

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \exp(\sqrt{x})$. Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow]-\infty, 2]$
 $x \longmapsto 2 - x^2$. Montrer que g est surjective mais n'est pas injective.

Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Donner le cas échéant leur bijection réciproque.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto x + y$
- 2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \longmapsto (x^2, e^x)$
- 3) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + 2y, 2x - y)$

Exercice 3

On considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + y, x + z, y + z) \end{aligned}$$

1. Déterminer les antécédents de $(3, 0, 0)$ par f .
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

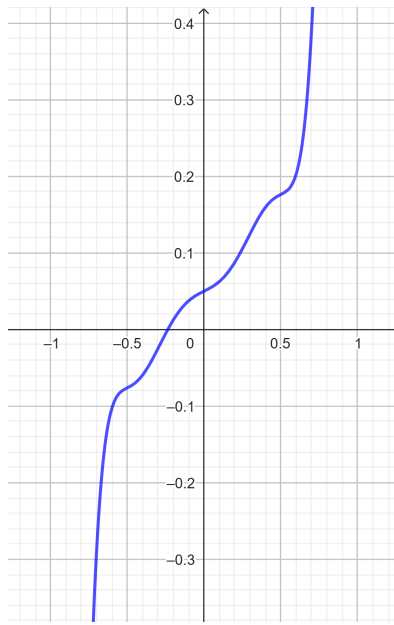
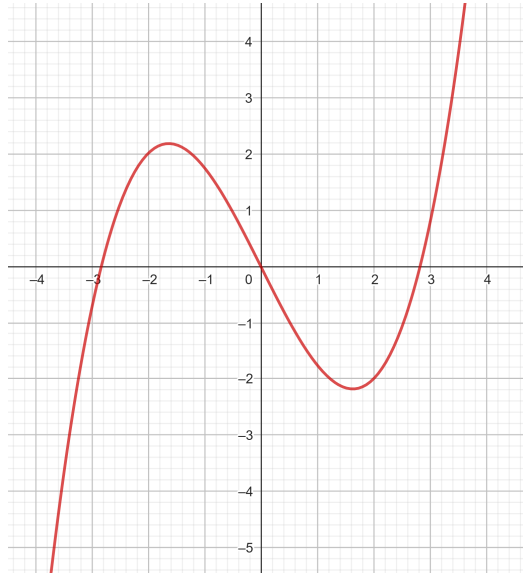
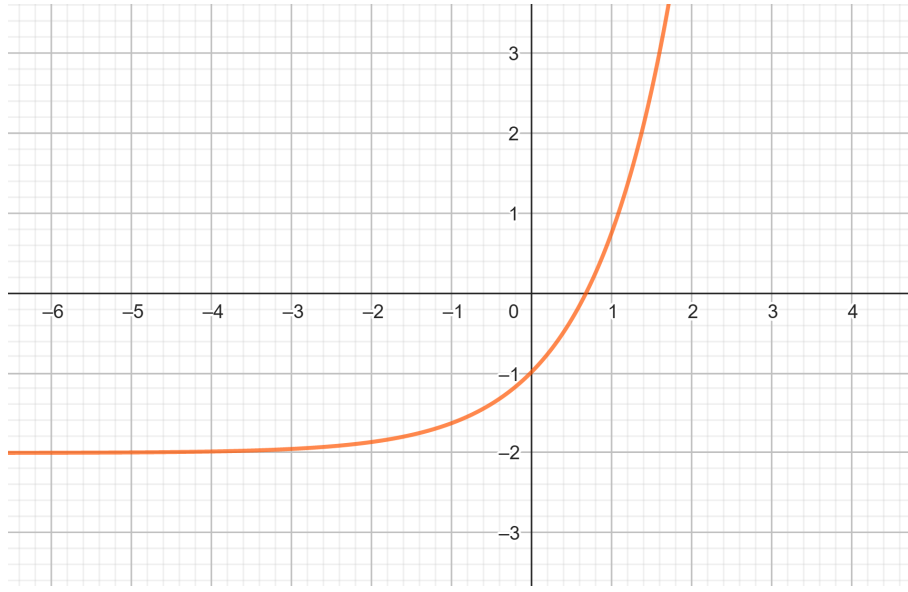
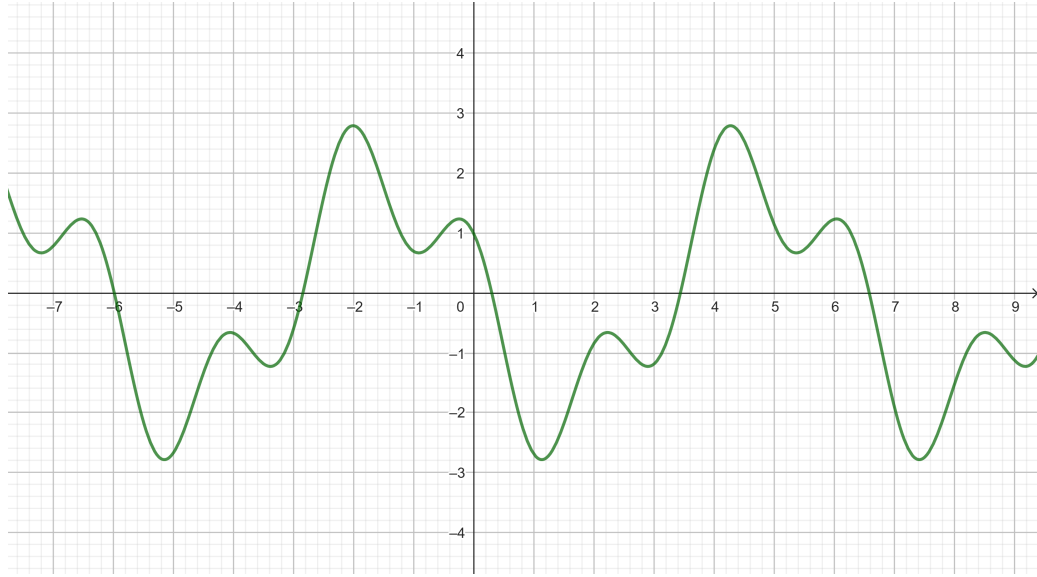
Exercice 4

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $g \circ f$? Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 5

La page ci-après présente (en mode paysage !) les graphes de quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si ces fonctions sont injectives et/ou surjectives.



Exercice 6

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	0	1	6	$+\infty$
f	1	2	-4	$+\infty$

Déterminer $f([0, 1[)$, $f([1, 6])$ et $f([1, +\infty[)$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
g	0	1	$-\infty$

Déterminer $g([3, +\infty[)$ et $g(]-\infty, 3])$.

3. Soit $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h	$+\infty$	0	-2

Déterminer $h([1, +\infty[)$ et $h(]-\infty, 1])$.

Exercice 7

Soit la fonction numérique f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Donner l'allure du graphe de f et la vérifier à l'aide de GeoGebra (<https://www.geogebra.org/classic?lang=fr>).
3. Déterminer par lecture graphique deux intervalles I et J tels que $f : I \rightarrow J$ soit une bijection.
4. Déterminer l'expression de $f^{-1} : J \rightarrow I$.

Exercice 8

Soit th la fonction numérique donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Démontrer que $th : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 9

Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_a &: \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: x \longmapsto \frac{1}{x-a} + a \end{aligned}$$

1. Montrer que $\text{Im}(f_a) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
2. Calculer $f_a \circ f_a$. Que peut-on en conclure ? Illustrer ce fait graphiquement.

Exercice 10

Soient E et F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, et $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Montrer que si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.
2. Montrer que si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Exercice 11

Soit E un ensemble. Pour $F \subset E$, commencer par rappeler la définition de la fonction indicatrice de F notée $\mathbb{1}_F$. Dans tout ce qui suit A et B désignent des parties de E .

1. Montrer que $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
3. En déduire que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.