

Exercice 8

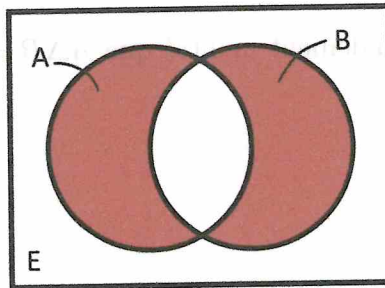
Soit E un ensemble. Pour A, B deux parties de E on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

1. Représenter $A \Delta B$ sur un dessin.
2. Pour une partie $A \in \mathcal{P}(E)$ quelconque, que vaut $A \Delta E$? $A \Delta A$?
3. Montrer que pour toutes parties A, B de E on a $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
On reviendra à la définition de $I \setminus J$.

Solution :

1. $A \Delta B$ est la partie en rouge sur le schéma ci-dessous :



2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$A \Delta E = (A \cap \overline{E}) \cup (\overline{A} \cap E) = (A \cap \emptyset) \cup \overline{A} = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$$

$$A \Delta A = (A \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Solution 1 : par calcul direct.

Par définition de la différence on a $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

Puis d'après les lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Enfin en utilisant les règles de distributivité de l'union et l'intersection on obtient finalement :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

Solution 2 : par double inclusion.

Montrons que $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$: Soit $x \in A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ alors $x \in A \cap \overline{B}$ ou $x \in \overline{A} \cap B$. Traitons les deux cas :

- Si $x \in A \cap \overline{B}$ alors $x \in A$ donc $x \in A \cup B$; et $x \in \overline{B}$ donc $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$.
Ainsi $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Si $x \in \overline{A} \cap B$ alors $x \in \overline{A}$ donc $x \notin A$ donc $x \notin A \cap B$; et $x \in B$ donc $x \in A \cup B$.
Ainsi $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Dans tous les cas on a $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Finalement cela prouve bien que $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Montrons que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$: Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A$ ou $x \in B$. Traitons les deux cas en nous servant du fait qu'on a aussi $x \notin A \cap B$:

- Si $x \in A$ alors, puisque $x \notin A \cap B$, on a $x \notin B$ i.e. $x \in \overline{B}$. Ainsi $x \in A \cap \overline{B}$ et donc $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
- Si $x \in B$ alors, puisque $x \notin A \cap B$, on a $x \notin A$ i.e. $x \in \overline{A}$ donc $x \in \overline{A} \cap B$ et donc $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Dans tous les cas on a $x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \Delta B$.

Finalement cela prouve bien que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$.

Par double inclusion on a finalement montré que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.