times (-2)^n + \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{4} \times 2^n + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = -\frac{3}{4} \times (-2)^n + \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{4} \times 2^n + \frac{1}{2}}$

Exercice 3.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{S_0(n) = n + 1}, \quad \boxed{S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2. (a) Via le changement d'indice $j = n - k$, on a, puisque $k^3 = (n - j)^3$ et que $0 \leq k \leq n \iff 0 \leq n - k \leq n$:

$$S_3(n) = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{j=0}^n (n - j)^3$$

Puisque l'indice de sommation est muet, on peut renommer j en k :

$$\boxed{S_3(n) = \sum_{k=0}^n (n - k)^3}$$

(b) On calcule que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (n - k)^3 &= (n^2 - 2kn + k^2)(n - k) \\ &= n^3 - 2kn^2 + k^2n - kn^2 + 2k^2n - k^3 \\ &= n^3 - 3kn^2 + 3k^2n - k^3 \end{aligned}$$

(c) D'après les questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \sum_{k=0}^n (n - k)^3 = \sum_{k=0}^n (n^3 - 3kn^2 + 3k^2n - k^3) \\ &= \sum_{k=0}^n n^3 - 3n^2 \sum_{k=0}^n k + 3n \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k^3 \\ &= n^3 S_0(n) - 3n^2 S_1(n) + 3n S_2(n) - S_3(n) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2S_3(n) &= n^3 S_0(n) - 3n^2 S_1(n) + 3n S_2(n) \\ &= n^3(n+1) - 3n^2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} \times [2n - 3n + (2n+1)] \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

3. (a) On calcule que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (k+1)^4 - k^4 &= (k+1)^2(k+1)^2 - k^4 \\ &= (k^2 + 2k + 1)(k^2 + 2k + 1) - k^4 \\ &= k^4 + 2k^3 + k^2 + 2k^3 + 4k^2 + 2k + k^2 + 2k + 1 - k^4 \\ &= \boxed{4k^3 + 6k^2 + 4k + 1} \end{aligned}$$

(b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) \\ &= \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\ &= \boxed{4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n)} \end{aligned}$$

(c) Par télescopage on a donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$T(n) = \sum_{k=0}^n (k+1)^4 - \sum_{k=0}^n k^4 = \sum_{k=1}^{n+1} k^4 - \sum_{k=0}^n k^4 = (n+1)^4 - 0^4 = \boxed{(n+1)^4}$$

Dès lors, en utilisant la question b) :

$$(n+1)^4 = T(n) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n)$$

donc :

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4} ((n+1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - S_0(n)) \\ &= \frac{1}{4} ((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)) \\ &= \frac{n+1}{4} ((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) \\ &= \frac{n+1}{4} ((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} ((n+1)^2 - (2n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2 n^2}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

4. (a) Soient $p \leq q$ deux entiers naturels.

$$\begin{aligned} \sum_{j=p}^q (2j-1) &= 2 \sum_{j=p}^q j - \sum_{j=p}^q 1 \\ &= 2 \left(\sum_{j=0}^q j - \sum_{j=0}^{p-1} j \right) - \sum_{j=p}^q 1 \quad (\text{par découpage}) \\ &= 2 \left(\frac{q(q+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} \right) - (q-p+1) \\ &= q^2 + q - (p^2 - p) - q + p - 1 \\ &= q^2 - (p^2 - 2p + 1) \\ &= \boxed{q^2 - (p-1)^2} \end{aligned}$$

(b) Le tableau ne contenant que des nombres impairs, la somme peut en effet s'écrire sous la forme $\sum (2j-1)$; reste à déterminer quelles sont les bornes de cette somme.

Remarquons que le terme $j=1$ correspond au 1^{er} nombre impair ($2 \times 1 - 1 = 1$), le terme $j=2$ au 2^e ($2 \times 2 - 1 = 3$), etc. Ainsi, pour savoir quelles sont les bornes de la somme L_k ,

il faut savoir quels sont les « numéros » des nombres impairs apparaissant sur la k -ième ligne.

Comme il y a exactement i nombres sur la i -ième ligne, les $(k - 1)$ premières lignes du tableau contiennent en tout :

$$\sum_{i=1}^{k-1} i = S_1(k - 1) \quad \text{nombres.}$$

En conséquence, le 1^{er} nombre impair de la k -ième ligne est donc celui correspondant à $j = S_1(k - 1) + 1$.

Comme il y a k nombres sur la k -ième ligne, le dernier nombre de cette ligne est celui correspondant à :

$$j = S_1(k - 1) + 1 + k - 1 = S_1(k - 1) + k = S_1(k)$$

Ainsi :

$$L_k = \sum_{j=S_1(k-1)+1}^{S_1(k)} (2j - 1)$$

(c) En utilisant la question a), on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} L_k &= (S_1(k))^2 - (S_1(k - 1) + 1 - 1)^2 \\ &= \left(\frac{k(k + 1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{(k - 1)k}{2} \right)^2 \\ &= \frac{k^2}{4} ((k + 1)^2 - (k - 1)^2) \\ &= \frac{k^2}{4} (k^2 + 2k + 1 - (k^2 - 2k + 1)) \\ &= \frac{k^2}{4} \times 4k \end{aligned}$$

$$L_k = k^3$$

(d) En utilisant la relation $S_3(n) = \sum_{k=1}^n L_k$, on a :

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=S_1(k-1)+1}^{S_1(k)} (2j - 1) \right) \\ &= \sum_{j=S_1(0)+1}^{S_1(1)} (2j - 1) + \sum_{j=S_1(1)+1}^{S_1(2)} (2j - 1) + \cdots + \sum_{j=S_1(n-1)+1}^{S_1(n)} (2j - 1) \\ &= \sum_{j=1}^{S_1(n)} (2j - 1) = \sum_{j=1}^{n(n+1)/2} (2j - 1) \end{aligned}$$

Et d'après la question a) avec $p = 1$ et $q = \frac{n(n + 1)}{2}$:

$$S_3(n) = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2 - (1 - 1)^2$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Exercice 4 (Question bonus).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Par définition :

- (u_n) est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
- (u_n) est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$.

Supposons que (u_n) soit à la fois arithmétique de raison r et géométrique de raison q .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$u_n + r = q u_n$$

Distinguons deux cas selon la valeur du premier terme u_0 :

- **Premier cas** : $u_0 = 0$

Pour $n = 0$, l'égalité donne : $u_1 = 0 + r = q \times 0 = 0$ donc $r = 0$.

Comme $r = 0$, la suite est constante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Réciproquement, la suite nulle est bien arithmétique de raison $r = 0$ et géométrique de raison q (pour tout $q \in \mathbb{R}$).

- **Second cas** : $u_0 \neq 0$

Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit : $u_0 + r = q u_0 \iff r = (q - 1)u_0$.

Pour $n = 1$, de même : $u_1 + r = q u_1$. Or, $u_1 = q u_0$, donc :

$$q u_0 + r = q^2 u_0$$

En remplaçant r par $(q - 1)u_0$, on obtient :

$$q u_0 + (q - 1)u_0 = q^2 u_0 \iff (q^2 - 2q + 1)u_0 = 0 \iff (q - 1)^2 u_0 = 0$$

Comme $u_0 \neq 0$, ceci impose $(q - 1)^2 = 0$, c'est-à-dire $q = 1$.

On en déduit alors $r = (1 - 1)u_0 = 0$.

Ainsi, $r = 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

Réciproquement, toute suite constante non nulle $u_n = c$ ($c \neq 0$) est arithmétique de raison $r = 0$ et géométrique de raison $q = 1$.

Conclusion :

Les suites à la fois arithmétiques et géométriques sont les suites constantes.