

Programme de colles : semaine 3, du 5/10 au 9/10

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Ensembles

- vocabulaire : élément, partie, ensemble vide ; descriptions d'ensembles : en extension, par équation et par paramétrage
- inclusion d'ensembles : savoir montrer que $A \subset B$, via "soit $x \in A$ alors ... donc $x \in B$ ". Savoir montrer que $A \not\subset B$
- égalité d'ensembles : savoir montrer que $A = B$ par principe de double inclusion, ou en montrant que $x \in A \iff x \in B$
- union et intersection : associativité, union et intersection finies, exemple d'union et d'intersection infinies
- complémentaire et différence : on note $\overline{A} = E \setminus A$ le complémentaire de A dans E , et par définition $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- formules de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- distributivité de $\cap$ et $\cup$: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- produit cartésien $I \times J$ de deux ensembles I et J , représentation dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $I, J \subset \mathbb{R}$. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E
- partition d'un ensemble (*on ne demande pas que les éléments d'une partition soient non vides*)

2 Nombres réels

Les résolutions d'(in)équations se feront sans mention de l'injectivité ou de la monotonie des fonctions impliquées.

- intervalles, intervalles ouverts, fermés, bornés, non bornés
- rappels des règles sur les inégalités, tableau de signes
- résolution de $x^2 \geq r$, $x^2 \leq r$, de $x^2 = y^2$
- valeur absolue :
 - inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$
 - corollaires de l'inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ et $|x - y| \geq ||x| - |y||$
 - résolution de $|x| \geq r$, de $|x| \leq r$, de $|x| = |y|$
- exemples de résolutions d'(in)équations
- partie entière
- majorants/minorants, maximum/minimum, bornes supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). *Nous n'avons pas fait d'exercice sur ce point.*

3 Applications

*Dans tout ce qui suit $f : E \longrightarrow F$. On ne fait pas de distinction entre fonction et application. **Le théorème de la bijection ainsi que les fonctions trigonométriques réciproques n'ont pas été abordés dans ce chapitre.***

- notion d'application, ensembles de définition et d'arrivée, image et antécédent, représentation graphique dans le cas d'une fonction numérique. On note F^E l'ensemble des fonctions de E dans F
- composition, on note id_E la fonction identité sur E
- image directe $f(A)$ d'un ensemble $A \subset E$ et image réciproque $f^{-1}(B)$ d'un ensemble $B \subset F$. On note $Im(f) = f(E)$

- injectivité/surjectivité : savoir montrer qu'une fonction est ou n'est pas injective/surjective.
- la fonction $f : E \longrightarrow \text{Im}(f)$ est toujours surjective
- bijectivité : savoir montrer qu'une fonction f est bijective en montrant que pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$
- on note $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque d'une bijection $f : E \longrightarrow F$. Savoir déterminer l'expression d'une bijection réciproque en résolvant pour $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$
- si $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors on a $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.
- soit $f : E \longrightarrow F$. Si $g : F \longrightarrow E$ est telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$ alors f est bijective et $g^{-1} = f$. En particulier, $(f^{-1})^{-1} = f$
- si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- graphe de f^{-1} en fonction du graphe de f

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient les ensembles $A = \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), t \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ (attention, ici il y a deux questions en une). On considérera l'élément $(-1, 0)$.
2. Énoncer les formules appelées "distributivité" de $\cup$ et $\cap$.
3. Énoncer les formules appelées "règles de De Morgan" pour le complémentaire d'une union et d'une intersection.
4. Donner la définition d'une partition d'un ensemble.
5. Énoncer la propriété permettant de résoudre, pour $r \in \mathbb{R}^+$, $x^2 \leq r$ et $x^2 \geq r$ (ou $|x| \leq r$ et $|x| \geq r$) et l'illustrer sur le graphe de la fonction carrée (ou valeur absolue).
6. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire (sans corollaire).
7. Donner la définition de l'image directe et de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
8. Soit $f : E \longrightarrow F$. Donner la définition de " f est injective" et/ou de " f est surjective" et/ou de " f est bijective".
9. Donner, en justifiant, un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective (avec des parenthèses choisies par l'examineur).
10. Démontrer que la composée de deux injections (ou de deux surjections) est une injection (ou une surjection).

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type révision" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités en :

- **Révision 2, exo 4** : résolution d'un système linéaire sans paramètre à n équations et p inconnues avec $n, p \in \{2, 3\}$. <https://cahier-de-prepa.fr/pcsi1-decour/download?id=918&v=d5aa5>

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.