

NOM :

PRÉNOM :

Bonus de participation : /1 pt (en dehors du barème sur 5 points)

Question 1. (/1,5 pt)Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 3^{1-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{1-k} - \binom{n}{0} 3^{1-0} - \binom{n}{1} 3^{1-1} = 3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{-k} - 3 - n \\
 &= 3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - 3 - n = 3 \left(\frac{1}{3} + 1\right)^n - 3 - n \\
 &= 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3 - n
 \end{aligned}$$

Question 2. (/1,5 pts)Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme double suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} 2^{l-k} &= \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=0}^l 2^{l-k} \right) = \sum_{l=0}^n 2^l \left(\sum_{k=0}^l \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = \sum_{l=0}^n 2^l \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{l=0}^n 2^l \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{l+1}}\right) = \sum_{l=0}^n 2 \times 2^l - \sum_{l=0}^n 1 \\
 &= 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - (n+1) = 2^{n+2} - 2 - n - 1 = 2^{n+2} - n - 3
 \end{aligned}$$

Question 3. (/2 pts)

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 3y + z = -4 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y + 2z = -2 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 2y + 2z = -2 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + z = -1 & (L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y - z = 2 - 1 - z - z = 1 - 2z \\ y = -1 - z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(1 - 2z, -1 - z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

NOM :

PRÉNOM :

Bonus de participation : /1 pt (en dehors du barème sur 5 points)

Question 1. (/1,5 pt)Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{1-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{1-k} - \binom{n}{0} 3^{1-0} - \binom{n}{n} 3^{1-n} = 3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{-k} - 3 - 3^{1-n} \\
 &= 3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - 3 - 3^{1-n} = 3 \times \left(\frac{1}{3} + 1\right)^n - 3 - 3^{1-n} \\
 &= 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3 - 3^{1-n}
 \end{aligned}$$

Question 2. (/1,5 pts)Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme double suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} 2^{\ell-k} &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^k 2^{\ell-k} \right) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \left(\sum_{\ell=0}^k 2^{\ell} \right) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \times \frac{1-2^{k+1}}{1-2} \\
 &= \sum_{k=0}^n 2^{-k} (2^{k+1} - 1) = \sum_{k=0}^n 2 - \sum_{k=0}^n 2^{-k} = 2(n+1) - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &= 2n+2 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2n+2 - 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2n + \frac{1}{2^n}
 \end{aligned}$$

Question 3. (/2 pts)

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + 3z = 2 \\ -2x + 3y - 3z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y + z = -2 \\ y + z = -2 \end{cases} \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y - 2z = 4 - 2 - z - 2z = 2 - 3z \\ y = -2 - z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(2-3z, -2-z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$