

# Feuille de cours 5 : parité, périodicité

On considère des fonctions définies sur un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le *graphe* de  $f$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  suivant :  $\{(x, f(x)), x \in D\}$ . On travaillera dans le repère orthonormé standard  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . S'il est utile de savoir tracer le graphe d'une fonction donnée à l'aide de sa calculatrice, de Geogebra (accessible gratuitement en ligne) ou de Python, il est également indispensable de savoir le faire *à la main* sur des fonctions simples. Il faut par ailleurs être capable d'identifier par lecture graphique certaines propriétés de base des fonctions, comme la parité et la périodicité.

## 1 Symétries et parité

### 1.1 Fonctions paires

#### Définition 1

Un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  est dit symétrique par rapport à 0 lorsque :  $\forall x \in D, -x \in D$ .

Par exemple,  $[-2, 2]$  et  $\mathbb{R}^*$  sont symétriques par rapport à 0; mais  $] - 3, 3]$  et  $\mathbb{R}^+$  ne le sont pas.

Pour toute fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble  $D$  symétrique par rapport à 0 on peut considérer la fonction  $\tilde{f}$  suivante (attention, la notation  $\tilde{f}$  n'est pas standard, ne l'utilisez pas ailleurs que dans ce document sans l'avoir redéfinie) :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : x &\longmapsto f(-x) \end{aligned}$$

Interprétation graphique : Le graphe de  $\tilde{f}$  est le symétrique de celui de  $f$  par rapport à  $(0, \vec{j})$ , c'est-à-dire par rapport à l'axe des ordonnées.

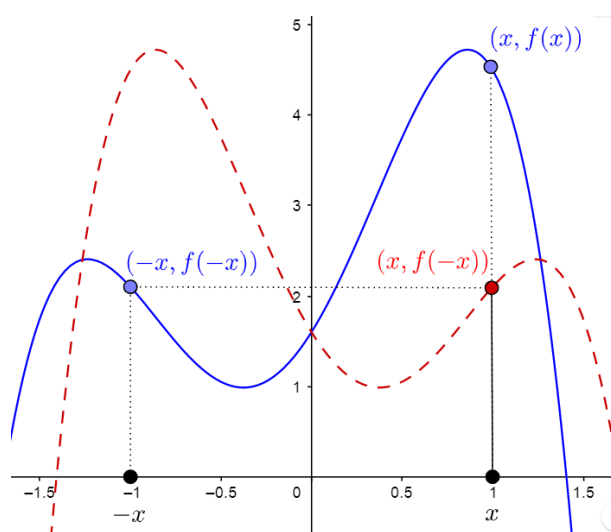


FIGURE 1 – Graphe de  $\tilde{f}$  (en rouge) en fonction du graphe de  $f$  (en bleu)

**Définition 2**

Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite paire lorsque :

- $D$  est symétrique par rapport à 0, et
- $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

**Remarque 3**

Attention, lorsqu'on vous demande la définition de “ $f$  est paire” ne répondez pas simplement “ $f(-x) = f(x)$ ” : il faut quantifier la variable  $x$  (à défaut, on pourra vous demander “pour quel  $x$  ?”) et préciser que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 (pour que l'expression  $f(-x)$  ait bien un sens pour tout  $x \in D$ ).

Par exemple la fonction valeur absolue définie sur  $\mathbb{R}$  par  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  est paire car :  $\mathbb{R}$  est symétrique par rapport à 0 et :  $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$ .

Interprétation graphique : Une fonction  $f$  est paire lorsque les graphes de  $\tilde{f}$  et de  $f$  sont les mêmes, i.e. lorsque le graphe de  $f$  est symétrique par rapport à l'axe  $(O, \vec{j})$  des ordonnées.

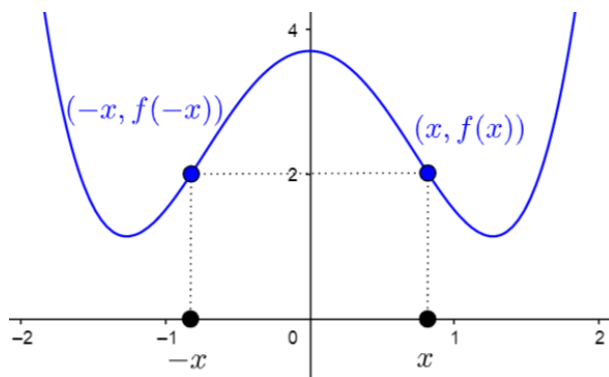


FIGURE 2 – Graphe d'une fonction paire (repérez que  $f(-x) = f(x)$ )

**Exercice 1**

Les fonctions suivantes sont-elles paires ?

$$f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ : x \mapsto x^2$$

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \frac{x}{1-x}$$

**Exercice 2**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. Montrer que la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $g : x \mapsto f(x) + f(-x)$  est paire.

## 1.2 Fonctions impaires

Pour toute fonction  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  on peut considérer la fonction  $-g$  donnée par :

$$\begin{aligned} -g &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ &: x \mapsto -g(x) \end{aligned}$$

Interprétation graphique : Le graphe de  $-g$  est le symétrique de celui de  $g$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{i})$ , c'est-à-dire par rapport à l'axe des abscisses.

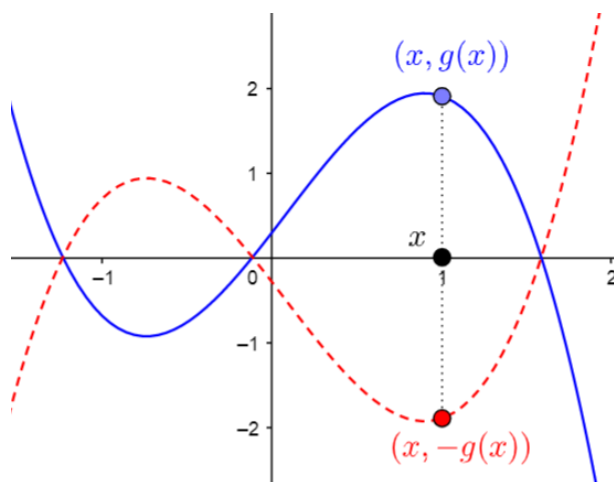


FIGURE 3 – Graphe de  $-g$  (en rouge) en fonction du graphe de  $g$  (en bleu)

### Définition 4

Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite impaire lorsque :

- $D$  est symétrique par rapport à 0, et
- $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$ .

### Remarque 5

La remarque 3 s'applique également ici.

### Proposition 6

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction impaire et si  $0 \in D$  alors  $f(0) = 0$ .

*Démonstration :*

### Proposition 7

La fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.

*Démonstration :*

Interprétation graphique : Une fonction  $f$  est impaire lorsque les graphes de  $f$  et de  $-\tilde{f}$  sont les mêmes. Le graphe de  $-\tilde{f}$  s'obtient comme le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du graphe de  $f$ . Ainsi le graphe de  $-\tilde{f}$  est en fait le symétrique du graphe de  $f$  par rapport à l'origine (i.e. la figure obtenue après rotation d'angle  $\pi$  autour de l'origine). Finalement,  $f$  est impaire lorsque son graphe est symétrique par rapport à l'origine  $O$ .

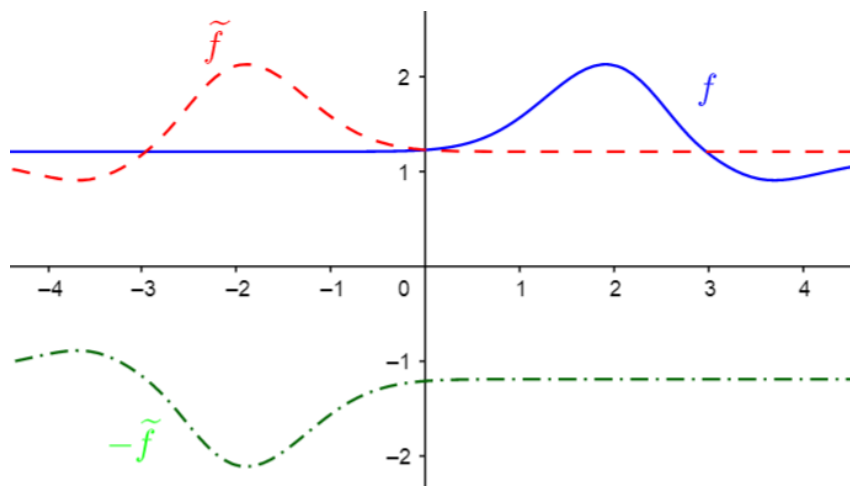


FIGURE 4 – Graphes de  $\tilde{f}$  (en rouge) et de  $-\tilde{f}$  (en vert) en fonction du graphe de  $f$  (en bleu)

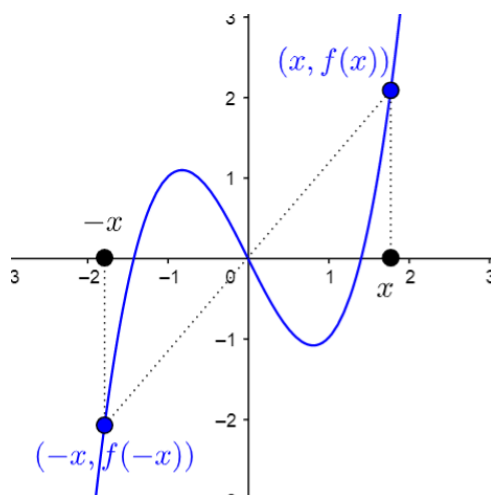


FIGURE 5 – Graphe d'une fonction impaire (repérez que  $f(-x) = -f(x)$ )

Par exemple la fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  est impaire car :

**Exercice 3**

Tracer les graphes des fonctions  $f_1 : x \mapsto x$ ,  $f_2 : x \mapsto x^2$  et  $f_3 : x \mapsto x^3$ . Lesquelles sont paires / impaires ?

Exemple fondamental : L'exemple précédent explique la terminologie choisie : pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  notons  $f_n : x \mapsto x^n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  si  $n \geq 0$  et sur  $\mathbb{R}^*$  si  $n < 0$ . Alors :

- la fonction  $f_n$  est paire lorsque  $n$  est pair, et
- la fonction  $f_n$  est impaire lorsque  $n$  est impair.

**Proposition 8**

Soit  $D$  un domaine symétrique par rapport à 0 et soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions paires (resp. impaires) alors pour tout réel  $\lambda$  la fonction  $f + \lambda g$  est paire (resp. impaire).

*Démonstration* :

Le domaine de  $f + \lambda g$  étant le même que celui de  $f$  et  $g$ , il n'y a qu'à évaluer  $(f + \lambda g)(-x)$  pour  $x \in D$ . Si  $f$  et  $g$  sont paires, alors

$$(f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = f(x) + \lambda g(x) = (f + \lambda g)(x)$$

d'où l'on conclut que  $f + \lambda g$  est paire. Et si  $f$  et  $g$  sont impaires, alors

$$(f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = -f(x) - \lambda g(x) = -(f + \lambda g)(x)$$

d'où l'on conclut que  $f + \lambda g$  est impaire.  $\square$

Ainsi, pour des réels  $(a_k)_{0 \leq k \leq 2n}$  quelconques, les fonctions polynomiales données par des expressions de la forme  $\sum_{k=0}^n a_{2k} x^{2k} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n}$  sont paires ; et celles

données par des expressions de la forme  $\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1}$  sont impaires.

**Exercice 4**

Les fonctions suivantes sont-elles impaires ?

$$\begin{aligned} g_1 &: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: x \longmapsto \frac{\ln(|x|)}{x} \\ g_2 &: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: x \longmapsto \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

## 2 Translations et périodicité

### 2.1 Translations

Pour toute fonction  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}$  on peut considérer la fonction  $f + y_0$  donnée par :

$$\begin{aligned} f + y_0 &: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: x \longmapsto f(x) + y_0 \end{aligned}$$

Interprétation graphique : Le graphe de  $f + y_0$  s'obtient par translation du graphe de  $f$  par le vecteur  $+y_0\vec{j}$ , c'est-à-dire par une translation de  $|y_0|$  vers le haut si  $y_0 \geq 0$  et de  $|y_0|$  vers le bas si  $y_0 < 0$ .

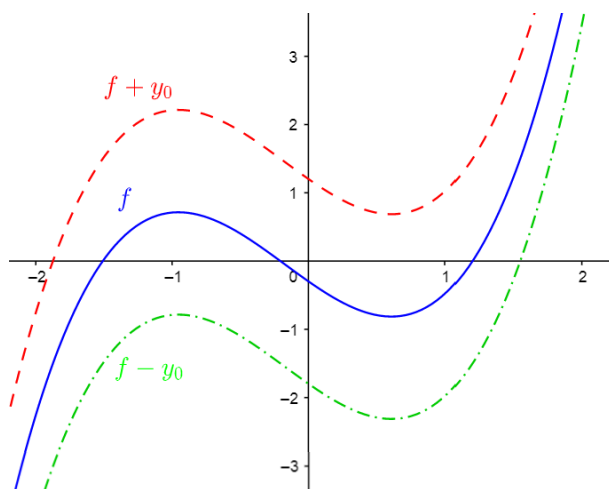


FIGURE 6 – Graphes de  $f + y_0$  (en rouge) et de  $f - y_0$  (en vert) en fonction du graphe de  $f$  (en bleu) (pour  $y_0 > 0$ )

#### Exercice 5

Tracer les graphes des fonctions  $x \longmapsto x^2 + 1$  et  $x \longmapsto x^2 - 1$ .

Il ne faut pas confondre cette translation verticale avec la translation horizontale, qu'on présente tout d'abord uniquement pour les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier pour plus de simplicité :

Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  on peut considérer la fonction  $f_{x_0}$  (attention, la notation  $f_{x_0}$  n'est pas standard, ne l'utilisez pas ailleurs que dans ce document sans l'avoir redéfinie) :

$$\begin{aligned} f_{x_0} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: x \longmapsto f(x - x_0) \end{aligned}$$

### Remarque 9

Attention au signe choisi ici, il s'agit bien de  $f(x - x_0)$  et non de  $f(x + x_0)$ .

Interprétation graphique : Le graphe de  $f_{x_0}$  s'obtient par translation du graphe de  $f$  par le vecteur  $+x_0\vec{i}$ , c'est-à-dire par une translation de  $|x_0|$  vers la droite si  $x_0 \geq 0$  et de  $|x_0|$  vers la gauche si  $x_0 < 0$ .

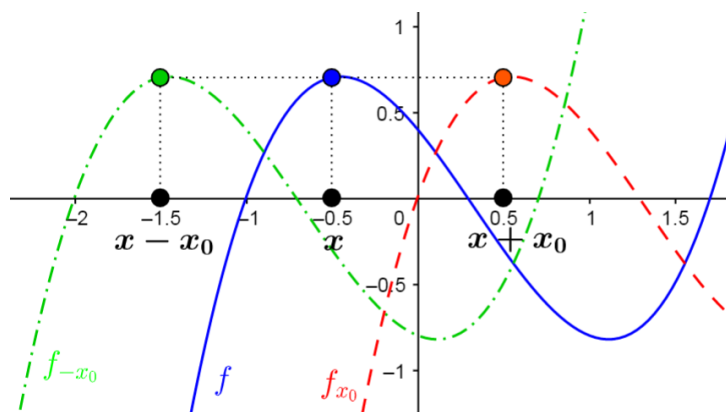


FIGURE 7 – Graphes de  $f_{x_0}$  (en rouge) et de  $f_{-x_0}$  (en vert) en fonction du graphe de  $f$  (en bleu) (pour  $x_0 > 0$ )

### Exercice 6

Tracer les graphes des fonctions  
 $f : x \longmapsto (x - 1)^2$  et  $g : x \longmapsto (x + 1)^2$ .

### Exercice 7

Tracer les graphes des fonctions  
 $f : x \longmapsto |x + 2| - 1$ , et  $g : x \longmapsto \frac{1}{x - 1} + 2$ .

## 2.2 Périodicité

### Définition 10

Soit  $T \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $T$ -périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Interprétation graphique : Une fonction  $f$  est  $T$ -périodique lorsque que les graphes de  $f$  et de  $f_{-T}$  sont les mêmes, i.e. lorsque le graphe de  $f$  est stable par translation de vecteur  $-T\vec{i}$ . Nous verrons ci-dessous qu'il est en fait équivalent de demander que  $f$  soit  $(-T)$ -périodique, et donc que son graphe soit stable par translation de vecteur  $+T\vec{i}$ , c'est-à-dire par translation de  $T$  vers la droite.

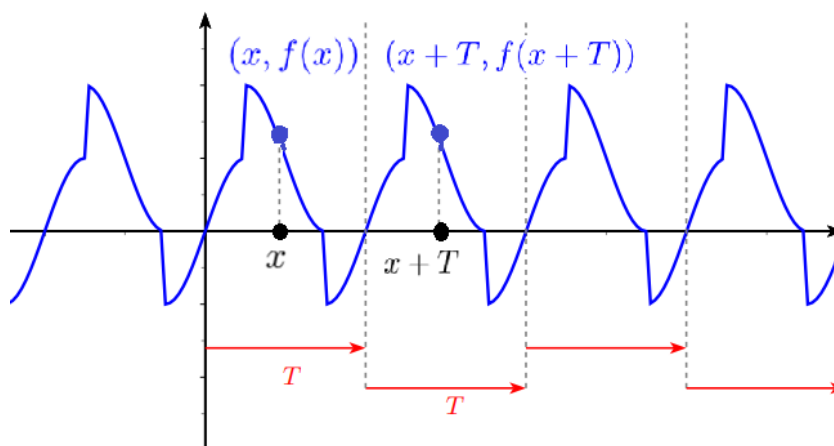


FIGURE 8 – Graphe d'une fonction périodique (repérez que  $f(x + T) = f(x)$ )

Par exemple, les fonctions cos et sin sont  $2\pi$ -périodiques car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

### Exercice 8

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \cos(2x + 5)$  est  $\pi$ -périodique.

### Remarque 11

Pour simplifier on a seulement donné ici la définition dans le cas où l'ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ . Toutefois on pourra être amené à considérer des fonctions périodiques dont l'ensemble de définition n'est pas  $\mathbb{R}$  tout entier, comme par exemple la fonction tangente qui est  $\pi$ -périodique et définie seulement sur  $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Il faut alors ajouter une condition sur l'ensemble de définition : une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $T$ -périodique lorsque :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \iff x + T \in D$ , et
- $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$ .

Par exemple pour la fonction tangente on a bien  $x \in D_{\tan} \iff x + \pi \in D_{\tan}$ .

La période d'une fonction périodique n'est pas unique. On donnera toujours *la plus petite période strictement positive possible*.

**Proposition 12**

Si  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $T$ -périodique alors  $f$  est aussi  $kT$ -périodique pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration :*

Le cas  $k = 0$  ne nécessite même pas d'utiliser l'hypothèse : toutes les fonctions sont 0-périodiques. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on procède par récurrence : l'initialisation à  $k = 1$  est donnée par l'hypothèse. Pour l'hérédité : supposons que  $f$  soit  $kT$ -périodique pour un certain  $k \in \mathbb{N}^*$  et fixons  $x \in D$ . Puisque  $f$  est  $T$ -périodique et  $kT$ -périodique on a :

$$f(x + (k + 1)T) = f((x + kT) + T) = f(x + kT) = f(x)$$

Ainsi  $f$  est  $(k + 1)T$ -périodique, ce qu'il fallait démontrer.

Par ailleurs, si  $f$  est  $T$ -périodique alors elle est aussi  $(-T)$ -périodique. En effet, pour tout  $x \in D$  on a :

$$f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T).$$

Un raisonnement par récurrence montre alors que  $f$  est  $(-kT)$ -périodique pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $\square$

**Exercice 9**

Montrer que la fonction  $f : x \longmapsto \cos(4\pi x)$  est périodique. Préciser sa plus petite période strictement positive.