

MODÉLISATION SLCI

LAPLACE

Exercice 1 – Transformée de Laplace et TVF

Objectif Utiliser la transformée de Laplace et le théorème de la valeur finale pour déterminer le comportement en régime permanent d'un système.

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{ds(t)}{dt} + 4s(t) = 3e(t)$$

On se place dans les conditions d'Heaviside et on note $E(p)$ et $S(p)$ (respectivement $E(p)$ et $S(p)$) les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$.

Q1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle.

Q2. Exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$.

Q3. Supposons que le système est stable, déterminer la réponse en régime permanent $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$ lorsque le système est soumis à :

- Un échelon tel que $e_1(t) = 2u(t)$;
- Une rampe telle que $e_2(t) = 3tu(t)$.

Q4. À partir de l'expression $S_1(p)$ obtenue précédemment pour la réponse à un échelon $e_1(t)$, déterminer l'expression temporelle $s_1(t)$ par transformation de Laplace inverse.

On pourra utiliser une décomposition en éléments simples.

Q5. Retrouver l'expression de la réponse $s_1(t)$ par résolution temporelle de l'équation différentielle, pour une entrée échelon $e_1(t) = 2u(t)$.

Exercice 2 – Transformée de Laplace et TVF – Variante

Objectif Utiliser la transformée de Laplace, la résolution temporelle et le théorème de la valeur finale pour déterminer le comportement temporel et en régime permanent d'un système.

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$3 \frac{ds(t)}{dt} + 9s(t) = 6e(t)$$

On se place dans les conditions d'Heaviside et on note $E(p)$ et $S(p)$ les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$.

Q1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle.

Q2. Exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$.

Q3. Supposons que le système est stable. Déterminer la réponse en régime permanent $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$ lorsque le système est soumis à :

- Un échelon tel que $e_1(t) = 2u(t)$;
- Une rampe telle que $e_2(t) = 3tu(t)$.

Q4. À partir de l'expression $S_1(p)$ obtenue précédemment pour la réponse à un échelon $e_1(t)$, déterminer l'expression temporelle $s_1(t)$ par transformation de Laplace inverse.

On pourra utiliser une décomposition en éléments simples.

Q5. Retrouver l'expression de la réponse $s_1(t)$ par résolution temporelle de l'équation différentielle, pour une entrée échelon $e_1(t) = 2u(t)$.

Exercice 3 – Du domaine de Laplace au domaine temporel

Objectif Passer d'une relation entrée-sortie exprimée dans le domaine de Laplace à l'équation différentielle correspondante dans le domaine temporel.

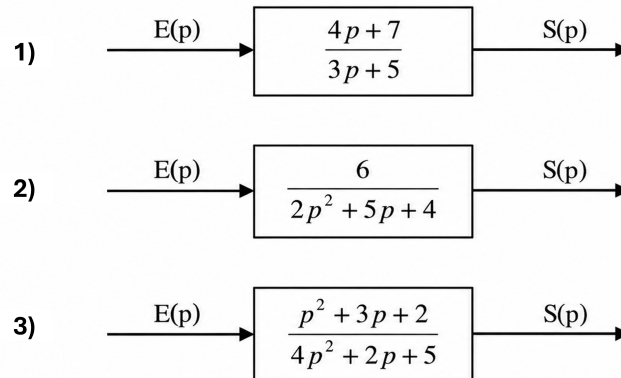


FIGURE 1 – Schémas-blocs dans le domaine de Laplace.

Avec $E(p)$ la transformée de Laplace de $e(t)$ et $S(p)$ la transformée de Laplace de $s(t)$.

Pour les trois systèmes, on considère que les conditions initiales sont nulles.

Q1. Déterminer pour chacun des trois systèmes, l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$. Et précisez l'ordre des équations différentielles obtenues.

Exercice 4 – Modélisation d'un moteur à courant continu

D'un point de vue électrique, un moteur à courant continu peut être modélisé comme un système dont l'entrée est la tension de commande de l'induit $u(t)$ et la sortie est la vitesse de rotation de l'arbre moteur $\omega_m(t)$.

L'induit est modélisé par une résistance en série avec une inductance et une force contre-électromotrice. On donne ci-dessous le modèle de connaissance du moteur à courant continu :

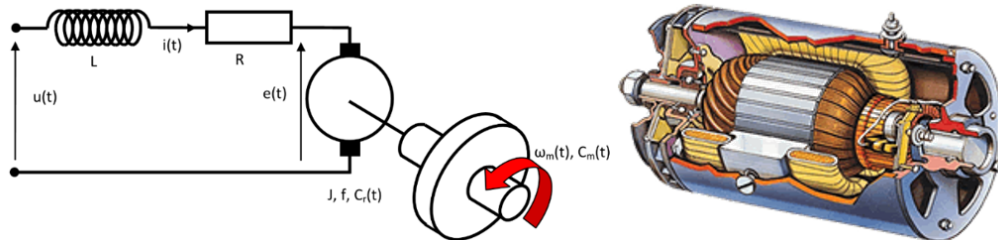


FIGURE 2 – Modèle de connaissance du moteur à courant continu.

Pour tout l'exercice, on considère que les conditions initiales sont nulles. Les équations qui modélisent le fonctionnement du moteur sont :

- **Loi d'Ohm :**

$$u(t) = e(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

- **Équations du moteur :**

$$e(t) = K_e \omega_m(t) \quad (2)$$

$$C_m(t) = K_c i(t) \quad (3)$$

- **Équation de la dynamique de l'arbre moteur :**

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t) = C_m(t) - C_r(t) \quad (4)$$

Grandeur	Signification	Grandeur	Signification
R	Valeur de la résistance (Ω)	$\omega_m(t)$	Vitesse de rotation du moteur (rad/s)
L	Valeur de l'inductance (H)	$C_m(t)$	Couple exercé par le moteur (N.m)
K_e	Coefficient de la force contre-électromotrice	$C_r(t)$	Couple résistant exercé sur l'arbre moteur (N.m)
K_c	Constante de couple	$u(t)$	Tension d'alimentation du moteur (V)
J	Inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur	$e(t)$	Force électromotrice du moteur (V)
f	Coefficient de frottement visqueux	$i(t)$	Intensité dans le moteur (A)

- Q1.** Exprimer les équations (1) à (4) dans le domaine de Laplace.
- Q2.** À l'aide de la question précédente, compléter le schéma-blocs du moteur ci-après.

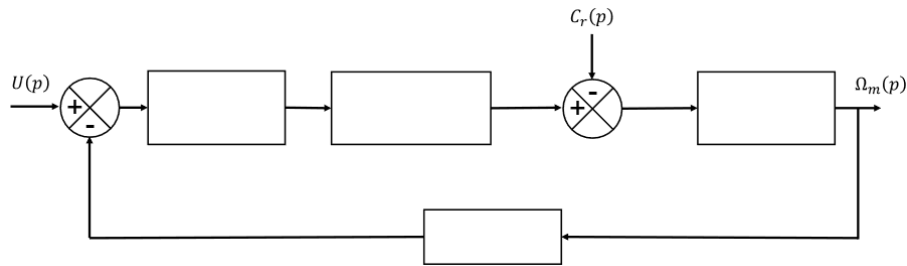


FIGURE 3 – Schéma-blocs du moteur à courant continu à compléter

- Q3.** S'agit-il d'un asservissement ? Justifier
- Q4.** Déterminer l'expression de la vitesse de rotation du moteur sous la forme suivante (on mettra $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sous forme canonique) :

$$\Omega_m(p) = H_1(p) U(p) + H_2(p) C_r(p)$$

- Q5.** Déterminer la valeur de $\omega_m(t)$ en régime permanent lorsque l'on soumet le moteur en entrée à un échelon de tension d'amplitude U_0 . La perturbation est considérée constante tout au long de l'essai et égale à C_{r0} .

Exercice 5 – Modélisation d'un vérin hydraulique

Un vérin hydraulique est un type d'actionneur qui permet de transformer une énergie hydraulique en énergie mécanique de translation. C'est le deuxième type d'actionneur le plus utilisé après les moteurs.

On distingue deux types de vérins : les vérins simple effet et les vérins double effet.

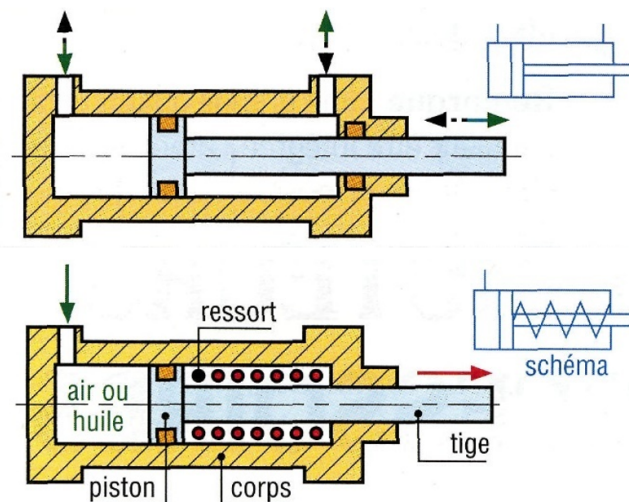


FIGURE 4 – Vérins hydraulique double effet et simple effet.

Les vérins double effet permettent un fonctionnement dans les deux sens (ils peuvent pousser ou tirer) grâce à la différence de pression créée entre les deux chambres séparées par le piston. Ils possèdent donc deux orifices qui peuvent servir d'alimentation ou d'échappement.

Les vérins simple effet ne permettent qu'un seul sens de fonctionnement. Si la tige peut bien se déplacer dans les deux sens, un effort important ne peut être créé que dans un seul sens. Ils ne possèdent qu'un seul orifice d'alimentation et le retour en position du piston s'effectue par le biais d'un ressort.

Q1. Dans le cas d'un vérin double effet, donner la relation liant l'effort développé $F_m(t)$, la surface du piston S et la différence de pression entre les deux chambres $\Delta P(t)$.

On pourra réaliser une analyse dimensionnelle.

Un vérin hydraulique est également défini par les deux équations suivantes :

- **Principe de conservation de la masse dans un fluide compressible :**

$$q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2\beta} \frac{d\Delta P(t)}{dt} \quad (1)$$

Avec :

- $q(t)$: débit du fluide ;
- $S \frac{dx(t)}{dt}$: volume contenu dans la chambre fermée par le piston ;
- β : grandeur liée à la compressibilité du fluide.

- **Principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige du vérin :**

$$F_m(t) - F_r(t) - f \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (2)$$

Avec :

- $F_m(t)$: force développée par le vérin ;
- $F_r(t)$: force résistante de frottement sec ;
- $f \frac{dx(t)}{dt}$: force de frottement visqueux ;
- $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$: accélération de la tige du vérin.

Q2. Traduire les trois équations associées au fonctionnement d'un vérin hydraulique dans le domaine de Laplace.

Q3. Compléter le schéma-blocs du vérin donné ci-dessous.

Le système ainsi modélisé est-il un système asservi ? Justifier votre réponse.

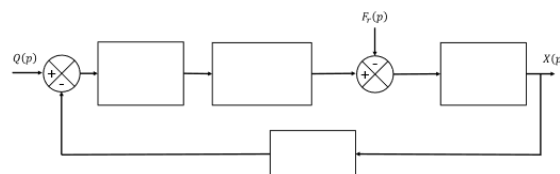


FIGURE 5 – Schéma-blocs du vérin hydraulique.

Q4. Déterminer, sous forme canonique, la fonction de transfert

$$H_p(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$$

lorsque $F_r(p) = 0$.

Q5. Déterminer, sous forme canonique, la fonction de transfert

$$H_R(p) = \frac{X(p)}{F_r(p)}$$

lorsque $Q(p) = 0$.

Q6. En déduire la relation liant $X(p)$ aux deux entrées $Q(p)$ et $F_r(p)$.

On distingue également deux types de vérins en fonction du fluide utilisé : le vérin pneumatique ou hydraulique. Le choix du fluide exerce une influence sur le coefficient de compressibilité du fluide β . On fera l'hypothèse que :

- Pour un vérin hydraulique, $\beta \rightarrow +\infty$ car le fluide est incompressible.
- Pour un vérin pneumatique, $\beta \rightarrow 0$ car le fluide est compressible.

Q7. Donner l'expression de $X(p)$ pour un vérin hydraulique.