

MODÉLISATION SLCI

LAPLACE

Exercice 1 – Transformée de Laplace et TVF

Objectif Utiliser la transformée de Laplace et le théorème de la valeur finale pour déterminer le comportement en régime permanent d'un système.

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{ds(t)}{dt} + 4s(t) = 3e(t)$$

On se place dans les conditions d'Heaviside et on note $E(p)$ et $S(p)$ (respectivement $E(p)$ et $S(p)$) les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$.

Q1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle.

Dans les conditions d'Heaviside, on considère les conditions initiales nulles. On utilise :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = pS(p)$$

L'équation différentielle devient donc :

$$2pS(p) + 4S(p) = 3E(p)$$

soit :

$$(2p + 4)S(p) = 3E(p)$$

Q2. Exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$.

À partir de l'équation précédente :

$$(2p + 4)S(p) = 3E(p)$$

on obtient :

$$S(p) = \frac{3}{2p + 4} E(p)$$

On peut également écrire :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3}{2p + 4} = \frac{3}{2(p + 2)}$$

Q3. Supposons que le système est stable, déterminer la réponse en régime permanent $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$ lorsque le système est soumis à :

- Un échelon tel que $e_1(t) = 2u(t)$;
- Une rampe telle que $e_2(t) = 3tu(t)$.

La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3}{2(p+2)}$$

1. Réponse à un échelon

Pour :

$$e_1(t) = 2u(t)$$

sa transformée de Laplace est :

$$E_1(p) = \frac{2}{p}$$

Ainsi :

$$S_1(p) = H(p)E_1(p) = \frac{3}{2(p+2)} \frac{2}{p}$$

d'où :

$$S_1(p) = \frac{3}{p(p+2)}$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS_1(p)$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{3}{p+2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Ainsi, pour une entrée en échelon d'amplitude 2, la sortie converge vers :

$$\boxed{s_1(+\infty) = 1,5}$$

2. Réponse à une rampe

Pour :

$$e_2(t) = 3t u(t)$$

sa transformée de Laplace est :

$$E_2(p) = \frac{3}{p^2}$$

Ainsi de même :

$$S_2(p) = \frac{9}{2p^2(p+2)}$$

Or :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pS_2(p) = +\infty$$

et donc que la sortie ne possède pas de valeur finale finie. La sortie augmente donc indéfiniment lorsque l'entrée est une rampe.

Q4. À partir de l'expression $S_1(p)$ obtenue précédemment pour la réponse à un échelon $e_1(t)$, déterminer l'expression temporelle $s_1(t)$ par transformation de Laplace inverse.

On pourra utiliser une décomposition en éléments simples.

On cherche à décomposer :

$$S_1(p) = \frac{3}{p(p+2)}$$

sous la forme :

$$\frac{3}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2}$$

En multipliant par $p(p+2)$, on obtient :

$$3 = A(p+2) + Bp$$

soit :

$$3 = (A+B)p + 2A$$

Par identification :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=3 \end{cases}$$

d'où :

$$A = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{3}{2}$$

Ainsi :

$$S_1(p) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} \right)$$

Sachant :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = u(t)$$

et :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+a} \right\} = e^{-at} u(t)$$

on obtient :

$$s_1(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-2t}) u(t)$$

Pour $t \geq 0$:

$$s_1(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-2t})$$

Q5. Retrouver l'expression de la réponse $s_1(t)$ par résolution temporelle de l'équation différentielle, pour une entrée échelon $e_1(t) = 2u(t)$.

Après simplification :

$$\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = \frac{3}{2}e(t).$$

La solution générale est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière.

1. Solution homogène

On résout :

$$\frac{ds_h}{dt} + 2s_h = 0.$$

Sa solution est :

$$s_h(t) = K_h e^{-2t}.$$

2. Solution particulière

On cherche une solution particulière de la même forme que l'entrée : $s_p = K_p$.

En remplaçant dans l'équation avec $e_1(t) = 2$:

$$2K_p = 3$$

d'où :

$$K_p = \frac{3}{2}.$$

3. Solution générale

On obtient :

$$s(t) = \frac{3}{2} + K_h e^{-2t}.$$

Les conditions d'Heaviside imposent :

$$s(0) = 0.$$

Ainsi :

$$0 = \frac{3}{2} + K_h$$

soit :

$$K_h = -\frac{3}{2}.$$

La réponse temporelle est donc :

$$s_1(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-2t})$$

On retrouve exactement le même résultat que celui obtenu par la transformée de Laplace.

Exercice 2 – Transformée de Laplace et TVF – Variante

Objectif Utiliser la transformée de Laplace, la résolution temporelle et le théorème de la valeur finale pour déterminer le comportement temporel et en régime permanent d'un système.

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$3 \frac{ds(t)}{dt} + 9s(t) = 6e(t)$$

On se place dans les conditions d'Heaviside et on note $E(p)$ et $S(p)$ les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$.

Q1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle.

Dans les conditions d'Heaviside, on considère les conditions initiales nulles. On utilise :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = pS(p)$$

L'équation différentielle devient donc :

$$3pS(p) + 9S(p) = 6E(p)$$

soit :

$$(3p + 9)S(p) = 6E(p)$$

Q2. Exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$.

À partir de l'équation précédente :

$$(3p + 9)S(p) = 6E(p)$$

on obtient :

$$S(p) = \frac{6}{3p + 9}E(p)$$

soit :

$$S(p) = \frac{2}{p + 3}E(p)$$

On peut également écrire la fonction de transfert du système :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p + 3}$$

Q3. Supposons que le système est stable. Déterminer la réponse en régime permanent $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$ lorsque le système est soumis à :

- Un échelon tel que $e_1(t) = 2u(t)$;

- Une rampe telle que $e_2(t) = 3t u(t)$.

La fonction de transfert du système est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p+3}$$

1. Réponse à un échelon

Pour :

$$e_1(t) = 2u(t)$$

sa transformée de Laplace est :

$$E_1(p) = \frac{2}{p}$$

Ainsi :

$$S_1(p) = H(p)E_1(p) = \frac{4}{p(p+3)}$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS_1(p)$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{4}{p+3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

2. Réponse à une rampe

Pour :

$$e_2(t) = 3t u(t)$$

sa transformée de Laplace est :

$$E_2(p) = \frac{3}{p^2}$$

Ainsi :

$$S_2(p) = H(p)E_2(p) = \frac{6}{p^2(p+3)}$$

On obtient :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pS_2(p) = +\infty$$

La sortie ne possède donc pas de valeur finale finie. La sortie augmente donc indéfiniment lorsque l'entrée est une rampe.

Q4. À partir de l'expression $S_1(p)$ obtenue précédemment pour la réponse à un échelon $e_1(t)$, déterminer l'expression temporelle $s_1(t)$ par transformation de Laplace inverse.

On pourra utiliser une décomposition en éléments simples.

On cherche à décomposer :

$$S_1(p) = \frac{4}{p(p+3)}$$

sous la forme :

$$\frac{4}{p(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3}$$

En multipliant par $p(p+3)$, on obtient :

$$4 = A(p+3) + Bp$$

soit :

$$4 = (A+B)p + 3A$$

Par identification :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A=4 \end{cases}$$

d'où :

$$A = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad B = -\frac{4}{3}$$

Ainsi :

$$S_1(p) = \frac{4}{3} \frac{1}{p} - \frac{4}{3} \frac{1}{p+3}$$

Sachant que :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = u(t)$$

et :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+a} \right\} = e^{-at} u(t)$$

on obtient :

$$s_1(t) = \frac{4}{3} (1 - e^{-3t}) u(t)$$

Pour $t \geq 0$:

$$s_1(t) = \frac{4}{3} (1 - e^{-3t})$$

Q5. Retrouver l'expression de la réponse $s_1(t)$ par résolution temporelle de l'équation différentielle, pour une entrée échelon $e_1(t) = 2u(t)$.

Pour $t \geq 0$, l'entrée vaut :

$$e_1(t) = 2$$

L'équation différentielle devient :

$$3\frac{ds(t)}{dt} + 9s(t) = 12$$

ou, après division par 3 :

$$\frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 4$$

La solution générale est la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière.

1. Solution homogène

On résout :

$$\frac{ds_h}{dt} + 3s_h = 0$$

Sa solution est :

$$s_h(t) = K_h e^{-3t}$$

2. Solution particulière

On cherche une solution constante :

$$s_p(t) = K_p$$

En remplaçant dans l'équation :

$$3K_p = 4$$

d'où :

$$K_p = \frac{4}{3}$$

3. Solution générale

On obtient :

$$s(t) = \frac{4}{3} + K_h e^{-3t}$$

Les conditions d'Heaviside imposent :

$$s(0) = 0$$

Ainsi :

$$0 = \frac{4}{3} + K_h \quad \rightarrow \quad K_h = -\frac{4}{3}$$

La réponse temporelle est donc :

$$s_1(t) = \frac{4}{3} (1 - e^{-3t})$$

On retrouve bien le même résultat que celui obtenu par la transformée de Laplace inverse.

Exercice 3 – Du domaine de Laplace au domaine temporel

Objectif Passer d'une relation entrée-sortie exprimée dans le domaine de Laplace à l'équation différentielle correspondante dans le domaine temporel.

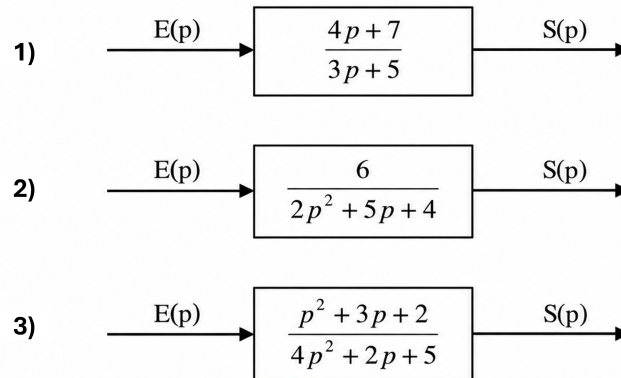


FIGURE 1 – Schémas-blocs dans le domaine de Laplace.

Avec $E(p)$ la transformée de Laplace de $e(t)$ et $S(p)$ la transformée de Laplace de $s(t)$.

Pour les trois systèmes, on considère que les conditions initiales sont nulles.

Q1. Déterminer pour chacun des trois systèmes, l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$. Et précisez l'ordre des équations différentielles obtenues.

On considère que les conditions initiales sont nulles.

Système 1 :

On part de :

$$S(p) = \frac{4p+7}{3p+5}E(p)$$

$$(3p+5)S(p) = (4p+7)E(p)$$

En développant :

$$3pS(p) + 5S(p) = 4pE(p) + 7E(p)$$

En revenant dans le domaine temporel :

$$3\frac{ds(t)}{dt} + 5s(t) = 4\frac{de(t)}{dt} + 7e(t)$$

Système 2 :

On part de :

$$S(p) = \frac{6}{2p^2+5p+4}E(p)$$

$$(2p^2+5p+4)S(p) = 6E(p)$$

En développant :

$$2p^2S(p) + 5pS(p) + 4S(p) = 6E(p)$$

On obtient dans le domaine temporel :

$$2\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 5\frac{ds(t)}{dt} + 4s(t) = 6e(t)$$

Système 3 :

On part de :

$$S(p) = \frac{p^2+3p+2}{4p^2+2p+5}E(p)$$

$$(4p^2+2p+5)S(p) = (p^2+3p+2)E(p)$$

En développant :

$$4p^2S(p) + 2pS(p) + 5S(p) = p^2E(p) + 3pE(p) + 2E(p)$$

On obtient finalement :

$$4\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\frac{ds(t)}{dt} + 5s(t) = \frac{d^2e(t)}{dt^2} + 3\frac{de(t)}{dt} + 2e(t)$$

Exercice 4 – Modélisation d'un moteur à courant continu

D'un point de vue électrique, un moteur à courant continu peut être modélisé comme un système dont l'entrée est la tension de commande de l'induit $u(t)$ et la sortie est la vitesse de rotation de l'arbre moteur $\omega_m(t)$.

L'induit est modélisé par une résistance en série avec une inductance et une force contre-électromotrice. On donne ci-dessous le modèle de connaissance du moteur à courant continu :

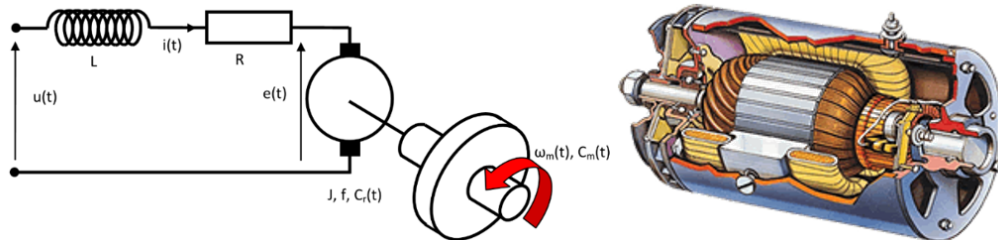


FIGURE 2 – Modèle de connaissance du moteur à courant continu.

Pour tout l'exercice, on considère que les conditions initiales sont nulles. Les équations qui modélisent le fonctionnement du moteur sont :

- **Loi d'Ohm :**

$$u(t) = e(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

- **Équations du moteur :**

$$e(t) = K_e \omega_m(t) \quad (2)$$

$$C_m(t) = K_c i(t) \quad (3)$$

- **Équation de la dynamique de l'arbre moteur :**

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t) = C_m(t) - C_r(t) \quad (4)$$

Grandeur	Signification	Grandeur	Signification
R	Valeur de la résistance (Ω)	$\omega_m(t)$	Vitesse de rotation du moteur (rad/s)
L	Valeur de l'inductance (H)	$C_m(t)$	Couple exercé par le moteur (N.m)
K_e	Coefficient de la force contre-électromotrice	$C_r(t)$	Couple résistant exercé sur l'arbre moteur (N.m)
K_c	Constante de couple	$u(t)$	Tension d'alimentation du moteur (V)
J	Inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur	$e(t)$	Force électromotrice du moteur (V)
f	Coefficient de frottement visqueux	$i(t)$	Intensité dans le moteur (A)

Q1. Exprimer les équations (1) à (4) dans le domaine de Laplace.

Dans les conditions de Heaviside :

Équation (1) : loi d'Ohm

On a :

$$u(t) = e(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Après transformation de Laplace :

$$U(p) = E(p) + R I(p) + LpI(p)$$

soit :

$$U(p) = E(p) + (R + Lp)I(p)$$

Équation (2) : force contre-électromotrice

On a :

$$e(t) = K_e \omega_m(t)$$

D'où :

$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

Équation (3) : couple moteur

On a :

$$C_m(t) = K_c i(t)$$

D'où :

$$C_m(p) = K_c I(p)$$

Équation (4) : dynamique de l'arbre

On a :

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t) = C_m(t) - C_r(t)$$

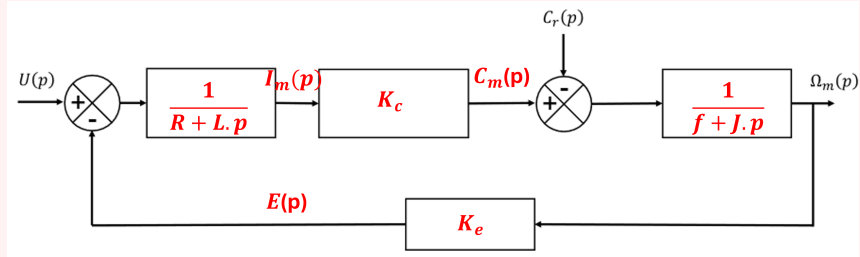
Après transformation de Laplace :

$$Jp\Omega_m(p) + f\Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

soit :

$$(Jp + f)\Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

Q2. À l'aide de la question précédente, compléter le schéma-blocs du moteur ci-après.



Q3. S'agit-il d'un asservissement ? Justifier

Il ne s'agit pas d'un système asservi car :

- Entrée et sortie ont pas la même grandeurs
- Pas de capteur dans la boucle de retour

Q4. Déterminer l'expression de la vitesse de rotation du moteur sous la forme suivante (on mettra $H_1(p)$ et $H_2(p)$ sous forme canonique) :

$$\Omega_m(p) = H_1(p) U(p) + H_2(p) C_r(p)$$

À partir de l'équation électrique :

$$U(p) = E(p) + (R + Lp)I(p)$$

et de :

$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

on obtient :

$$U(p) = K_e \Omega_m(p) + (R + Lp)I(p)$$

D'où :

$$I(p) = \frac{U(p) - K_e \Omega_m(p)}{R + Lp}$$

D'autre part, l'équation mécanique donne :

$$(Jp + f)\Omega_m(p) = K_c I(p) - C_r(p)$$

En remplaçant $I(p)$ par son expression :

$$(Jp + f)\Omega_m(p) = K_c \frac{U(p) - K_e \Omega_m(p)}{R + Lp} - C_r(p)$$

On multiplie par $R + Lp$:

$$(R + Lp)(Jp + f)\Omega_m(p) = K_c U(p) - K_c K_e \Omega_m(p) - (R + Lp)C_r(p)$$

On regroupe les termes en $\Omega_m(p)$:

$$[(R + Lp)(Jp + f) + K_c K_e] \Omega_m(p) = K_c U(p) - (R + Lp)C_r(p)$$

Développons le dénominateur :

$$(R + Lp)(Jp + f) = LJp^2 + (Lf + RJ)p + Rf$$

Ainsi :

$$[LJp^2 + (Lf + RJ)p + Rf + K_c K_e] \Omega_m(p) = K_c U(p) - (Lp + R)C_r(p)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Omega_m(p) &= \frac{K_c}{LJp^2 + (Lf + RJ)p + Rf + K_c K_e} U(p) \\ &\quad - \frac{Lp + R}{LJp^2 + (Lf + RJ)p + Rf + K_c K_e} C_r(p) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$H_1(p) = \frac{K_c}{LJp^2 + (Lf + RJ)p + Rf + K_c K_e}$$

et :

$$H_2(p) = -\frac{Lp + R}{LJp^2 + (Lf + RJ)p + Rf + K_c K_e}$$

Q5. Déterminer la valeur de $\omega_m(t)$ en régime permanent lorsque l'on soumet le moteur en entrée à un échelon de tension d'amplitude U_0 . La perturbation est considérée constante tout au long de l'essai et égale à C_{r0} .

On considère :

$$u(t) = U_0 u(t)$$

d'où :

$$U(p) = \frac{U_0}{p}$$

La perturbation étant constante :

$$C_r(t) = C_{r0}$$

on a :

$$C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$$

La relation obtenue précédemment est :

$$\Omega_m(p) = H_1(p)U(p) + H_2(p)C_r(p)$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_m(p)$$

Calculons les deux gains statiques.

Pour $H_1(p)$:

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \frac{K_c}{Rf + K_c K_e}$$

Pour $H_2(p)$:

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = -\frac{R}{Rf + K_c K_e}$$

On obtient donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \frac{K_c}{Rf + K_c K_e} U_0 - \frac{R}{Rf + K_c K_e} C_{r0}$$

soit :

$$\boxed{\omega_m(+\infty) = \frac{K_c U_0 - R C_{r0}}{Rf + K_c K_e}}$$

La vitesse de rotation en régime permanent dépend donc à la fois de la tension d'alimentation U_0 et du couple résistant C_{r0} .

Exercice 5 – Modélisation d'un vérin hydraulique

Un vérin hydraulique est un type d'actionneur qui permet de transformer une énergie hydraulique en énergie mécanique de translation. C'est le deuxième type d'actionneur le plus utilisé

après les moteurs.

On distingue deux types de vérins : les vérins simple effet et les vérins double effet.

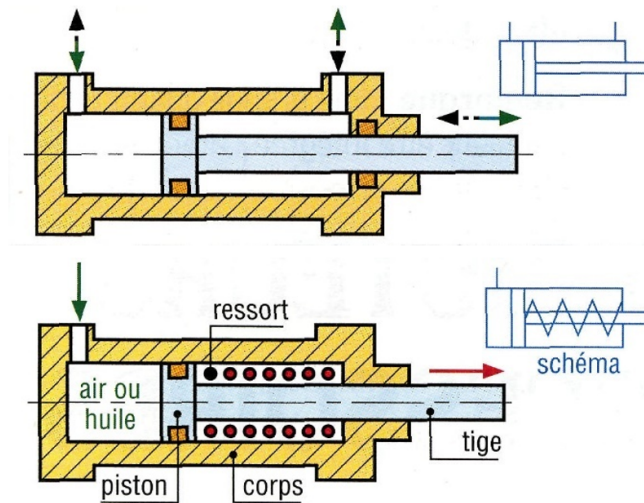


FIGURE 3 – Vérins hydraulique double effet et simple effet.

Les vérins double effet permettent un fonctionnement dans les deux sens (ils peuvent pousser ou tirer) grâce à la différence de pression créée entre les deux chambres séparées par le piston. Ils possèdent donc deux orifices qui peuvent servir d'alimentation ou d'échappement.

Les vérins simple effet ne permettent qu'un seul sens de fonctionnement. Si la tige peut bien se déplacer dans les deux sens, un effort important ne peut être créé que dans un seul sens. Ils ne possèdent qu'un seul orifice d'alimentation et le retour en position du piston s'effectue par le biais d'un ressort.

Q1. Dans le cas d'un vérin double effet, donner la relation liant l'effort développé $F_m(t)$, la surface du piston S et la différence de pression entre les deux chambres $\Delta P(t)$.

On pourra réaliser une analyse dimensionnelle.

La force exercée par la différence de pression sur le piston est donnée par :

$$F_m(t) = S \Delta P(t)$$

On obtient donc :

$$F_m(t) = S \Delta P(t)$$

Un vérin hydraulique est également défini par les deux équations suivantes :

- Principe de conservation de la masse dans un fluide compressible :

$$q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2\beta} \frac{d\Delta P(t)}{dt} \quad (1)$$

Avec :

- $q(t)$: débit du fluide ;
- $S \frac{dx(t)}{dt}$: volume contenu dans la chambre fermée par le piston ;
- β : grandeur liée à la compressibilité du fluide.

- Principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige du vérin :

$$F_m(t) - F_r(t) - f \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (2)$$

Avec :

- $F_m(t)$: force développée par le vérin ;
- $F_r(t)$: force résistante de frottement sec ;
- $f \frac{dx(t)}{dt}$: force de frottement visqueux ;
- $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$: accélération de la tige du vérin.

Q2. Traduire les trois équations associées au fonctionnement d'un vérin hydraulique dans le domaine de Laplace.

Les conditions initiales sont nulles.

Équation de la force développée :

$$F_m(p) = S \Delta P(p)$$

Équation de conservation de la masse :

$$Q(p) = SpX(p) + \frac{Vp}{2\beta} \Delta P(p)$$

soit :

$$Q(p) = SpX(p) + \frac{Vp}{2\beta} \Delta P(p)$$

Équation de la dynamique :

$$F_m(p) - F_r(p) - fpX(p) = mp^2 X(p)$$

soit :

$$F_m(p) - F_r(p) = (mp^2 + fp)X(p)$$

Q3. Compléter le schéma-blocs du vérin donné ci-dessous.

Le système ainsi modélisé est-il un système asservi ? Justifier votre réponse.

À partir de l'équation de conservation :

$$Q(p) = SpX(p) + \frac{Vp}{2\beta} \Delta P(p)$$

on peut écrire :

$$Q(p) - SpX(p) = \frac{Vp}{2\beta} \Delta P(p)$$

d'où :

$$\Delta P(p) = \frac{2\beta}{Vp} [Q(p) - SpX(p)]$$

La force développée par le vérin est :

$$F_m(p) = S\Delta P(p)$$

Enfin, l'équation dynamique donne :

$$F_m(p) - F_r(p) = (mp^2 + fp)X(p)$$

d'où :

$$X(p) = \frac{1}{mp^2 + fp} [F_m(p) - F_r(p)]$$

La boucle de retour correspond à :

$$\boxed{Sp}$$

Le système est-il asservi ?

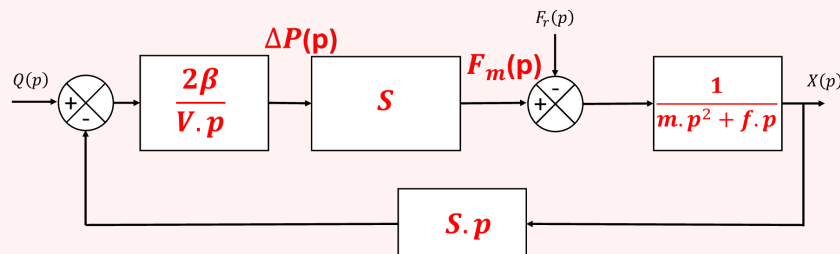
Non, ce système n'est pas un système asservi.

Même si le schéma comporte une boucle de retour, cette boucle ne sert pas à comparer la position $x(t)$ à une consigne afin de générer une erreur de commande.

Le retour $SpX(p)$ provient de l'équation physique de conservation du débit :

$$Q(p) = SpX(p) + \frac{Vp}{2\beta} \Delta P(p)$$

Il s'agit donc d'une **boucle interne de modélisation physique** et non d'une boucle d'asservissement.



Q4. Déterminer, sous forme canonique, la fonction de transfert

$$H_p(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$$

lorsque $F_r(p) = 0$.

D'après la formule de Black :

$$H_p(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{\frac{2\beta S}{Vp(mp^2 + fp)}}{1 + \frac{2\beta S^2}{V(mp^2 + fp)}}$$

Ainsi :

$$H_p(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{\frac{2\beta S}{p}}{V(mp^2 + fp + 2\beta S^2)}$$

On peut mettre cette expression sous forme canonique en factorisant le terme constant du dénominateur :

$$H_p(p) = \frac{1/S}{p(1 + \frac{fV}{2\beta S^2}p + \frac{mV}{2\beta S^2}p^2)}$$

Q5. Déterminer, sous forme canonique, la fonction de transfert

$$H_R(p) = \frac{X(p)}{F_r(p)}$$

lorsque $Q(p) = 0$.

Lorsque :

$$Q(p) = 0$$

Le schema bloc se transforme et nous pouvons de nouveau appliquer la formule de Black :

$$H_R(p) = \frac{X(p)}{F_r(p)} = -\frac{\frac{1}{mp^2 + fp}}{1 + \frac{2\beta S^2}{V(mp^2 + fp)}}$$

Alors :

$$H_R(p) = \frac{X(p)}{F_r(p)} = -\frac{V}{V(mp^2 + fp) + 2\beta S^2}$$

On factorise le terme constant :

$$H_R(p) = -\frac{V}{2\beta S^2} \frac{1}{1 + \frac{fV}{2\beta S^2}p + \frac{mV}{2\beta S^2}p^2}$$

Le signe négatif traduit l'effet opposé de la force résistante sur le déplacement.

Q6. En déduire la relation liant $X(p)$ aux deux entrées $Q(p)$ et $F_r(p)$.

Par superposition, la sortie s'écrit :

$$X(p) = H_p(p)Q(p) + H_R(p)F_r(p)$$

Ainsi :

$$X(p) = \left[\frac{1/S}{p(1 + \frac{fV}{2\beta S^2}p + \frac{mV}{2\beta S^2}p^2)} \right] Q(p) - \left[\frac{V}{2\beta S^2} \frac{1}{1 + \frac{fV}{2\beta S^2}p + \frac{mV}{2\beta S^2}p^2} \right] F_r(p)$$

On distingue également deux types de vérins en fonction du fluide utilisé : le vérin pneumatique ou hydraulique. Le choix du fluide exerce une influence sur le coefficient de compressibilité du fluide β . On fera l'hypothèse que :

- Pour un vérin hydraulique, $\beta \rightarrow +\infty$ car le fluide est incompressible.
- Pour un vérin pneumatique, $\beta \rightarrow 0$ car le fluide est compressible.

Q7. Donner l'expression de $X(p)$ pour un vérin hydraulique.

Pour un vérin hydraulique, le fluide est considéré comme incompressible. On a donc :

$$\beta \rightarrow +\infty$$

Alors l'expression précédente s'écrit :

$$X(p) = \left[\frac{1}{Sp} \right] Q(p) - 0$$

On obtient donc :

$$X(p) = \frac{Q(p)}{Sp}$$

Ainsi, pour un vérin hydraulique idéal, le déplacement dépend directement du débit imposé et ne dépend plus de la force résistante $F_r(p)$ dans ce modèle.