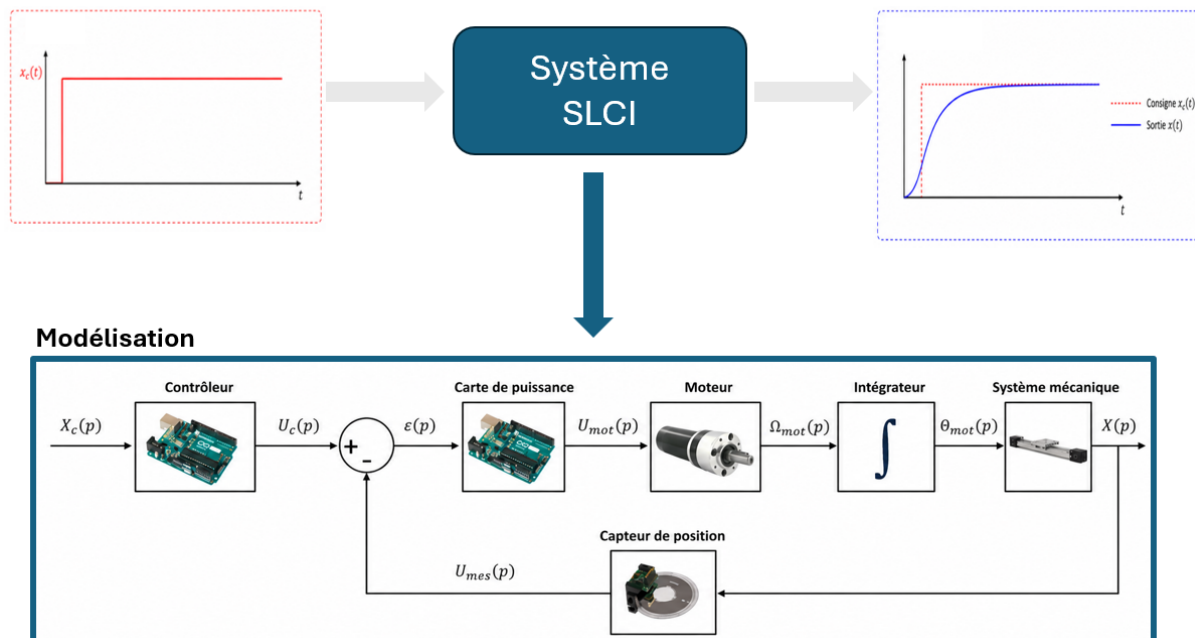




OBJECTIF

Analyser et modéliser le comportement d'un système afin de comprendre, prédire et éventuellement contrôler sa réponse.



COMPÉTENCES

- A3-10** Identifier la structure d'un système asservi.
- B2-04** Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
- B2-05** Modéliser le signal d'entrée.
- B2-07** Modéliser un système par schéma-blocs.
- C1-01** Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- C2-03** Déterminer les performances d'un système asservi.



SAVOIRS

- Savoir lire et compléter un schéma-blocs fonctionnel.
- Savoir reconnaître un système asservi et connaître les hypothèses des SLCI
- Chaîne directe, chaîne de retour, commande, comparateur, consigne, perturbation, capteur.
- Étude en poursuite et en régulation.
- Savoir passer une équation temporelle dans le domaine de Laplace : connaître par cœur la **transformée de Laplace** de la dérivée nième d'une fonction, d'un intégrateur – conditions d'Heaviside.
- **Mise sous forme canonique** d'une fonction de transfert (gain statique, ordre, classe, pôles, zéros).
- Connaître par cœur la transformée de Laplace des signaux canoniques d'entrée suivants : **impulsion de Dirac, échelon, rampe**.
- Savoir lire, **compléter et manipuler le schéma-blocs d'un système**.
- Connaître et savoir appliquer la **formule de Black** pour simplifier un schéma-blocs et calculer la fonction de transfert en boucle fermée d'un système.
- Connaître la différence entre fonction de transfert en **boucle ouverte et en boucle fermée**.
- Savoir dire si un système est **stable** ou non
- Savoir estimer la **précision** d'un système (erreur statique, erreur de trainage). Connaître par cœur et savoir appliquer le théorème de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard.
- Savoir estimer la **rapidité** d'un système en relevant le temps de réponse à 5% $T_{r5\%}$.
- Savoir estimer l'**amortissement** d'un système en calculant $D_{1\%}$.

1 Les systèmes automatisés

1.1 Définition

Un système automatisé (ou automatique) est un système capable de réaliser des opérations pour lesquelles l'intervention humaine est limitée à la programmation du système et à son réglage. Les entrées sont des grandeurs qui sont issues du milieu extérieur. Ce sont les causes. Les sorties fournissent la réponse du système. Ce sont les effets.

Les systèmes automatisés permettent entre autres :

- De réaliser des tâches complexes ou/ou dangereuses pour l'homme ;
- De réaliser des tâches répétitives et/ou pénibles ;
- D'accroître la précision des opérations et des mesures.



FIGURE 1 – Rosetta, sonde d'exploration spatiale (complexité, dangerosité) – robot de désherbage viticole (répétitivité, pénibilité) – Robot chirurgical (précision)

1.2 Classification

Les systèmes automatisés sont souvent classés en fonction de la nature de leurs informations de commande et de mesure. Ces informations peuvent être de deux types : **analogiques ou discrètes**.

À retenir

Une information est **analogique** si elle varie de manière continue dans le temps. Elle peut donc prendre une infinité de valeurs.

Une information **discrètes** ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Parmi celles-ci, on distingue :

- Les informations **logiques** (ou binaires), associées à l'état d'une variable ne pouvant prendre que deux valeurs (« vrai/faux », « 0/1 » ...)
- Les informations **numériques**, généralement issues du traitement d'une information analogique (échantillonnage ou codage). Elles s'écrivent sous la forme d'un mot binaire constitué de plusieurs bits.

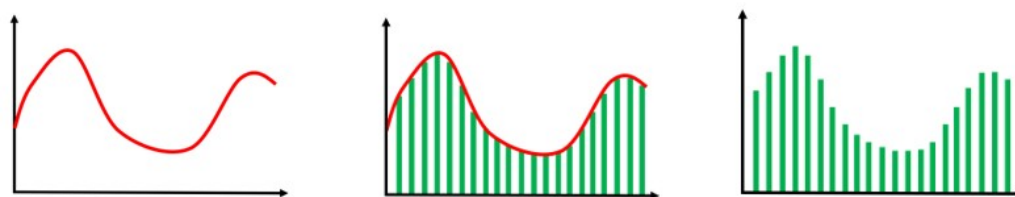


FIGURE 2 – Transformation d'un signal analogique (gauche) vers numérique (droite)

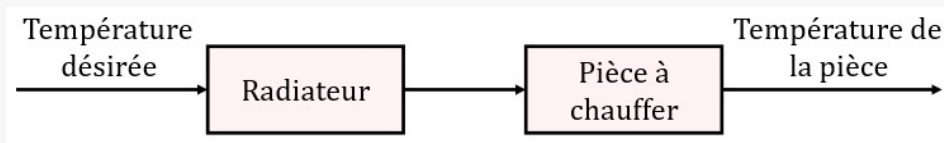
1.3 Notion de système asservi

Le principe d'un asservissement est de mesurer en permanence l'écart entre la valeur réelle de la grandeur à asservir et la valeur de consigne que l'on désire atteindre, et de calculer la commande appropriée à appliquer pour réduire cet écart. Les signaux traités peuvent être analogiques ou numériques et leurs valeurs ne peuvent pas être prédéterminées.

Exemple

Prenons pour exemple une pièce que l'on souhaite chauffer à une température définie par l'utilisateur. On considère que la pièce est chauffée par un radiateur électrique.

Le schéma fonctionnel du système de commande de chauffage est le suivant :

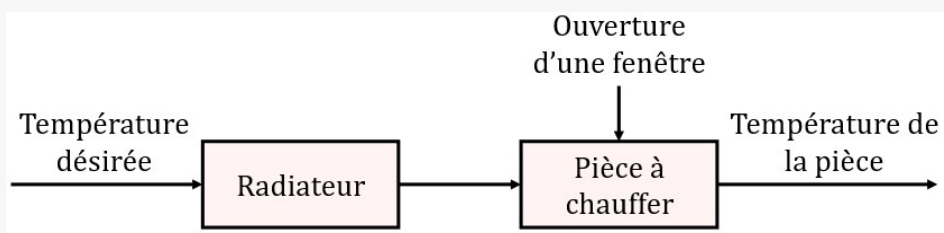


Un système simple peut tout à fait être satisfaisant du point de vue de son comportement s'il n'est pas perturbé. On parle dans ces conditions d'un système en boucle ouverte. **Ce n'est pas un système asservi.**

Cependant lorsque le système est perturbé par un événement extérieur (appelé perturbation), la valeur de la sortie ne correspond plus à la valeur attendue et elle peut être très éloignée de cette valeur.

Exemple

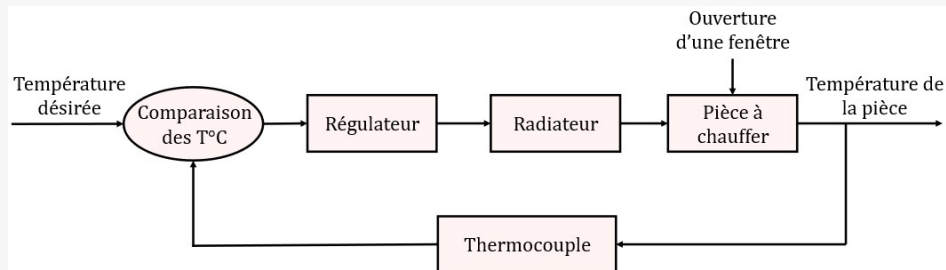
L'ouverture d'une fenêtre de la pièce sur l'extérieur constitue une perturbation sur le système de chauffage de la pièce.



Ainsi pour automatiser le système sans intervention humaine, on introduit une boucle de retour (ou rétroaction). Le système est alors dit en boucle **fermée**.

Exemple

Afin d'automatiser le chauffage de la pièce, on introduit une mesure de la température grâce à un capteur de température (thermocouple), ce qui permet **d'asservir** le système. On détermine la commande à envoyer à partir de la différence entre la température désirée et la température de la pièce à chaque instant.



La boucle de retour est constituée d'un capteur. Elle permet d'évaluer la situation de la chaîne de puissance à chaque instant et fournit un état de la sortie à la chaîne d'information. Cette information y est analysée et comparée à la consigne d'entrée. La chaîne d'information élabore ensuite un signal qui permet de commander la chaîne de puissance.

On distingue deux types de systèmes asservis :

- Les systèmes **régulateurs**, pour lesquels la consigne d'entrée est fixe (exemple : régulateur de vitesse, de température...);
- Les systèmes **suiveurs**, pour lesquels la commande varie continuellement (exemple : radar de poursuite, missile...).

1.4 Représentation schématisée d'un système asservi

Afin de représenter un système automatisé, on utilise un **schéma-bloc fonctionnel** mettant en relation les entrées et sorties du système et permettant de comprendre la structure du système d'un point de vue commande.

Un schéma bloc fonctionnel consiste en une représentation graphique abrégée des relations de cause à effet entre le signal d'entrée et le signal de sortie d'un système et des composants d'un système.

On distingue les quatre éléments graphiques suivants :

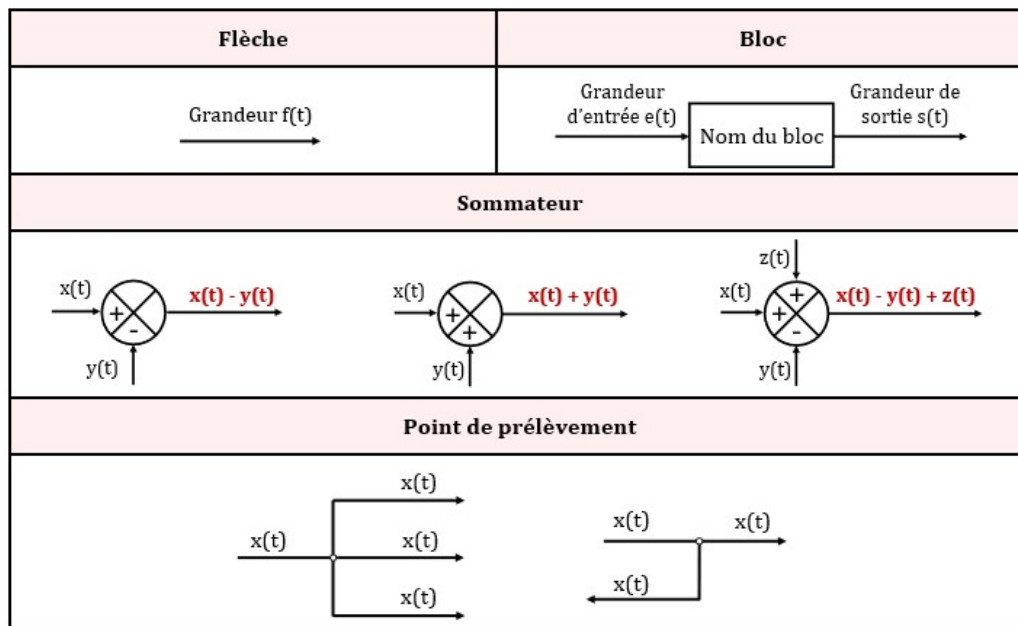


FIGURE 3 – Éléments de la représentation par schéma bloc

La structure classiquement utilisé pour représenter un système asservi est la suivante (à connaître)

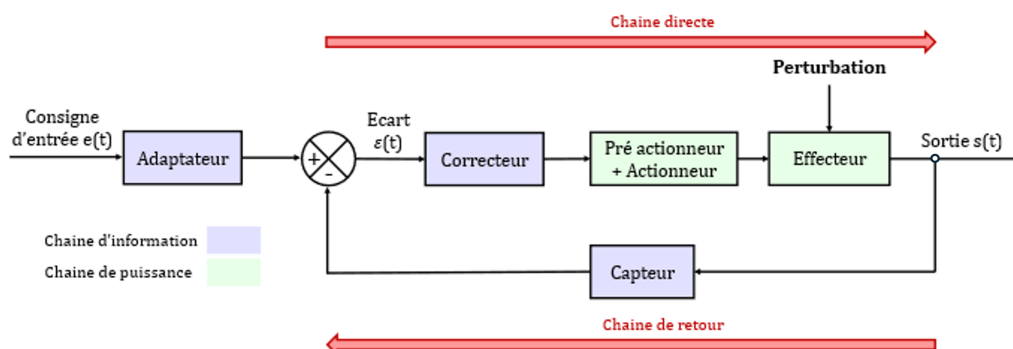
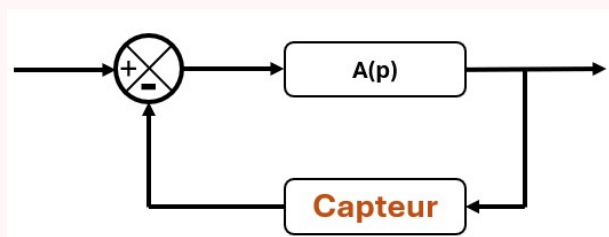


FIGURE 4 – Schéma bloc d'un système asservi

À retenir

Un système est asservi si et seulement si les grandeurs d'entrée et de sortie ont la même unité et si le système comporte un capteur dans la boucle de retour.



2 Modélisation des SLCI

2.1 Hypothèses et définition : « SLCI »

Dans le cadre de la modélisation des systèmes, nous nous intéresserons uniquement aux systèmes dits **linéaires, continus et invariants**, regroupés sous l'appellation **SLCI** (Systèmes Linéaires Continus et Invariants).

2.1.1 Systèmes Linéaires

Le comportement d'un système linéaire peut se traduire par le fait que « l'effet est proportionnel à la cause ». La notion de linéarité repose sur les principes de proportionnalité et de superposition.

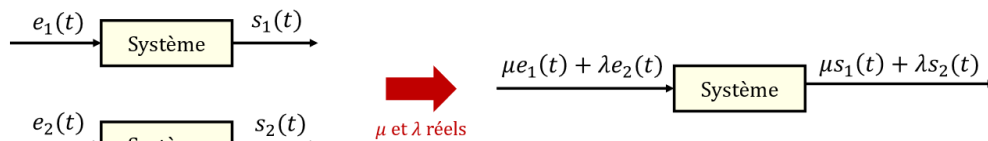


FIGURE 5 – Système linéaire

2.1.2 Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui décrivent son fonctionnement peuvent évoluer à tout instant, sans interruption. À l'inverse, dans un système discret, ces grandeurs ne sont considérées qu'à des instants séparés. On parle également de système analogique pour désigner un système continu.

2.1.3 Systèmes Invariants

Un système est dit invariant lorsque son comportement ne dépend pas de l'instant auquel on l'observe ou auquel on lui applique une entrée. Autrement dit, les mêmes conditions d'entrée produisent la même réponse, quel que soit le moment où elles sont appliquées.

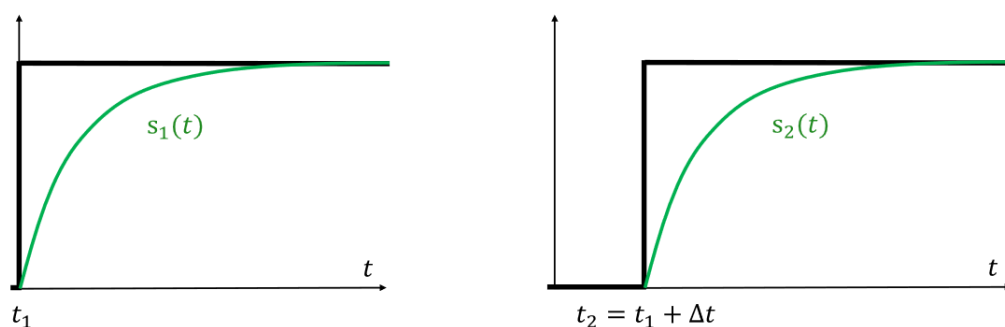


FIGURE 6 – Système invariant

2.1.4 Principe de modélisation des SLCI

Pour étudier le comportement d'un système réel, il est nécessaire de disposer d'un modèle permettant de décrire mathématiquement la relation entre son **entrée** et sa **sortie**.

Dans le cas des SLCI, les hypothèses de **linéarité**, de **continuité** et d'**invariance dans le temps** permettent de représenter le système par une **équation différentielle linéaire à coefficients constants** :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

avec :

- $e(t)$: le **signal d'entrée** ;
- $s(t)$: le **signal de sortie** ;
- a_i et b_i : des **coefficients constants** caractérisant le système.

Cette équation constitue un **modèle mathématique** du système. Elle permet de traduire les lois physiques qui régissent son comportement et de **prévoir sa réponse** à différentes sollicitations, sans avoir à réaliser systématiquement des essais sur le système réel.

Construction du modèle

Deux approches principales peuvent être utilisées pour établir le modèle d'un système :

- Le **modèle de connaissance** est obtenu à partir des **lois physiques** qui régissent le système. Par exemple, les lois de la mécanique, de l'électricité ou de la thermique permettent d'établir directement les équations décrivant son fonctionnement.
- Le **modèle de comportement** est obtenu à partir de **résultats expérimentaux**. On observe la réponse du système à différentes sollicitations afin d'identifier une relation mathématique permettant de reproduire au mieux son comportement.

Quel que soit le type de modèle utilisé, celui-ci doit être **suffisamment fidèle au comportement réel du système**. Il est donc nécessaire de le **valider expérimentalement** en comparant ses prédictions aux résultats obtenus sur le système réel.

Exploitation du modèle

Une fois le modèle établi et validé, il devient possible d'étudier théoriquement les **performances du système**, notamment sa stabilité, sa précision, sa rapidité et son amortissement. Ces performances peuvent ensuite être comparées aux **exigences du cahier des charges**.

La modélisation constitue ainsi un véritable **outil d'aide à la conception**. Elle permet notamment de **choisir et dimensionner les composants**, de comparer différentes solutions techniques et d'optimiser le fonctionnement du système **avant sa fabrication**. Elle permet ainsi de limiter les essais expérimentaux et de réduire le risque de modifications coûteuses lors de la réalisation du prototype.

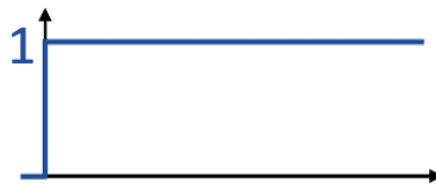
2.2 Les principaux modèles

2.2.1 Modélisation des entrées d'un système

Afin de déterminer les qualités et les performances d'un système asservi, il convient de les soumettre à des entrées afin d'observer leur comportement. Ainsi afin de déterminer théoriquement et/ou expérimentalement le comportement et la sortie d'un système asservi, on se placera dans les conditions suivantes :

- **Échelon unitaire** : Ce type de sollicitation permet de vérifier que le système est capable de tendre vers la valeur de la consigne en régime permanent.

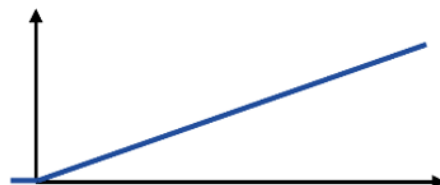
$$\begin{cases} u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ u(t) = 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



- **Rampe de pente a** : Ce type de signal d'entrée permet d'évaluer si le système est un bon suiveur, c'est-à-dire qu'il suit les variations de la consigne.

$$\begin{cases} f(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ f(t) = a.t \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Ou encore : $f(t) = a.t.u(t)$



- **Impulsion de Dirac** : Ce signal d'entrée modélise une action s'exerçant pendant un temps très court. Elle ne peut pas être réalisée physiquement et fait partie du domaine de la simulation.

$$\delta(t) \text{ avec } \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$



- **Sinusoïde** : Ce type de signal d'entrée modélise une sollicitation oscillante.

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = E_0 \sin(\omega t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Ou encore : $f(t) = E_0 \sin(\omega t) u(t)$



La composition de ces différents signaux canoniques permet de créer des signaux composés, notamment des signaux en créneau ou en trapèze.

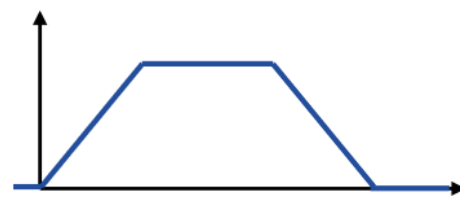
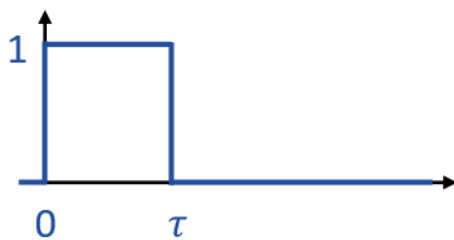


FIGURE 7 – Composition de signaux canoniques

2.2.2 Modélisation des systèmes par un gain pur

Une grande partie des systèmes peut être modélisée par une constante, c'est-à-dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie : $s(t) = K.e(t)$. La constante de proportionnalité représente le **gain** du système.

On peut notamment modéliser par un gain la majorité des éléments suivants : les éléments de transmission de puissance (réducteur, engrenages...), les pré-actionneurs (variateur, hacheur...), les capteurs (potentiomètre...).

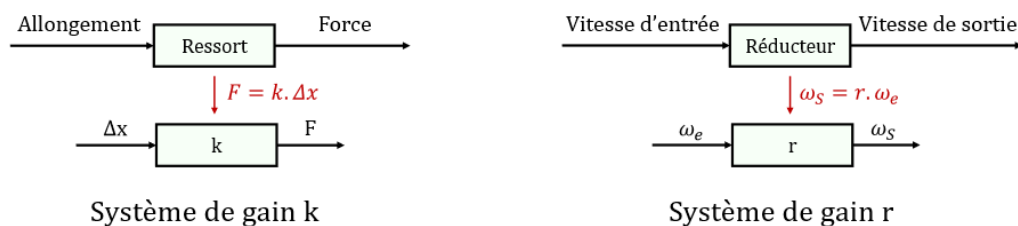


FIGURE 8 – Exemples de systèmes modélisés par un gain pur

3 Modélisation des systèmes du 1^{er} ordre

Un système du premier ordre peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre 1, dont la forme générale s'écrit :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec :

- τ la constante de temps du système (s) ;
- K le gain statique du système.

Exemple

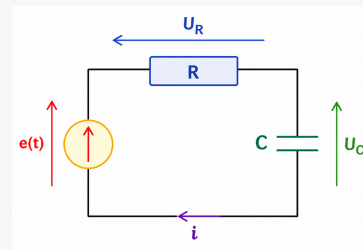
Modélisation d'un circuit RC

Les équations électriques du circuit sont les suivantes :

$$\begin{cases} e(t) = u_R(t) + u_C(t) \\ i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \\ u_R(t) = R \cdot i(t) \end{cases}$$

On en déduit l'équation caractéristique suivante :

$$RC \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t)$$



On obtient une équation différentielle d'ordre 1. La constante de temps du système vaut $\tau = RC$ et le gain statique vaut $K = 1$.

3.1 Résolution temporelle des systèmes du 1^{er} ordre

À retenir

La solution générale d'une équation différentielle linéaire est obtenue en additionnant :

- la solution de l'équation **homogène** ;
- une **solution particulière** de l'équation avec second membre.

La solution générale s'écrit donc :

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t)$$

Démonstration

La résolution des équations différentielles sera abordée en cours de mathématiques, de physique et de numérique.

Exemple

Réponse temporelle d'un système du premier ordre soumis à un échelon

Considérons un système du premier ordre décrit par l'équation différentielle :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

On soumet le système à un échelon d'amplitude E_0 : $e(t) = E_0 \cdot u(t)$ soit, pour $t \geq 0$: $e(t) = E_0$

1. Résolution de l'équation homogène :

$$\tau \cdot \frac{ds_h(t)}{dt} + s_h(t) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$s_h(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A est une constante déterminée à partir des conditions initiales.

2. Recherche d'une solution particulière

Pour $t \geq 0$, l'entrée est constante : $e(t) = E_0$. On recherche donc une solution particulière constante :

$$s_p(t) = S_p$$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\tau \cdot 0 + S_p = K \cdot E_0$$

d'où :

$$s_p(t) = K \cdot E_0$$

La solution générale est donc la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t)$$

soit :

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K \cdot E_0$$

Sous les conditions de Heaviside, le système est initialement au repos :

$$s(0) = 0$$

On obtient alors :

$$0 = A + K \cdot E_0$$

d'où :

$$A = -K \cdot E_0$$

Finalement, la réponse temporelle du système à un échelon d'amplitude E_0 est :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

3.1.1 Tracé et identification de la réponse temporelle d'un système du 1^{er} ordre

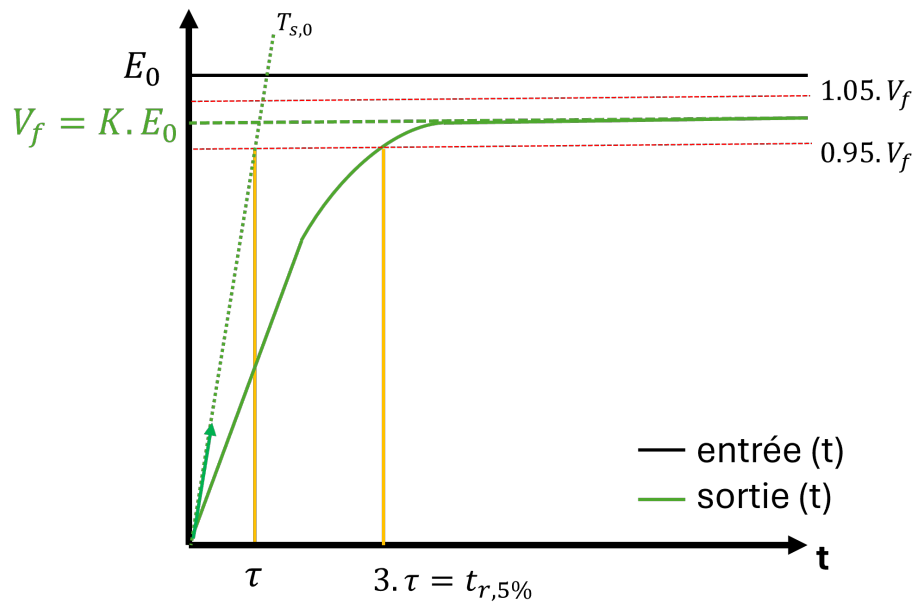


FIGURE 9 – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

À retenir

- Valeur finale :

$$V_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = s(\infty) = K.E_0$$

- Gain statique :

$$K = \frac{s(\infty)}{E_0} = \frac{V_f}{E_0}$$

- Constante de temps :

- **Détermination graphique :** la tangente à la courbe au point $t = 0$, notée $T_{s,0}$, a pour équation :

$$T_{s,0}(t) = s(0) + s'(0).(t - 0) = \frac{K.E_0}{\tau}.t$$

Elle coupe l'asymptote $s(\infty) = K.E_0 = V_f$ au temps $t = \tau$:

$$T_{s,0}(t = \tau) = K.E_0 = V_f$$

- **Détermination à partir du temps de réponse à 5 % :**

$$s(3\tau) = 0.95V_f \quad \Rightarrow \quad t_{r,5\%} = 3\tau$$

4 Modélisation des systèmes du 2^{ème} ordre

Un système du deuxième ordre peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre 2, dont la forme générale s'écrit :

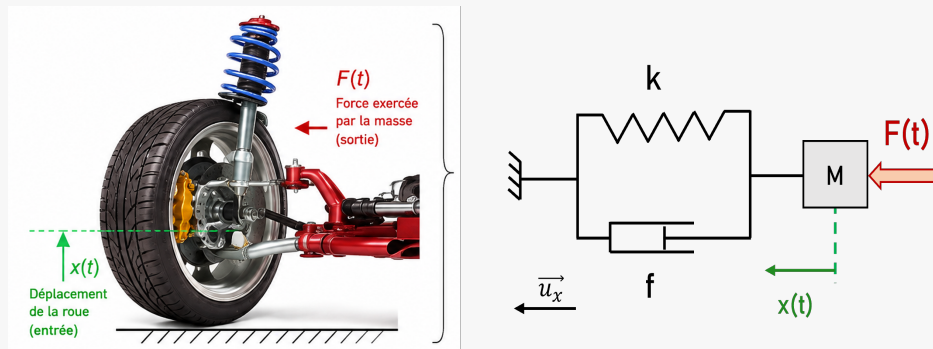
$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec :

- ω_0 la pulsation propre du système (rad/s) ;
- ξ le coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- K le gain statique du système.

Exemple

Système masse-ressort d'une voiture



La masse m est soumise à :

- L'action de la force F : $\vec{F} = F(t) \cdot \vec{u}_x$;
- L'action du ressort : $\vec{F}_{ressort} = -k \cdot x(t) \cdot \vec{u}_x$;
- L'action de l'amortisseur : $\vec{F}_{amortisseur} = -f \cdot \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{u}_x$.

Le Principe Fondamental de la Dynamique (abordé en deuxième année) appliqué à la masse m donne l'équation suivante :

$$M \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -f \cdot \frac{dx(t)}{dt} - k \cdot x(t) + F(t) \iff \boxed{\frac{m}{k} \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{f}{k} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{1}{k} \cdot F(t)}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 2. Par identification, on trouve que la pulsation propre du système vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, le coefficient d'amortissement vaut $\xi = \frac{f}{2\sqrt{k m}}$, et le gain statique du système vaut $K = \frac{1}{k}$.

4.1 Résolution temporelle des systèmes du 2^{ème} ordre

Les expressions analytiques des réponses temporelles seront étudiées en mathématiques et en physique. En SI, on s'intéresse principalement à l'identification du comportement temporel du

système.

4.1.1 Tracé et identification de la réponse temporelle d'un système du 2^{ème} ordre

Pour un système du deuxième ordre soumis à un échelon, la réponse temporelle dépend principalement du coefficient d'amortissement ξ .

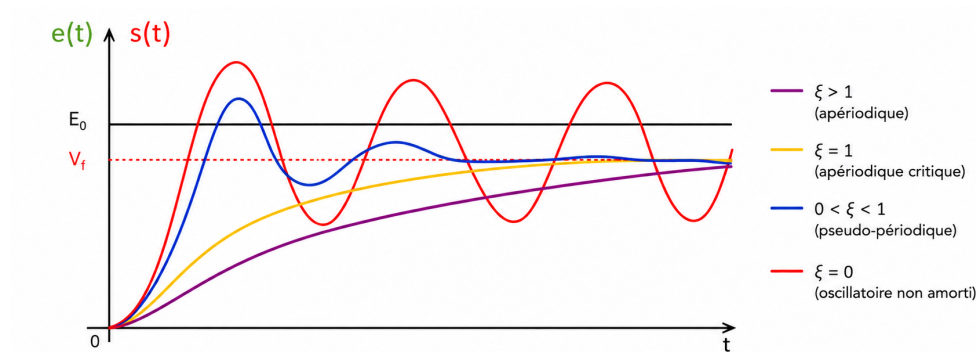


FIGURE 10 – Réponse à un échelon d'un système du deuxième ordre pour différente valeur d'amortissement ξ

À retenir

La réponse à un échelon d'un système d'ordre 2 a une **tangente à l'origine nulle**, ce qui permet de le différencier d'un système du premier ordre.

- $\xi > 1$: régime **apériodique**. La réponse évolue progressivement vers sa valeur finale, sans oscillation ni dépassement. Plus ξ est grand, plus la réponse est lente ;
- $\xi = 1$: régime **apériodique critique**. La réponse rejoint sa valeur finale sans oscillation et constitue le compromis entre rapidité et absence de dépassement ;
- $0 < \xi < 1$: régime **pseudo-périodique**. La réponse présente des **oscillations amorties** autour de sa valeur finale. Plus ξ diminue, plus les oscillations sont importantes ;
- $\xi = 0$: régime **oscillatoire non amorti**. La réponse oscille indéfiniment autour de sa valeur d'équilibre, avec une amplitude constante.

Identification

À partir de la réponse temporelle d'un système du deuxième ordre soumis à un échelon d'amplitude E_0 , il est possible d'identifier les principaux paramètres du modèle :

 À retenir**1. Identification du gain statique K**

À partir de la valeur finale V_f de la réponse :

$$V_f = s(\infty) = K.E_0$$

On en déduit :

$$K = \frac{V_f}{E_0}$$

2. Identification du coefficient d'amortissement ξ

On mesure le premier dépassement D_1 :

$$D_1(\%) = \frac{s_{\max} - V_f}{V_f} \times 100$$

Le coefficient d'amortissement ξ est ensuite déterminé à partir de la relation :

$$D_1(\%) = 100.e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ou graphiquement à l'aide de l'**abaque du dépassement en fonction de ξ** .

3. Identification de la pulsation propre ω_0

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, on mesure la pseudo-période T_p . On en déduit la pseudo-pulsation ω_p

Puis, connaissant ξ et ω_p :

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

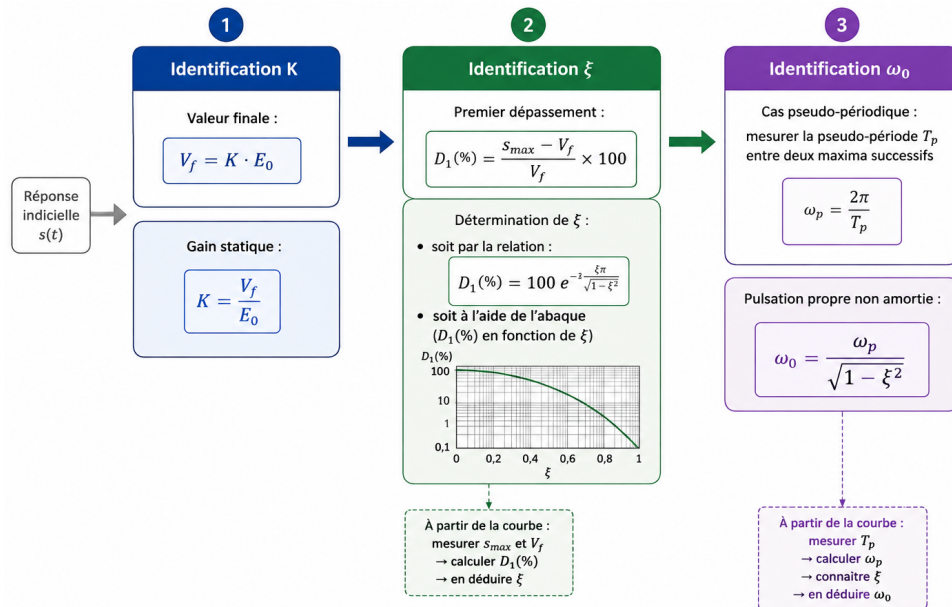


FIGURE 11 – Identification de paramètre d'un système du 2ème ordre d'après la réponse à un échelon du système

4.2 Transformée de Laplace

4.2.1 Définition de la transformée de Laplace

L'écriture des SLCI sous forme d'équations différentielles est adaptée à la description physique du système, mais elle est moins pratique pour la simulation et l'étude de ses performances. Pour simplifier l'étude des systèmes, on utilise la **transformée de Laplace**, qui permet de passer du domaine temporel au **domaine de Laplace**.

La transformée de Laplace est une application mathématique qui associe à une fonction temporelle une fonction définie dans le domaine de Laplace. Ce changement de domaine présente un intérêt majeur : les **dérivées temporelles sont transformées en produits par la variable de Laplace**. Ainsi, une équation différentielle peut être transformée en une **équation algébrique / polynomiale**, beaucoup plus simple à manipuler. La transformée de Laplace constitue ainsi un outil essentiel pour **analyser, simuler et étudier les performances des SLCI**.

À retenir

On appelle transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, la fonction $\mathcal{L}(f(t))$ telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{avec } p \in \mathbb{C} \text{ tel que } p = \sigma + j\omega$$

Remarque :

- Par habitude on note la transformée de Laplace d'une fonction par une **majuscule** ($e(t) \rightarrow E(p)$, $s(t) \rightarrow S(p)$).
- Dans les pays anglo-saxons, la variable de Laplace est notée « s » au lieu de « p ». Les logiciels de simulation Matlab et Scilab utilisent cette notation.
- On note la transformée inverse $\mathcal{L}^{-1}$, telle que : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$

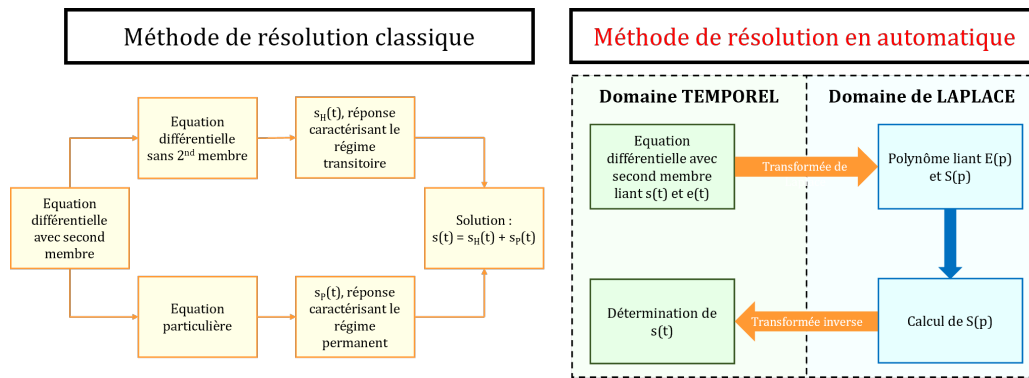


FIGURE 12 – Comparaison des méthodes de résolution d'équations différentielles

4.2.2 Transformées de Laplace usuelles

Dans la pratique, on évite de calculer la transformée de Laplace en utilisant sa définition. On se sert directement des résultats de transformées de Laplace pour les fonctions usuelles. Le tableau ci-dessous est à connaître.

Fonction $f(t)$		$f(t)$	$F(p)$
Impulsion de Dirac		$\delta(t)$	1
Echelon unitaire		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe de pente 1		$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Exponentielle décroissante	/	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

FIGURE 13 – Transformées de Laplace usuelles

Démonstration

Transformée de Laplace d'un échelon

Soit $f(t) = f_0$ avec f_0 une constante. On cherche $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

$$F(p) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{t=0}^{+\infty} f_0 e^{-pt} dt = f_0 \int_{t=0}^{+\infty} e^{-pt} dt$$

Comme p est indépendant du temps et que l'on intègre par rapport au temps, alors p est « vu » comme une constante lors de l'intégration. On a alors :

$$F(p) = f_0 \times \frac{-1}{p} [e^{-pt}]_0^{+\infty} = -\frac{f_0}{p} \times \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} - 1 \right) = -\frac{f_0}{p} \times (0 - 1) = \frac{f_0}{p}$$

4.2.3 Propriétés

Généralement, nous faisons l'hypothèse des **conditions de Heaviside**, c'est-à-dire que le système est initialement au repos. Ainsi, les conditions initiales sont nulles et la transformée de Laplace des dérivées se simplifie, ce qui permet de passer plus facilement de l'équation différentielle à une équation algébrique.

À retenir

Conditions de Heaviside

On dit qu'une fonction vérifie les conditions de Heaviside si cette fonction et toutes ses dérivées temporelles sont nulles à l'origine, c'est-à-dire que les **conditions initiales sont nulles** :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{df}{dt}(0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^n f}{dt^n}(0) = 0 \end{cases}$$

La transformée de Laplace possède les propriétés suivantes :

- **Unicité** :
 - À une fonction $f(t)$ correspond une fonction $F(p)$ unique ;
 - À une fonction $F(p)$ correspond une fonction $f(t)$ unique.
- **Linéarité** :

$$\forall(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\lambda.f(t) + \mu.g(t)) = \lambda.\mathcal{L}(f(t)) + \mu.\mathcal{L}(g(t))$$

- **Dérivation** :

À retenir

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p.F(p) - f(0)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2.F(p) - p.f(0) - \frac{df(0)}{dt}}$$

Dans les **conditions de Heaviside**, dériver par rapport à t dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n.F(p)}$$

Démonstration

Transformée de Laplace d'une dérivée de fonction

Soit f une fonction du temps bornée de transformée de Laplace $F(p)$. On cherche $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)$.

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt$$

On procède par intégration par parties en prenant $u(t) = e^{-pt}$ et $v'(t) = \frac{df(t)}{dt}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) &= [f(t) \cdot e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_{t=0}^{+\infty} (-p) \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \cdot e^{-pt} - f(0) + p \int_{t=0}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = -f(0) + p \cdot F(p) \end{aligned}$$

- Intégration :

À retenir

Dans les **conditions de Heaviside**, intégrer par rapport à t dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Ainsi, la fonction de transfert d'un intégrateur pur (permettant d'intégrer une fois un signal), possède la fonction de transfert suivante :

$$\boxed{\mathcal{L}(\text{intégrateur}) = \frac{1}{p}}$$

4.2.4 Théorèmes

À retenir

Théorème de la valeur finale (TVF)

Le théorème de la valeur finale permet de déterminer la valeur d'une fonction en régime permanent (quand $t \rightarrow +\infty$) à partir de sa transformée de Laplace $F(p)$, et ce sans nécessairement connaître $f(t)$.

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)}$$

Attention : Le TVF ne s'applique que si le système est STABLE !

À retenir

Théorème de la valeur initiale (TVI)

Le théorème de la valeur initiale permet de connaître la valeur de $f(0)$ à partir de $F(p)$, sans nécessairement connaître $f(t)$.

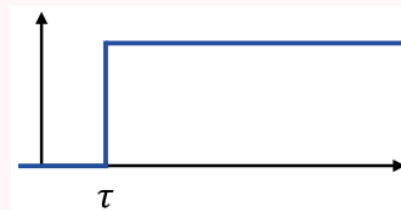
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

À retenir

Théorème du retard

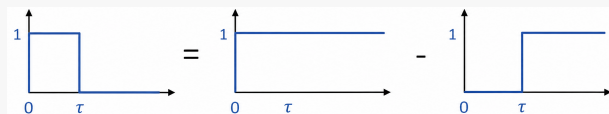
Soit une fonction $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$. On cherche la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f(t - \tau))$ de la fonction $f(t)$ subissant un décalage temporel (ou retard) τ .

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)) = e^{-p\tau} \cdot F(p)$$



Exemple

Transformée de Laplace d'un signal en créneau



Le signal d'entrée se décompose de la façon suivante :

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

$$\text{D'où : } E(p) = \mathcal{L}(e(t)) = \mathcal{L}(u(t) - u(t - \tau)) = \mathcal{L}(u(t)) - \mathcal{L}(u(t - \tau))$$

$$E(p) = \frac{1}{p} - e^{-p\tau} \cdot \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{p} - e^{-p\tau} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

5 Fonction de transfert – représentation par schéma-blocs

5.1 Fonction de transfert

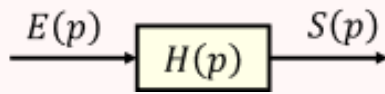
Rappel : l'équation différentielle d'un SLCI peut se mettre sous la forme suivante :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

La transformation de cette équation différentielle en équation polynomiale (passage dans le domaine de Laplace) permet de déterminer une fonction appelée **fonction de transfert** qui caractérise le comportement d'un SLCI.

À retenir

On appelle **fonction de transfert** d'un système la relation de la sortie sur l'entrée, toutes deux exprimées dans le domaine symbolique de Laplace, telle que :



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

La fonction de transfert représente le comportement du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie du système.

Après passage dans le domaine de Laplace, l'équation précédente devient :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + \dots + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + \dots + b_0 \cdot E(p)$$

$$\Leftrightarrow (a_n \cdot p^n + \dots + a_0) \cdot S(p) = (b_m \cdot p^m + \dots + b_0) \cdot E(p)$$

Soit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_0}$$

On appelle « **pôles** » les racines du dénominateur et « **zéros** » les racines du numérateur.

À retenir

Forme canonique

La forme canonique d'une fonction de transfert consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert, pour la mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{b'_m \cdot p^m + \dots + 1}{a'_n \cdot p^{n-\alpha} + \dots + 1}$$

Avec :

- α la classe du système ;
- n l'ordre du système (identique à l'ordre de l'équation différentielle) ;
- K le gain statique.

5.2 Fonction de transfert des système usuels

5.2.1 Fonction de transfert 1^{er} ordre

Considérons un système du premier ordre décrit par l'équation différentielle :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace sous conditions initiales nulles :

$$\tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$$

On factorise par $S(p)$:

$$S(p)(1 + \tau \cdot p) = K \cdot E(p)$$

À retenir

La fonction de transfert sous forme canonique d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Avec :

- τ la constante de temps du système (s) ;
- K le gain statique du système.

5.2.2 Fonction de transfert du 2^{ème} ordre

Considérons un système du deuxième ordre décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace sous conditions initiales nulles :

$$\frac{p^2}{\omega_0^2} \cdot S(p) + \frac{2 \cdot \xi \cdot p}{\omega_0} \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$$

On factorise par $S(p)$:

$$S(p) \left(1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) = K \cdot E(p)$$

À retenir

La fonction de transfert sous forme canonique d'un système du deuxième ordre est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Avec :

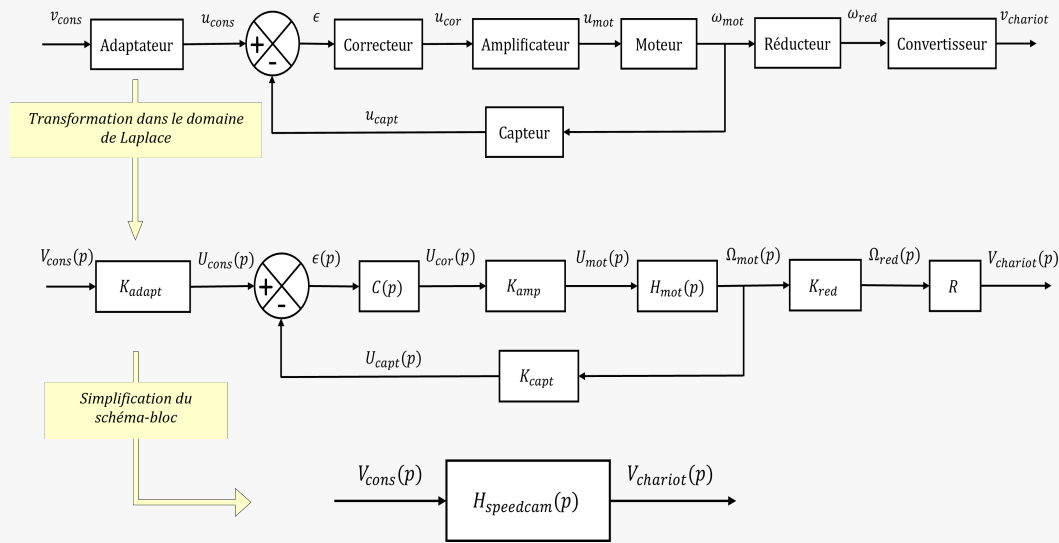
- ω_0 la pulsation propre non amortie du système (rad/s) ;
- ξ le coefficient d'amortissement du système ;
- K le gain statique du système.

5.3 Modélisation par schéma-blocs

Nous avons vu qu'un système complexe pouvait être décrit par un schéma-blocs fonctionnel dans lequel les noms des constituants sont inscrits dans des blocs. En automatique, on construit des schéma-blocs en remplaçant le nom des composants par leur fonction de transfert.

Exemple

Schéma-blocs de la caméra de poursuite Speedcam



5.3.1 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé

Les systèmes asservis sont représentés par un schéma-blocs avec une boucle de rétroaction. On identifie notamment :

- La **chaîne directe** $FTCD(p)$ est la fonction de transfert entre le comparateur et le point de prélèvement.
- La **chaîne de retour** $FTCR(p)$ est la fonction de transfert entre le point de prélèvement et le comparateur.

Pour étudier les performances d'un système asservi et caractériser son comportement global, il est nécessaire de déterminer la relation entre l'entrée et la sortie. Cette relation est décrite par la **fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)**, qui constitue la fonction de transfert globale du système.

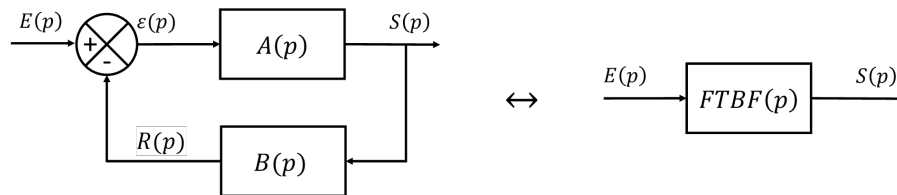


FIGURE 14 – Système bouclé et fonction de transfert en boucle fermée

À retenir

Formule de Black

Dans le cas d'un système bouclé mis sous la forme ci-dessus, la fonction de transfert en boucle fermée s'exprime :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p) \times FTCR(p)}$$

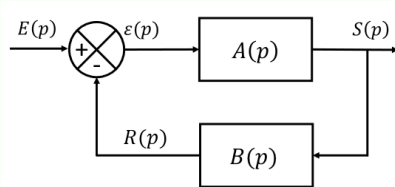
En reprenant le schéma-blocs de la figure précédente, on a directement :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Remarque : Attention aux signes dans le comparateur !

Démonstration

En reprenant le schéma-blocs de la figure précédente, on peut écrire par lecture du schéma :



$$\begin{cases} R(p) = B(p).S(p) \\ S(p) = A(p).\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - R(p) \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} R(p) = B(p).S(p) \\ S(p) = A(p) \times (E(p) - R(p)) \end{cases}$$

$$\iff S(p) = A(p) \times (E(p) - B(p).S(p)) \iff S(p) \times (A(p).B(p) + 1) = A(p) \times E(p)$$

$$\iff \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Remarque : il est important de faire le lien entre le schéma bloc et les équation mathématique

5.3.2 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme le produit de la fonction de transfert de la chaîne directe par celle de la chaîne de retour. Il s'agit donc de la fonction de transfert de la boucle du système d'entrée $\varepsilon(p)$ située en sortie du sommateur lorsque le retour vers celui-ci est coupé.

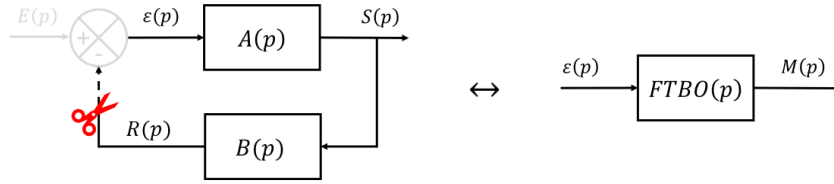


FIGURE 15 – FTBO d'un système bouclé

À retenir

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

Dans le cas d'un système bouclé mis sous la forme ci-dessus, la fonction de transfert en boucle ouverte s'exprime comme le produit de tous les blocs de la boucle (sans prendre en compte la perturbation) :

$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p) \times B(p)$$

Remarques :

- La FTBO est principalement utilisée pour déterminer les conditions de stabilité du système en boucle fermée.
- Dans le cas d'un **retour unitaire**, on peut calculer la FTBF à partir de la FTBO :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

5.4 Manipulation de schéma-blocs

5.4.1 Simplification de blocs en série

La fonction de transfert équivalente à l'association en série de plusieurs blocs est égale au produit des fonctions de transfert de ces blocs.

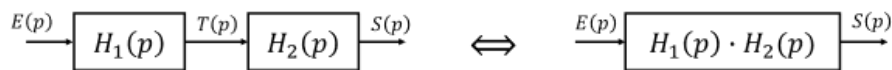


FIGURE 16 – Blocs en série

Démonstration

$$\begin{cases} S(p) = H_2(p).T(p) \\ T(p) = H_1(p).E(p) \end{cases} \Leftrightarrow S(p) = H_2(p).H_1(p).E(p)$$

5.4.2 Simplification de blocs en parallèle

La fonction de transfert équivalente à l'association en parallèle de plusieurs blocs est égale à la somme des fonctions de transfert de ces blocs.

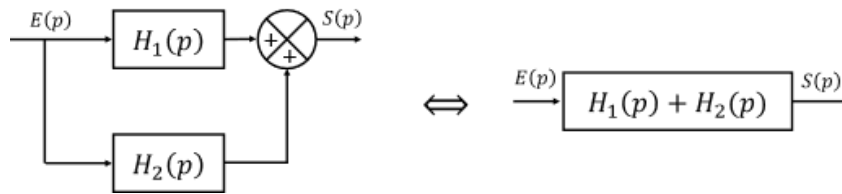


FIGURE 17 – Blocs en parallèle

Démonstration

$$S(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).E(p) = (H_1(p) + H_2(p)).E(p)$$

5.4.3 Déplacement d'un point de prélèvement

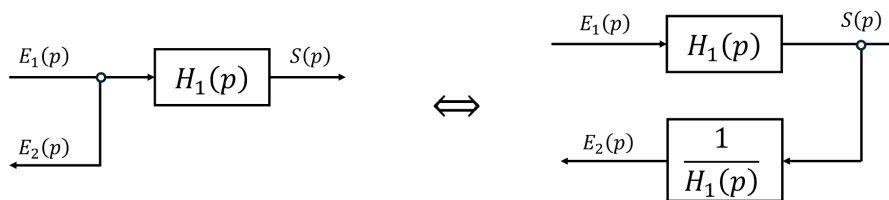


FIGURE 18 – Déplacement d'un point de prélèvement

Démonstration

$$\begin{cases} S(p) = H_1(p).E_1(p) \\ E_1(p) = E_2(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(p) = H_1(p).E_1(p) \\ E_2(p) = \frac{1}{H_1(p)}.S(p) \end{cases}$$

5.4.4 Déplacement d'un sommateur

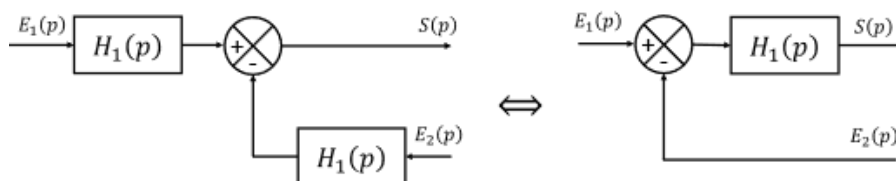


FIGURE 19 – Déplacement d'un sommateur (1/2)

Démonstration

$$S(p) = H_1(p).E_1(p) - H_1(p).E_2(p) = H_1(p).(E_1(p) - E_2(p))$$

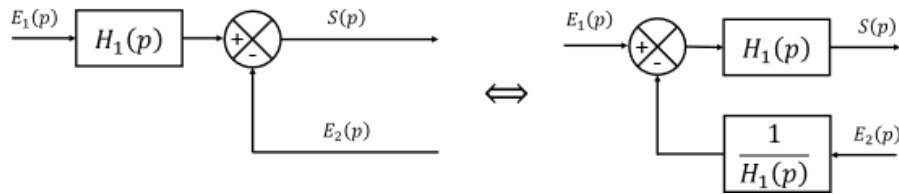


FIGURE 20 – Déplacement d'un sommateur (2/2)

Démonstration

$$S(p) = H_1(p) \cdot E_1(p) - E_2(p) \Leftrightarrow \begin{cases} S(p) = H_1(p) \cdot \left(E_1(p) - \frac{1}{H_1(p)} \cdot E_2(p) \right) \\ S(p) = H_1(p) \cdot E_1(p) - E_2(p) \end{cases}$$

5.5 Fonction de transfert d'un système à deux entrées

Un système réel peut avoir plusieurs entrées qui peuvent avoir un impact sur la sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'entrée principale, mais aussi des entrées souvent considérées comme perturbatrices (frottements, vent ...). On se concentrera ici sur les systèmes à deux entrées.

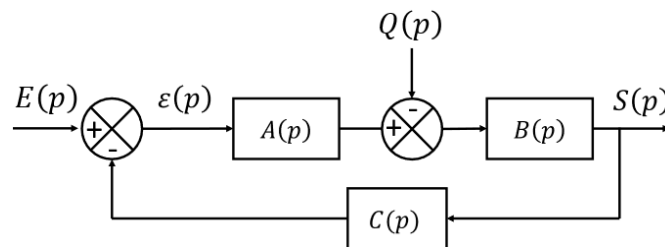


FIGURE 21 – Schéma-blocs d'un système à deux entrées

Pour déterminer la fonction de transfert de ce type de système, on utilise le **principe de superposition** des SLCI. On superpose en effet deux situations : l'étude en poursuite et l'étude en régulation.

5.5.1 Étude en poursuite

L'étude en poursuite consiste à poser que l'entrée perturbée est nulle ($Q(p) = 0$). La fonction de transfert $H_1(p)$ liant la sortie $S_1(p)$ et l'entrée $E(p)$ s'appelle fonction de transfert en poursuite, et le schéma-blocs devient le suivant :

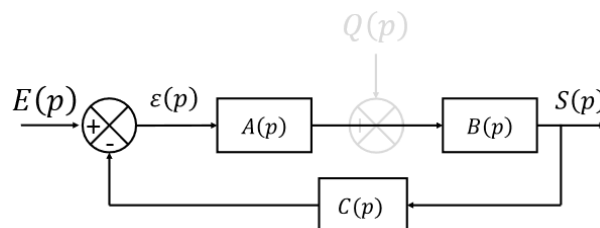


FIGURE 22 – Étude en poursuite

On obtient alors la fonction de transfert en poursuite suivante :

$$H_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

5.5.2 Étude en régulation

L'étude en régulation consiste à poser que l'entrée principale est nulle ($E(p) = 0$). La fonction de transfert $H_2(p)$ liant la sortie $S_2(p)$ et l'entrée $Q(p)$ s'appelle fonction de transfert en régulation, et le schéma-blocs devient le suivant :

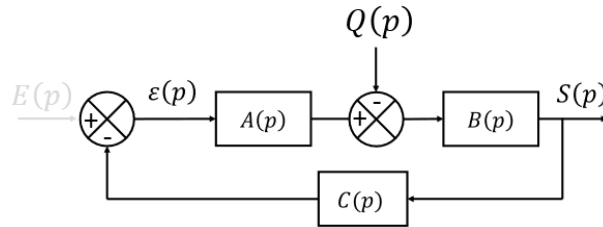


FIGURE 23 – Étude en régulation

Ce schéma-blocs peut être remanié pour être mis sous la forme suivante :

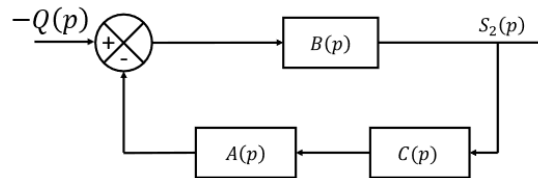


FIGURE 24 – Étude en régulation – remaniement du schéma-blocs

On obtient alors la fonction de transfert en régulation suivante :

$$H_2(p) = \frac{S_2(p)}{Q(p)} = \frac{-B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

5.5.3 Fonction de transfert globale

Le principe de superposition permet d'écrire :

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) \quad \text{soit} \quad S(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).Q(p)$$

$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}.E(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}.Q(p)$$

6 Performances d'un système asservi

Le cahier des charges définit un certain nombre de critères associés à des valeurs permettant de qualifier et quantifier les performances du système. Les principaux sont la stabilité, la précision, la rapidité et l'amortissement.

6.1 Stabilité

6.1.1 Définition

La stabilité est le premier critère à vérifier, car si un système n'est pas stable, l'analyse des autres critères perd tout son sens. Par exemple, si une faible variation de l'entrée provoque une sortie qui devient infiniment grande, il n'est pas pertinent d'étudier la précision ou la rapidité du système, puisque celui-ci ne fonctionne déjà pas de manière stable.

À retenir

Un système est dit stable lorsque toute entrée bornée produit une sortie bornée.

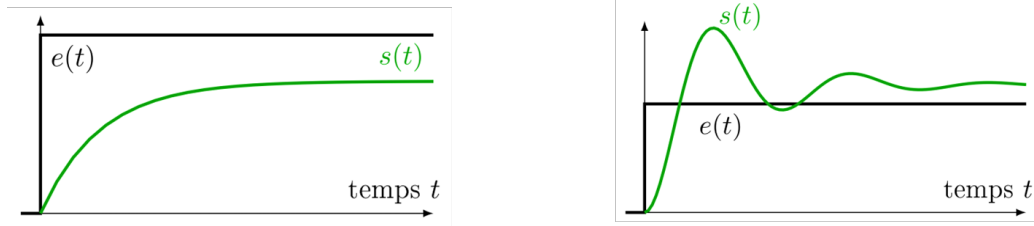


FIGURE 25 – Exemple de réponse à une entrée bornée d'un système stable

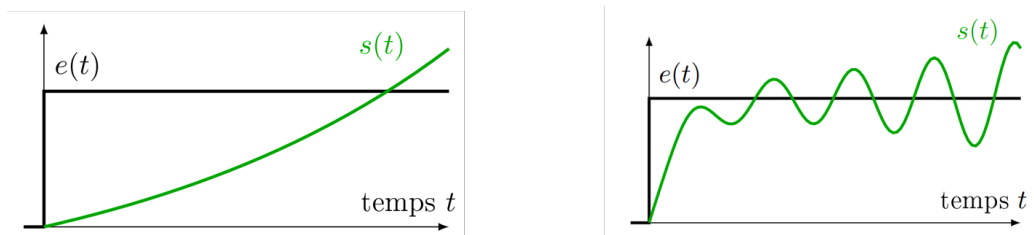


FIGURE 26 – Exemple de réponse à une entrée bornée d'un système instable

6.1.2 Évaluation de la stabilité

À retenir

La stabilité d'un système peut être évaluée selon différentes méthodes :

- **1. Évaluation graphique**

À partir de la réponse temporelle du système pour une entrée en échelon :

- une réponse qui converge vers une valeur finie correspond à un système stable ;
- une réponse qui diverge correspond à un système instable.

- **2. Évaluation par les pôles de la FTBF**

Soit une fonction de transfert en boucle fermée :

$$H_{BF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Les pôles du système sont les racines du dénominateur $D(p)$.

Le système est stable si tous ses pôles ont une partie réelle strictement négative :

$$\forall i, \quad \operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad \implies \quad \text{système stable}$$

Cette méthode est valable quel que soit l'ordre du système.

Pour les systèmes du premier et du deuxième ordre, la stabilité peut également être évaluée directement à partir des coefficients du dénominateur : ils doivent être tous de même signe.

6.2 Précision

6.2.1 Définition

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur souhaitée. Elle est caractérisée par l'erreur en régime permanent, c'est-à-dire lorsque $(t \rightarrow +\infty)$ entre la valeur asymptotique de sortie et la valeur de consigne. Plus cette erreur est faible, plus le système est précis. Lorsque l'erreur en régime permanent est nulle, le système est dit précis.

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} |s(t) - e(t)|$$

On appelle ε l'erreur en régime permanent entre l'entrée et la sortie.

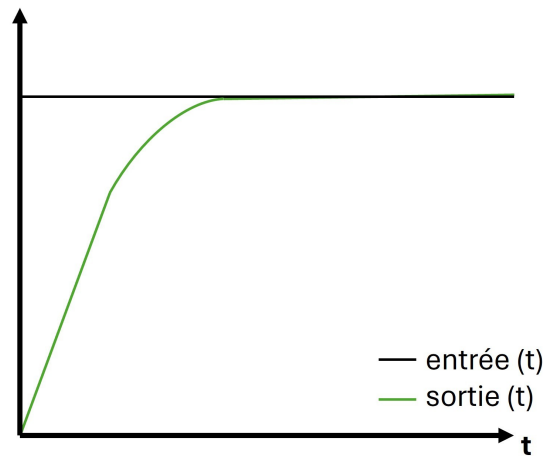


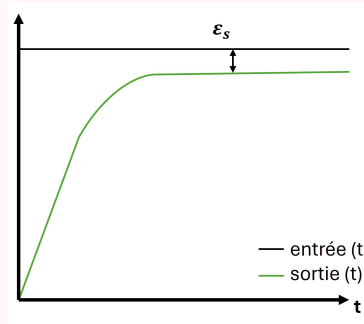
FIGURE 27 – Exemple de réponse de réponse d'un système précis

À retenir

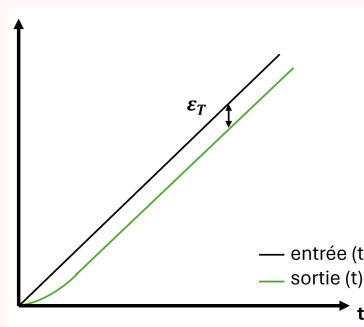
Nous distinguons deux type d'évaluation de la précision d'un système, d'erreurs :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} |s(t) - e(t)|$$

- **Erreur statique** notée ε_s : erreur en régime permanent avec une **entrée en échelon** ; un échelon est une fonction constante lorsque $t \geq 0$, tel que $e(t) = E_0$.



- **Erreur trainage** notée ε_t : erreur en régime permanent avec une **entrée en rampe** ; une rampe est une fonction linéaire, tel que $e(t) = k \times t$.



Nous pouvons également évaluer la précision d'un système en définissant l'erreur statique relative $\varepsilon_{s\%}$ défini comme étant le rapport entre l'erreur statique ε_s et la consigne.

$$\varepsilon_{s\%} = \frac{\varepsilon_s}{E_0}$$

Remarque : le critère de performance d'un système n'a de sens que pour les systèmes asservis.

6.2.2 Évaluation de la précision

À retenir

La précision d'un système peut être évaluée selon deux méthodes :

- **1. Évaluation graphique**

L'erreur en régime permanent correspond à l'écart entre la consigne et la sortie lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} |e(t) - s(t)|$$

Pour une entrée en échelon ou en rampe

- **2. Évaluation par le calcul depuis l'expression de la FTBF**

On détermine l'erreur (après le comparateur dans le schéma bloc) dans le domaine de Laplace :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

L'erreur en régime permanent est alors obtenue à l'aide du théorème de la valeur finale :

Pour une entrée en échelon ($\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{p}$) ou une entrée en rampe ($\mathcal{L}(k.t) = \frac{k}{p^2}$)

6.3 Rapidité

6.4 Définition

À retenir

Un système est dit rapide s'il converge en un temps court au regard de son contexte d'utilisation. La rapidité d'un système est généralement caractérisée par son temps de réponse à 5%, noté $t_{r,5\%}$. Cette mesure est généralement réalisée pour une entrée de type échelon.

Le temps de réponse à 5% correspond au temps nécessaire au système pour atteindre une valeur située dans une bande de $\pm 5\%$ autour de sa valeur finale et y rester.

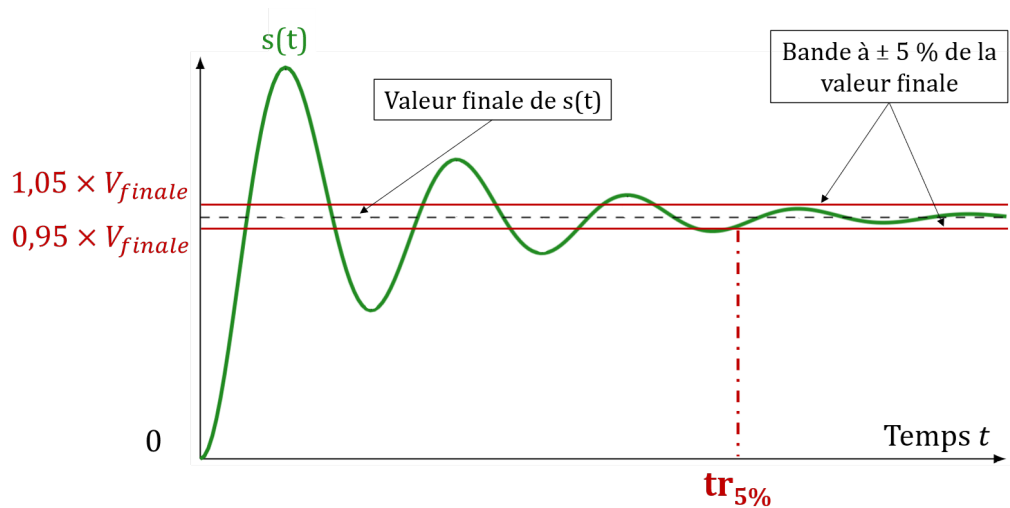


FIGURE 28 – Caractérisation de la rapidité d'un système sur le critère du temps de réponse à 5%

Remarque : Attention aux origines des axes lors de la détermination du temps de réponse à 5% :

- **Abscisse :** si le système reçoit une entrée à un instant $t_0 \neq 0$, il faut retrancher ce temps de retard au temps $t_{r,5\%}$ relevé graphiquement.
- **Ordonnée :** si la sortie ne débute pas à 0, c'est-à-dire si $s(0) \neq 0$, la bande des $\pm 5\%$ doit être déterminée par rapport à la variation totale de la sortie, soit $s(\infty) - s(0)$.

6.4.1 Évaluation de la rapidité

À retenir

La rapidité d'un système est caractérisée par le temps de réponse à 5 %, noté $t_{r,5\%}$, elle peut être évaluée par deux méthodes :

- 1. Évaluation graphique

À partir de la courbe temporelle de la sortie $s(t)$ du système pour une entrée en échelon $e(t)$, on détermine graphiquement le temps de réponse à 5 % :

- 2. Évaluation par le calcul depuis l'expression de la FTBF

- Système du premier ordre :

Pour un système du premier ordre de constante de temps τ :

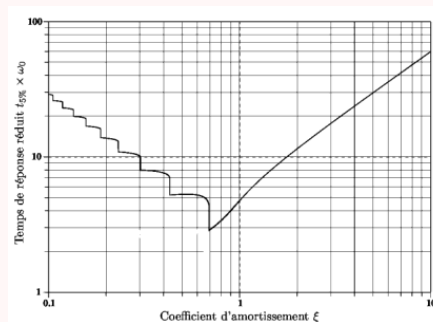
$$t_{r,5\%} \simeq 3.\tau$$

- Système du deuxième ordre :

Pour un système du deuxième ordre, le temps de réponse dépend de la pulsation propre ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ .

Il peut être déterminé à partir de l'abaque donnant :

$$\omega_0.t_{r,5\%} = f(\xi)$$



6.5 Amortissement

Lors d'une variation de la consigne, la sortie peut dépasser la valeur souhaitée et osciller autour de sa valeur finale avant de se stabiliser. L'amortissement caractérise la vitesse à laquelle ces oscillations diminuent. Il est notamment évalué à partir du rapport entre les amplitudes successives des oscillations : plus celles-ci s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.

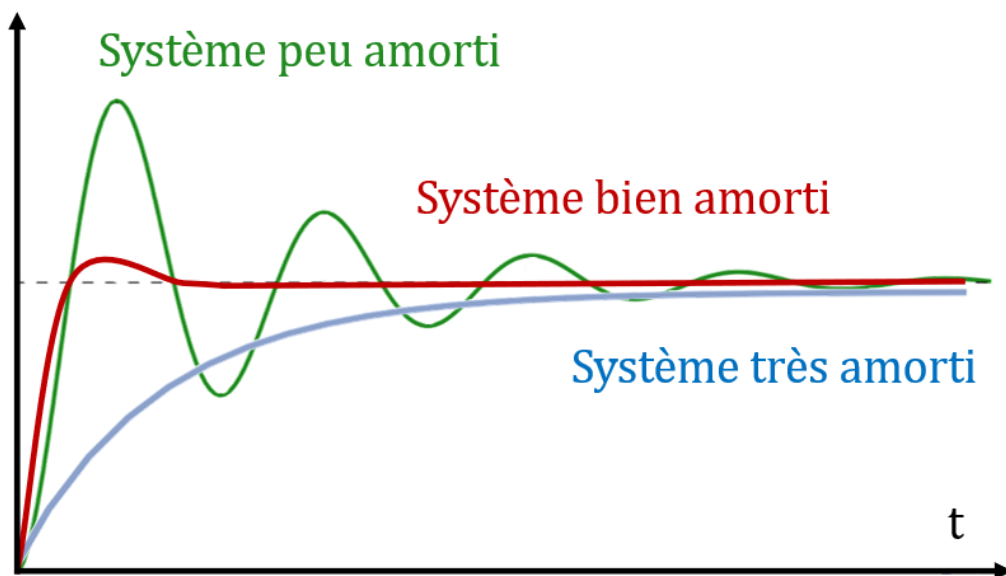


FIGURE 29 – Réponse à un échelon d'un système plus ou moins amorti

À retenir

L'amortissement d'un SLCI est caractérisé par la valeur du premier dépassement relatif $D_{1\%}$ tel que :

$$D_{1\%} = \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)}$$

