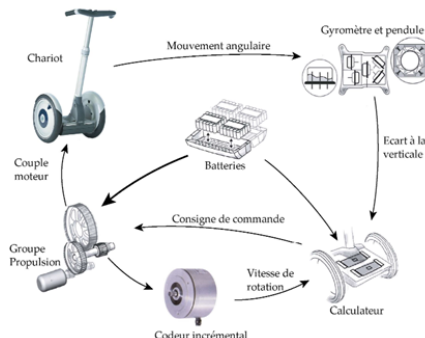


## Exercice 1 – Véhicule auto-balancé Segway

**Objectif** Modéliser la partie commande du Segway

Le support de l'étude est le véhicule auto-balancé Segway. La conduite du Segway se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement. Les virages à droite et à gauche sont commandés par la rotation de la poignée directionnelle située sur la droite du guidon. Le Segway comporte des capteurs et des microprocesseurs commandant les deux moteurs électriques équipant les deux roues.



La chaîne d'action permettant de réguler l'inclinaison du Segway est réalisée par :

- Un ensemble **amplificateur et motoréducteur** qui permet de délivrer un couple  $C_m$  caractérisant une action mécanique ayant tendance à entraîner un solide en rotation [N.m] :  $C_m(t) = K_m \cdot u(t)$  avec  $u(t)$  la tension de commande ;
- Un ensemble **chariot et conducteur**. Les équations de comportement dynamique peuvent se mettre sous la forme :  $a \cdot \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = b \cdot C_m(t) + c \cdot \phi(t)$  avec  $\phi(t) = \psi(t) + \alpha(t)$  où  $\alpha(t)$  est l'inclinaison du conducteur par rapport à la barre d'appui et  $\psi(t)$  est l'inclinaison du plateau du chariot par rapport à la verticale.

La partie commande est constituée :

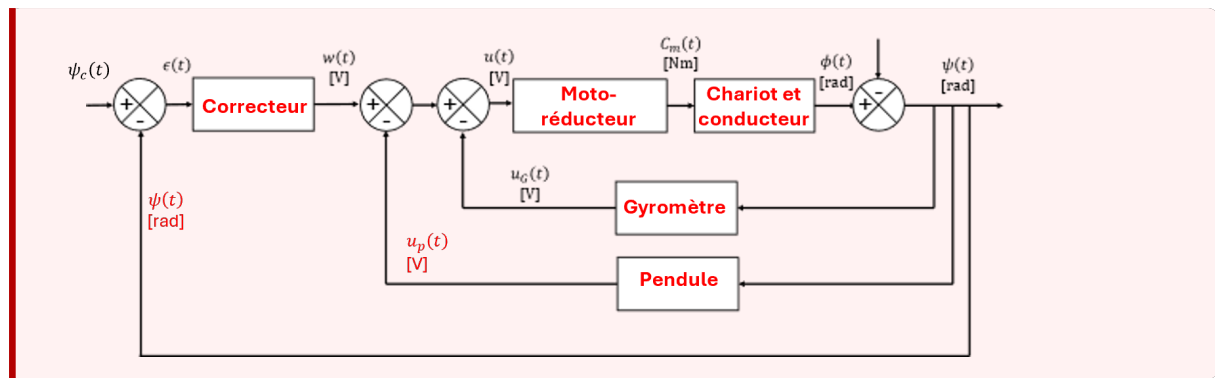
- D'un **comparateur** qui élabore le signal écart  $\varepsilon(t) = \psi_c(t) - \psi(t)$  où  $\psi(t)$  est l'inclinaison du plateau du chariot par rapport à la verticale et  $\psi_c(t)$  est la position angulaire de consigne ;
- D'un **correcteur** qui adapte l'écart pour commander le système avec la tension  $w(t)$ .

Afin de stabiliser le système, la grandeur de commande du motoréducteur  $u(t)$  est élaborée à partir de :

$$u(t) = w(t) - u_G(t) - u_P(t)$$

- La mesure de la vitesse angulaire par un **gyromètre** qui fournit la tension  $u_G(t)$  telle que :  $u_G(t) = K_V \cdot \frac{d\psi(t)}{dt}$ .
- La mesure de la position angulaire par un **pendule** qui fournit la tension  $u_P(t)$  telle que :  $u_P(t) = K_P \cdot \psi(t)$ .

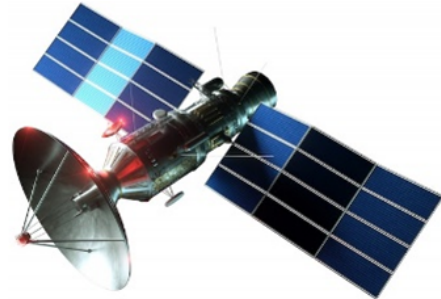
**Q1.** Compléter le schéma-blocs fonctionnel de ce système. Faire apparaître les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque bloc.



## Exercice 2 – Positionnement d'une antenne satellite

**Objectif** Modéliser la partie commande d'une antenne satellite

Une antenne parabolique permet sur un satellite l'échange d'informations avec la terre. Cette antenne doit être précisément orientée vers les antennes sur Terre. Pour ce faire, deux moteurs asservis en position assurent l'orientation angulaire. On s'intéresse ici à un des deux moteurs. L'objectif est de déterminer le schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement en position angulaire d'un des moteurs de l'antenne satellite et de vérifier les performances du système vis-à-vis du cahier des charges.



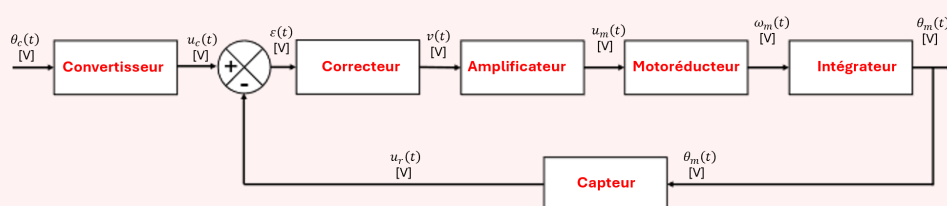
### Fonctionnement

Un ordinateur impose l'orientation de consigne  $\theta_c(t)$  que doit avoir l'antenne du satellite pour être alignée avec les antennes réceptrices sur Terre à un instant  $t$ . Un convertisseur permet de transformer cette consigne angulaire  $\theta_c(t)$  en tension de consigne  $u_c(t)$  compréhensible par les éléments électroniques du système. L'actionneur est un motoréducteur à courant continu qui est commandé par une tension  $u_m(t)$  fournie par un amplificateur. Un capteur de position angulaire assure l'asservissement de l'antenne en mesurant sa position angulaire  $\theta_m(t)$  et en fournissant une tension image de celle-ci  $u_r(t)$ . Celle-ci est comparée à la consigne  $u_c(t)$  telle que  $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_r(t)$ . Enfin, un correcteur est placé en amont de l'amplificateur et permet d'adapter cette tension  $\varepsilon(t)$  en une tension  $v(t)$ .

**Q1.** Quel élément permet de convertir une vitesse de rotation en position angulaire ?

Un intégrateur permet d'intégrer la vitesse de rotation en position angulaire.

**Q2.** Compléter le schéma-blocs fonctionnel de ce système. Préciser les grandeurs et leur unité en entrée et en sortie de chaque bloc.



**Q3.** Quels sont les éléments de la chaîne directe ? Et de la chaîne de rétroaction ?

La chaîne directe est constituée d'un correcteur, d'un amplificateur d'un moto réducteur et d'un intégrateur. La chaîne rétroactive est constituée d'un capteur.

**Q4.** Pourquoi s'agit-il d'un asservissement ?

La chaîne rétroactive est constituée d'un capteur et les grandeurs d'entrée et de sortie ont la même unité alors ce système est asservi en position angulaire

### Exercice 3 – Vérin électrique d'une plateforme 6 axes

**Objectif** Modéliser la partie commande du vérin d'une plateforme 6 axes

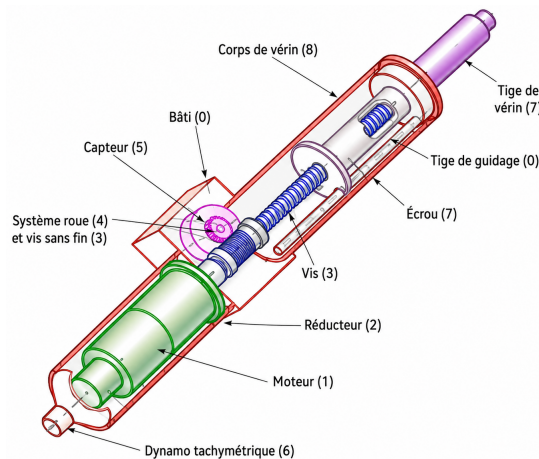
Une plate-forme 6 axes de type Stewart est un système industriel connu du grand public pour ses applications dans le domaine de la simulation des conditions de vol ou de conduite afin d'entraîner les pilotes. Sa structure repose sur une configuration parallèle constituée de 6 axes qui lui confère des caractéristiques dynamiques de haut niveau nécessaires à ces applications. L'étude porte sur un des six vérins électriques qui composent la plateforme. Un vérin électrique est un actionneur qui permet la conversion de l'énergie électrique entrante en une énergie mécanique de translation sur la tige de sortie.



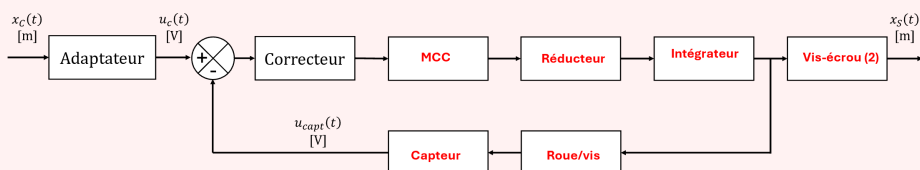
La rotation de la vis [3] est obtenue à partir du motoréducteur. Le moteur est un moteur à courant continu [1] et le réducteur [2] permet d'adapter la vitesse de rotation telle que la vitesse de rotation de la vis  $\omega_v$  soit 20 fois plus petite que la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m$ .

La rotation de la vis [3] est transformée en un mouvement de translation grâce à l'écrou [7], ce qui permet d'obtenir un mouvement de translation. On donne la loi entre le paramètre de translation de sortie  $x_s$  de l'écrou et le paramètre de rotation de la vis :  $x_s = \theta_v \cdot \frac{pas}{2\pi}$ .

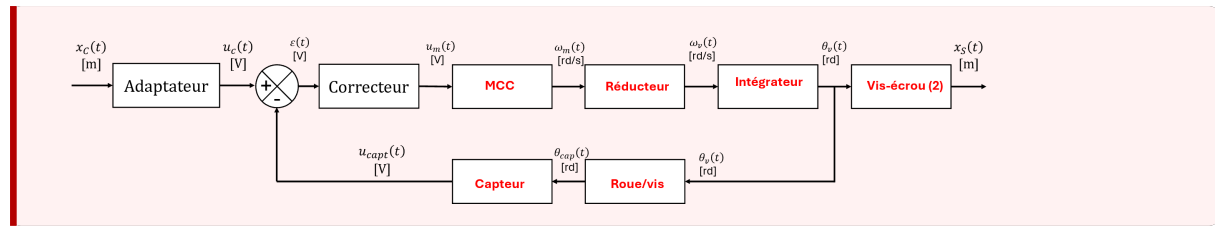
Le capteur [5] prélève la vitesse de rotation de la vis par l'intermédiaire d'un système roue et vis sans fin [4] de rapport de réduction  $\frac{\theta_v}{\theta_{capt}} = 25$ .



**Q1.** Compléter le schéma-blocs fonctionnel de ce système.



**Q2.** Préciser les grandeurs et leur unité en entrée et en sortie de chaque bloc.



## Exercice 4 – Dynamique du vérin électrique d'une plateforme 6 axes

**Objectif** Modéliser la partie commande du vérin d'une plateforme 6 axes

Le vérin de la plateforme 6 axes peut être modélisé par un système du premier ordre régi par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{dx_s(t)}{dt} + 4x_s(t) = 3x_c(t) \quad (1)$$

Analyser l'évolution du déplacement de la tige du vérin pour une consigne de  $k = 20\text{cm}$  de déplacement  $x_c(t) = k.u(t)$  avec  $u(t)$  un échelon unitaire.

**Q1.** Quel est la solution de l'équation homogène de l'équation différentielle 1 ?

L'équation homogène de l'équation de différentielle 1 est :

$$2 \frac{dx_{s,h}(t)}{dt} + 4x_{s,h}(t) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{dx_{s,h}(t)}{dt} + x_{s,h}(t) = 0$$

Alors nous identifions  $\tau = \frac{1}{2}$  et donc la solution est de la forme :  $x_{s,h}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

**Q2.** Quel est la solution particulière de l'équation différentielle 1 sachant la consigne en position ?

La solution particulière est de la même forme que l'entrée, la consigne alors :

$$x_{s,p}(t) = K_p \cdot u(t)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle 1 :

$$2 \times 0 + 4K_p = 3 \times 20$$

d'où :

$$4K_p = 60$$

et finalement :

$$K_p = 15 \text{ cm}$$

La solution particulière est donc :

$$x_{s,p}(t) = 15 \text{ cm}$$

**Q3.** Déterminer, l'évolution temporelle du déplacement de la tige du vérin solution de l'équation différentielle 1 ?

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$x_s(t) = x_{s,h}(t) + x_{s,p}(t)$$

On obtient donc :

$$x_s(t) = Ae^{-2t} + 15$$

**Q4.** Tracer l'évolution temporelle du déplacement de la tige du vérin ?

Le vérin étant initialement en position nulle, on considère :

$$x_s(0) = 0$$

À  $t = 0$ , on a donc :

$$0 = Ae^0 + 15$$

Ainsi :

$$A = -15$$

La solution temporelle du déplacement de la tige est donc :

$$x_s(t) = 15 - 15e^{-2t}$$

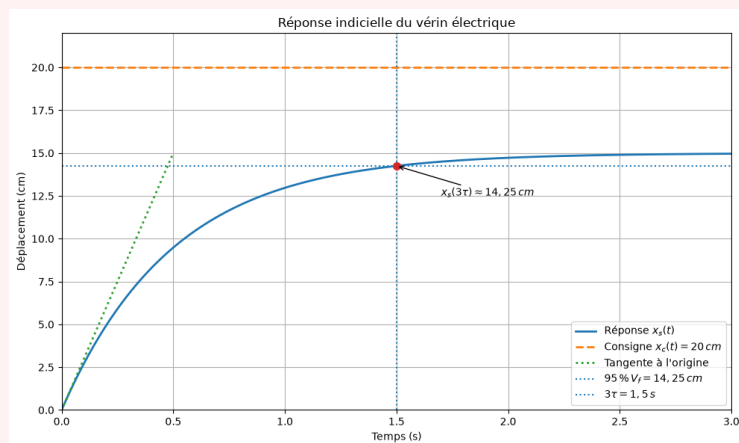
soit :

$$x_s(t) = 15(1 - e^{-2t})$$

Pour le tracer, nous devons calculer la tangente à l'origine :  $T_{x_s,0}(t) = x_s(0) + x'_s(t-0) = 30.t$

La valeur finale (en régime permanent) est :  $V_f = 15 \text{ cm}$

Temps réponse à 5% :  $t_{r,5\%} = 3\tau = 1.5 \text{ s}$



## Exercice 5 – Chauffage d'un lopin d'acier dans un four de forge

**Objectif** Modéliser la réponse temporelle d'un système du premier ordre soumis à une consigne en rampe

Dans une installation industrielle de forge, un four est utilisé pour chauffer des lopins d'acier avant leur mise en forme.

Pour simplifier l'étude, le comportement thermique du système peut être modélisé par un système du premier ordre régi par l'équation différentielle suivante :

$$4 \frac{dT_s(t)}{dt} + 4T_s(t) = 4T_c(t) \quad (2)$$

où :

- $T_c(t)$  est la température de consigne en degrés ( $^{\circ}$ ),
- $T_s(t)$  est la température du lopin d'acier en degrés ( $^{\circ}$ ).

Afin de chauffer progressivement le lopin, la consigne n'est pas appliquée brutalement. Elle suit une rampe :

$$T_c(t) = a t u(t)$$

où  $a$  représente la vitesse de montée en température.  $a = 100^{\circ}/s$

On suppose que le lopin est initialement à la température de référence :  $T_s(0) = 0$

**Q1.** Mettre l'équation différentielle du système sous sa forme canonique et déterminer la constante de temps  $\tau$ .

Pour  $t > 0$ , la consigne est donc :

$$T_c(t) = at$$

En remplaçant  $T_c(t)$  par  $at$ , on obtient :

$$4 \frac{dT_s(t)}{dt} + 4T_s(t) = 4at$$

En divisant par 4 :

$$\frac{dT_s(t)}{dt} + T_s(t) = at$$

La forme canonique d'un système du premier ordre est :

$$\tau \frac{dT_s(t)}{dt} + T_s(t) = K_0 T_c(t)$$

On identifie donc :

$$\tau = 1 s$$

et :

$$K_0 = 1$$

**Q2.** Déterminer la solution de l'équation homogène associée à l'équation différentielle.

L'équation homogène associée est :

$$\frac{dT_{s,h}(t)}{dt} + T_{s,h}(t) = 0$$

On sait que la solution homogène est :

$$T_{s,h}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec :  $\tau = 1 \text{ s}$

**Q3.** Déterminer la solution particulière  $T_{s,p}(t)$ .

La consigne est une rampe :

$$T_c(t) = at$$

Le second membre de l'équation différentielle est donc une fonction affine.

On recherche une solution particulière sous la forme :

$$T_{s,p}(t) = Bt + C$$

où  $B$  et  $C$  sont deux constantes à déterminer.

On remplace alors  $T_{s,p}(t)$  dans l'équation différentielle :

$$\frac{dT_s(t)}{dt} + T_s(t) = at$$

On obtient :

$$B + (Bt + C) = at$$

soit :

$$Bt + (B + C) = at$$

On identifie les coefficients et on trouve :

$$B = a \text{ et } C = -a$$

La solution particulière est donc :

$$T_{s,p}(t) = at - a$$

**Q4.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$T_s(t) = T_{s,h}(t) + T_{s,p}(t)$$

Or :

$$T_{s,h}(t) = Ae^{-t}$$

et :

$$T_{s,p}(t) = at - a$$

Donc :

$$T_s(t) = Ae^{-t} + at - a$$

**Q5.** Déterminer la constante  $A$  à partir de la condition initiale  $T_s(0) = 0$ , puis donner l'expression complète de  $T_s(t)$ .

Le lopin est initialement à la température de référence :  $T_s(0) = 0$

À partir de la solution générale :

$$T_s(t) = Ae^{-t} + at - a$$

on remplace  $t$  par 0 :

$$0 = Ae^0 + a \times 0 - a$$

donc :

$$0 = A - a$$

Ainsi :

$$A = a$$

La solution complète est alors :

$$T_s(t) = ae^{-t} + at - a$$

soit :

$$T_s(t) = at - a + ae^{-t}$$

En factorisant par  $a$  :

$$T_s(t) = a(t - 1 + e^{-t})$$

On peut également écrire :

$$T_s(t) = at - a(1 - e^{-t})$$

**Q6.** Déterminer l'expression de la température du lopin en régime permanent.

La température du lopin est définie par :

$$T_s(t) = at - a(1 - e^{-t})$$

Ainsi en régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T_s(t) = at - a = a(t - 1)$$

d'où une droite affine de pente  $a$  (identique à celle de la consigne) et d'ordonnée à l'origine  $-a$ .

**Q7.** Déterminer le temps de réponse à 5% du système.

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est approximativement :

$$t_{r,5\%} = 3\tau$$

Donc :

$$T_s(t) \approx a(t - 1)$$

**Q8.** Déterminer l'équation de la tangente à l'origine de la réponse  $T_s(t)$ .

La réponse est :

$$T_s(t) = at - a + ae^{-t}$$

Sa dérivée est :

$$T'_s(t) = a - ae^{-t}$$

À l'origine :

$$T'_s(0) = a - a = 0$$

et :

$$T_s(0) = 0$$

L'équation de la tangente à l'origine est donc :

$$\boxed{T_{\text{tan}}(t) = 0}$$

La réponse démarre donc avec une pente nulle avant de rejoindre progressivement une pente égale à celle de la consigne.

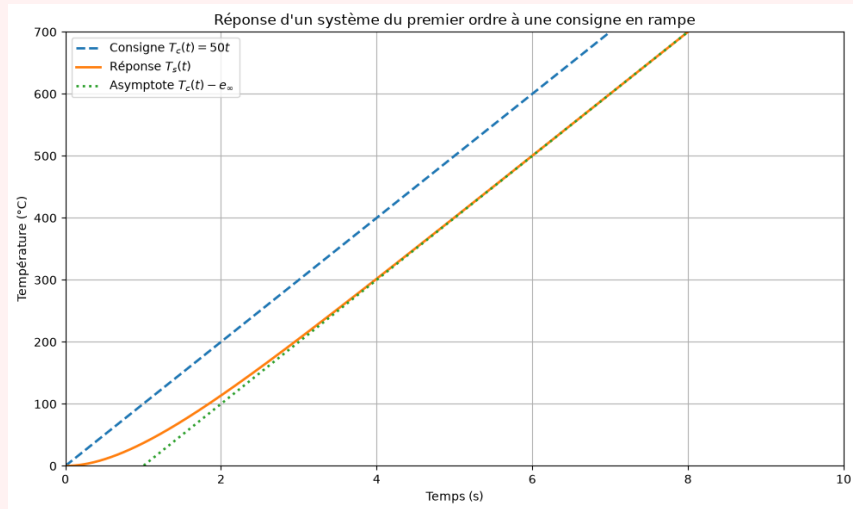
**Q9.** Tracer sur un même graphique la consigne en rampe, la réponse du système et l'erreur de traînage.

Pour :  $a = 100^\circ/s$ , la consigne est :

$$T_c(t) = 100t$$

La réponse est :

$$T_s(t) = 100t - 100(1 - e^{-t})$$



On constate qu'après le régime transitoire, la réponse et la consigne deviennent parallèles.