

Programme de colles : semaine 2, du 28/09 au 2/10

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Sommes et produits

- symboles $\sum$ et $\prod$, caractère muet de l'indice de sommation, convention $\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$.
- exemple de la factorielle
- règles de calcul : linéarité de la somme, somme d'une constante, formules analogues pour les produits
- $\exp\left(\sum_{k=p}^n a_k\right) = \prod_{k=p}^n \exp(a_k)$ et $\ln\left(\prod_{k=p}^n b_k\right) = \sum_{k=p}^n \ln(b_k)$
- démonstration d'une valeur de somme/produit par récurrence
- découpage : relation de Chasles, exemples : écriture de $\prod_{k=p}^n k$ avec des factorielles, formules pour $\sum_{k=m}^n q^k$ et $\sum_{k=m}^n k$. *Ces deux dernières formules ne sont pas à connaître par cœur mais doivent pouvoir être retrouvées sans difficulté.*
- décalage : $\sum_{k=p}^n a_{k+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$, formule analogue pour le produit
- télescopage : $\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$, $\prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$, exemple : calcul de la somme géométrique. *On conseille aux élèves de revenir au changement d'indice $j = k + 1$ avant de simplifier une somme ou un produit télescopique.*
- retournement : $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{n-j}$, formule analogue pour le produit, exemple : calcul de $\sum_{k=0}^n k$
- coefficients binomiaux, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$. *L'interprétation combinatoire de ces coefficients n'a pas été abordée en classe.*
- formule de symétrie : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, d'absorption : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ et de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

- triangle de Pascal
- formule du binôme : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k$, exemple : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
- reprise du programme précédent sur les sommes doubles

2 Ensembles

- vocabulaire : élément, partie, ensemble vide ; descriptions d'ensembles : en extension, par équation et par paramétrage
- inclusion d'ensembles : savoir montrer que $A \subset B$, via "soit $x \in A$ alors ... donc $x \in B$ ". Savoir montrer que $A \not\subset B$
- égalité d'ensembles : savoir montrer que $A = B$ par principe de double inclusion, ou en montrant que $x \in A \iff x \in B$
- union et intersection : associativité, union et intersection finies, exemple d'union et d'intersection infinies
- complémentaire et différence : on note $\overline{A} = E \setminus A$ le complémentaire de A dans E , et par définition $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- formules de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- distributivité de $\cap$ et $\cup$: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- produit cartésien $I \times J$ de deux ensembles I et J , représentation dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $I, J \subset \mathbb{R}$. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E
- partition d'un ensemble (*on ne demande pas que les éléments d'une partition soient non vides*)

3 Nombres réels

Les résolutions d'(in)équations se feront sans mention de l'injectivité ou de la monotonie des fonctions impliquées.

- intervalles, intervalles ouverts, fermés, bornés, non bornés
- rappels des règles sur les inégalités, tableau de signes
- résolution de $x^2 \geq r$, $x^2 \leq r$, de $x^2 = y^2$
- valeur absolue :
 - inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$

- corollaires de l'inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ et $|x - y| \geq ||x| - |y||$
- résolution de $|x| \geq r$, de $|x| \leq r$, de $|x| = |y|$

- exemples de résolutions d'(in)équations
- partie entière
- majorants/minorants, maximum/minimum, bornes supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). *Nous n'avons pas fait d'exercice sur ce point.*

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ puis la démontrer par récurrence.
2. Énoncer la valeur de $S = \sum_{k=0}^n q^k$ puis la démontrer dans le cas $q \neq 1$ en considérant $(1 - q)S$.
3. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer une des formules parmi : symétrie, absorption, Pascal.
4. Énoncer la formule du binôme de Newton, puis développer rapidement $(1 + x)^5$ et $(x - 1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examineur).
5. Soient les ensembles $A = \left\{ \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right), t \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ (*attention, ici il y a deux questions en une*). On considérera l'élément $(-1, 0)$.
6. Énoncer les formules appelées "distributivité" de $\cup$ et $\cap$.
7. Énoncer les formules appelées "règles de De Morgan" pour le complémentaire d'une union et d'une intersection.
8. Donner la définition d'une partition d'un ensemble.
9. Énoncer la propriété permettant de résoudre, pour $r \in \mathbb{R}^+$, $x^2 \leq r$ et $x^2 \geq r$ (ou $|x| \leq r$ et $|x| \geq r$) et l'illustrer sur le graphe de la fonction carrée (ou valeur absolue).
10. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire (*sans corollaire*).

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type révision" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités en :

- **Révision 2, exo 4** : résolution d'un système linéaire sans paramètre à n équations et p inconnues avec $n, p \in \{2, 3\}$. <https://cahier-de-prepa.fr/pcsi1-decour/download?id=918&v=d5aa5>

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.