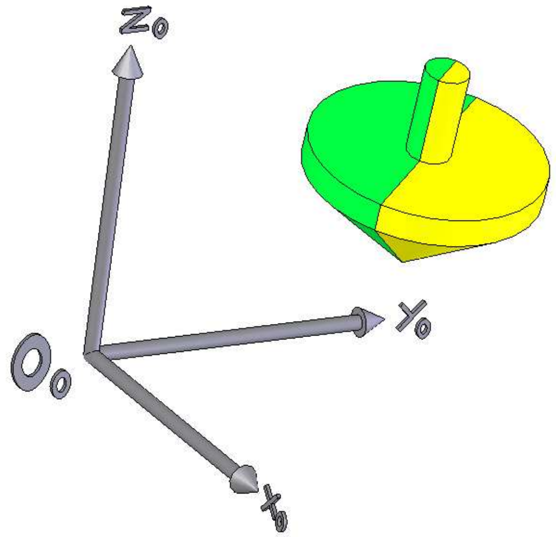
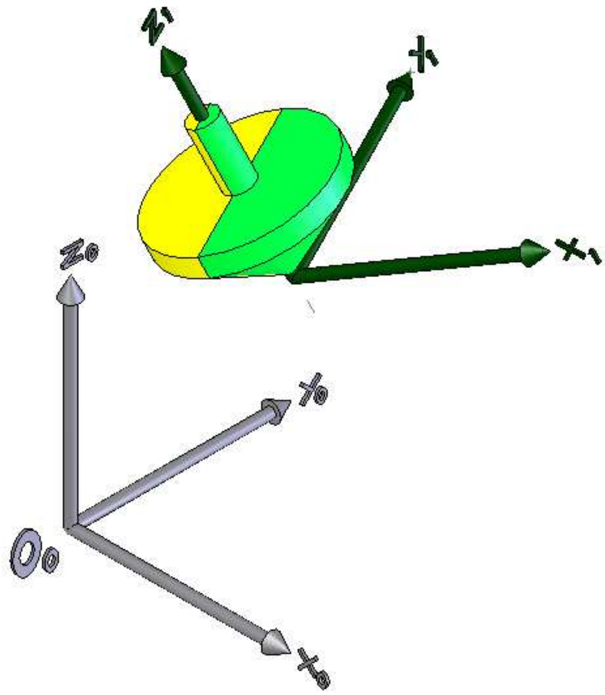
Angles d'Euler

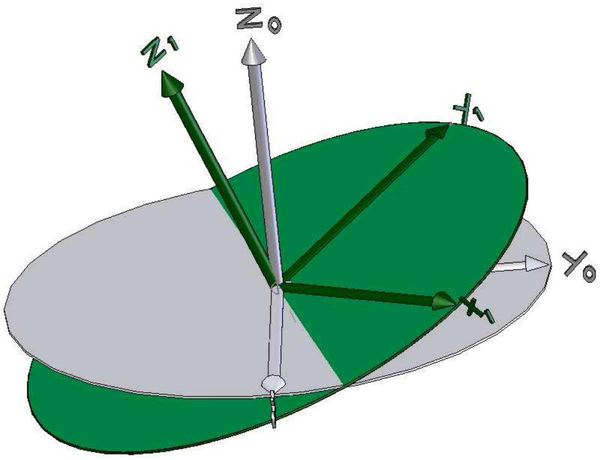
<u>Problématique</u> : Paramétrer l'orientation d'un solide par rapport à un repère $\mathcal{R}_0(0_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ (le paramétrage de la position du solide étant assuré par les coordonnées d'un point du solide).



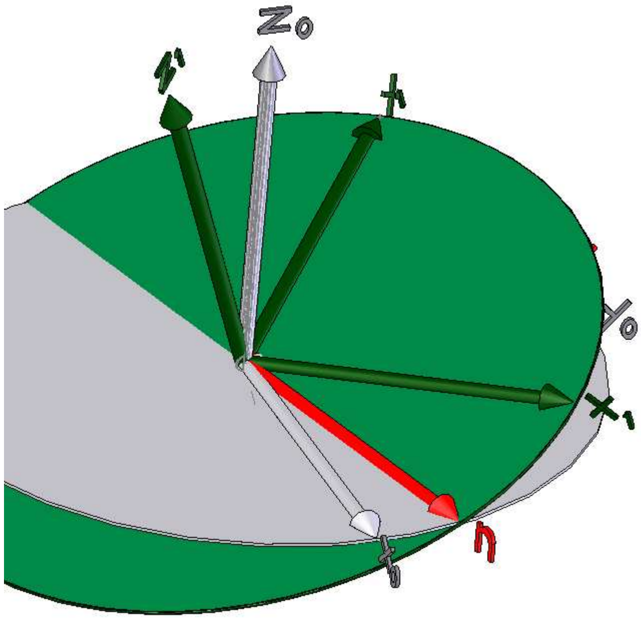
Cela revient à orienter un repère $\mathcal{R}_1$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$.



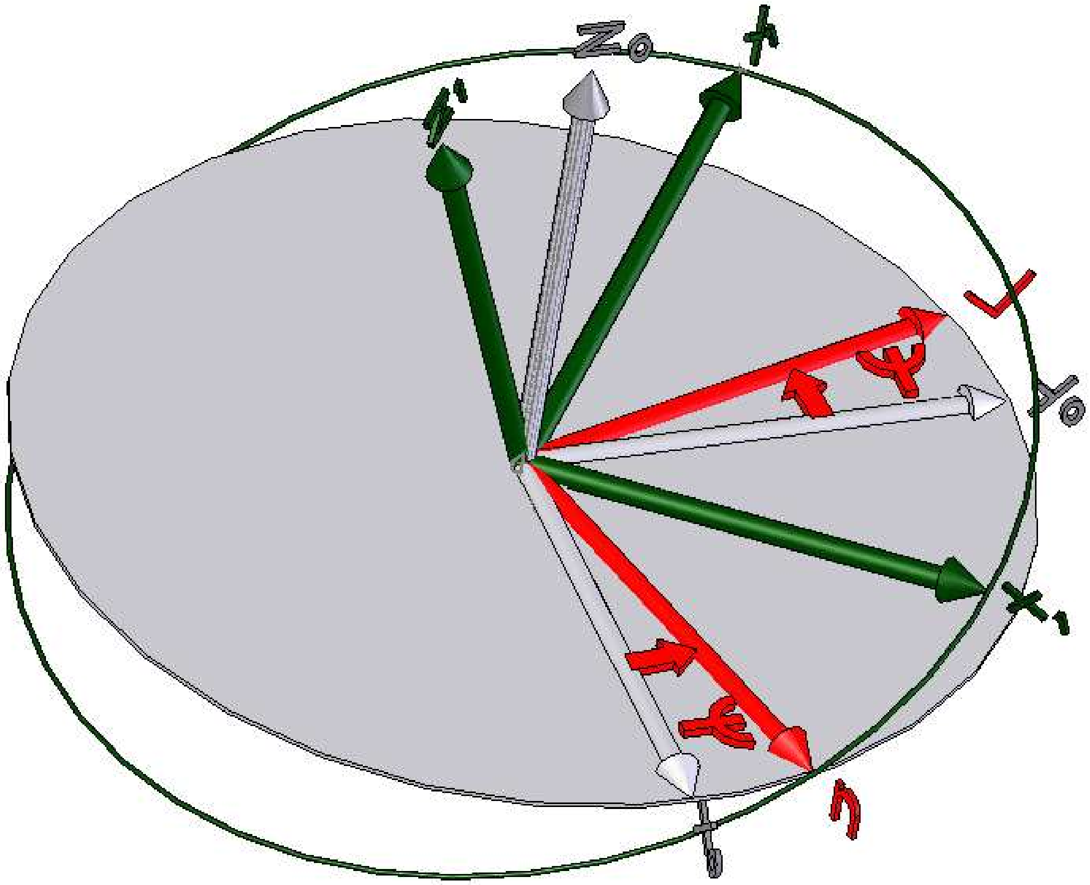
Représentons la base ($\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}$) à l'origine du repère $\mathcal{R}_0$.



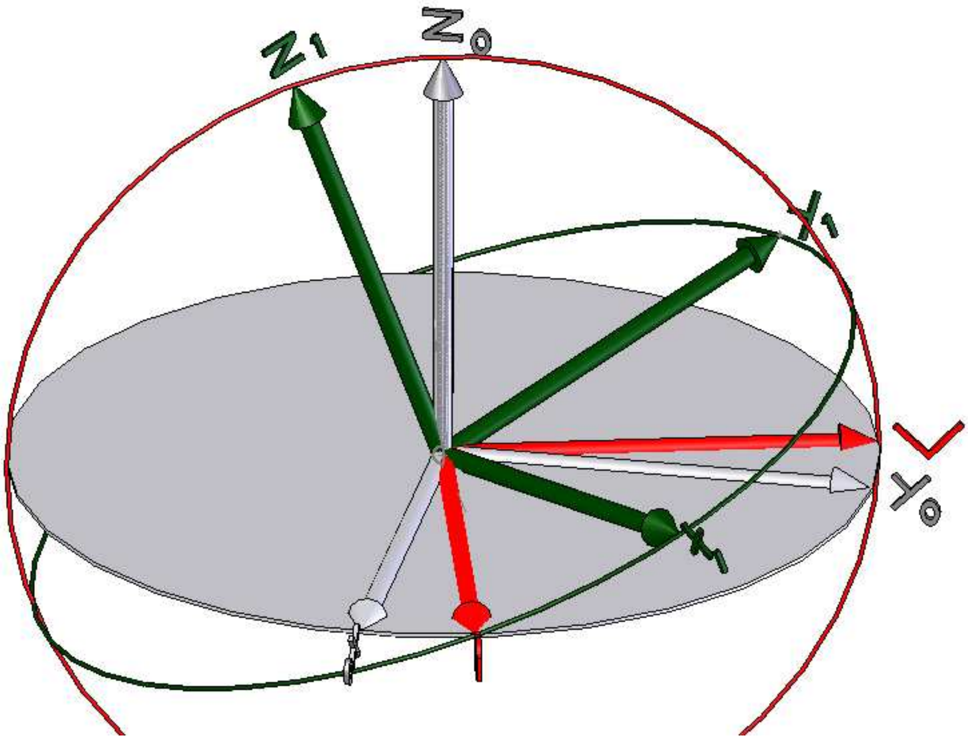
Définissons le vecteur unitaire $\vec{n}$ par la direction de l'intersection des plans (O$_0$, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$) et (O$_0$, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$)



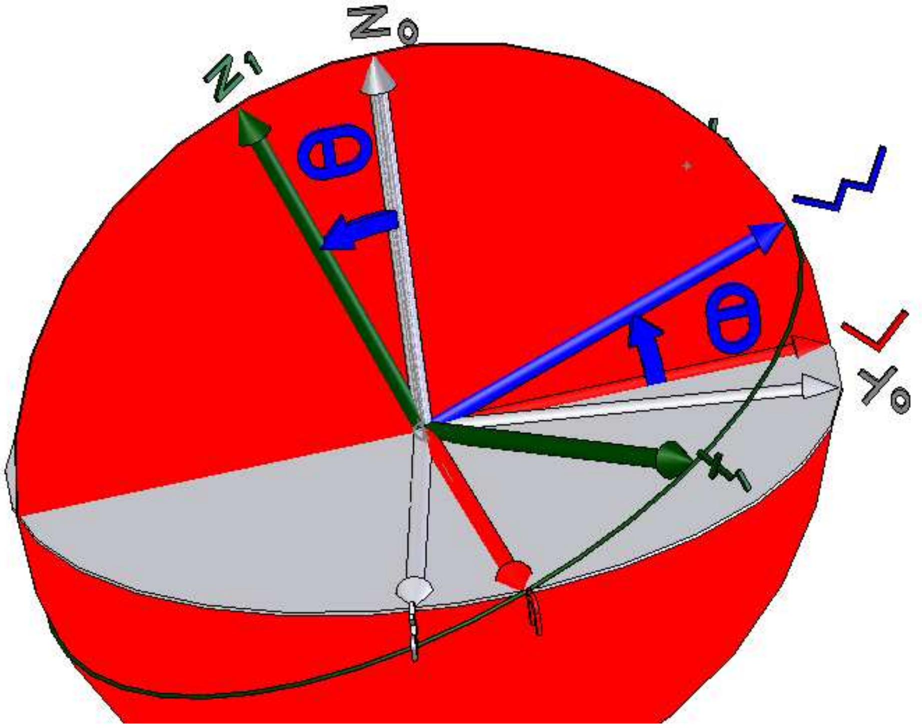
Par une rotation autour de l'axe (O_0, $\overrightarrow{z_0}$), on passe de la base ($\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$) à la base ($\vec{n}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{z_0}$) (voir figure ci-dessous)



Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{z_1}$, on peut passer de $\overrightarrow{z_0}$ à $\overrightarrow{z_1}$ par une rotation autour de l'axe (O_0, $\vec{n}$) (voir figure ci-dessous)

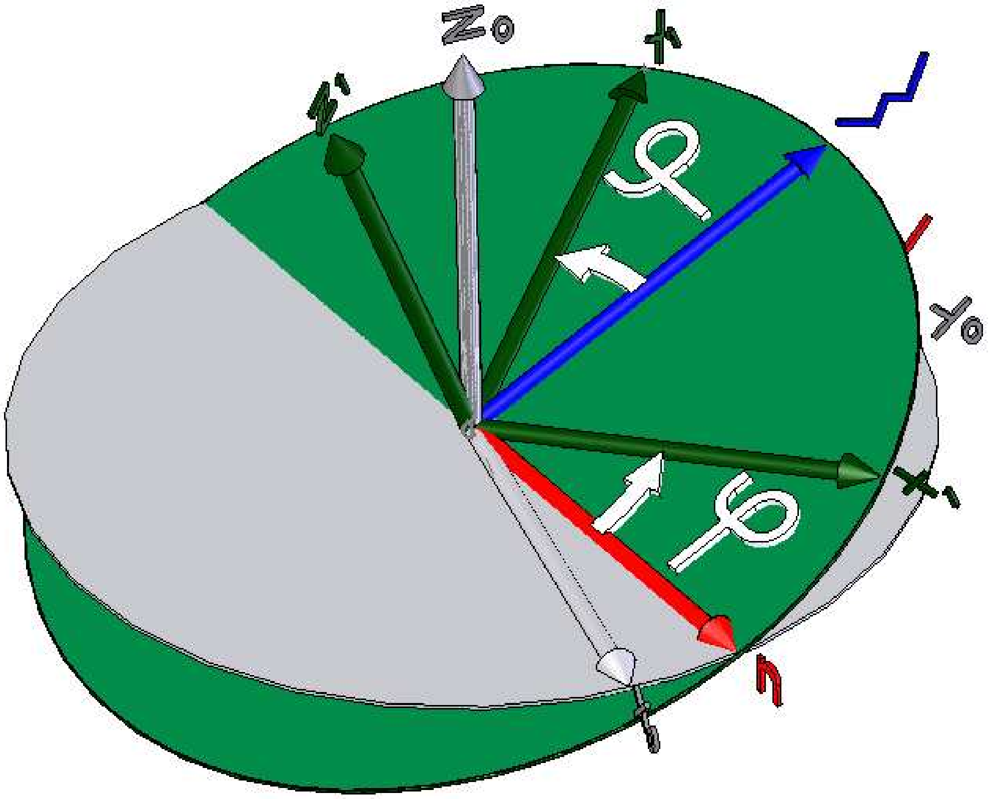


On obtient par cette rotation la base ($\vec{n}$, $\vec{w}$, $\vec{z_1}$), la droite (O_0, $\vec{w}$) étant dans le plan (O_0, $\vec{x_1}$, $\vec{y_1}$) (voir figure ci-dessous)

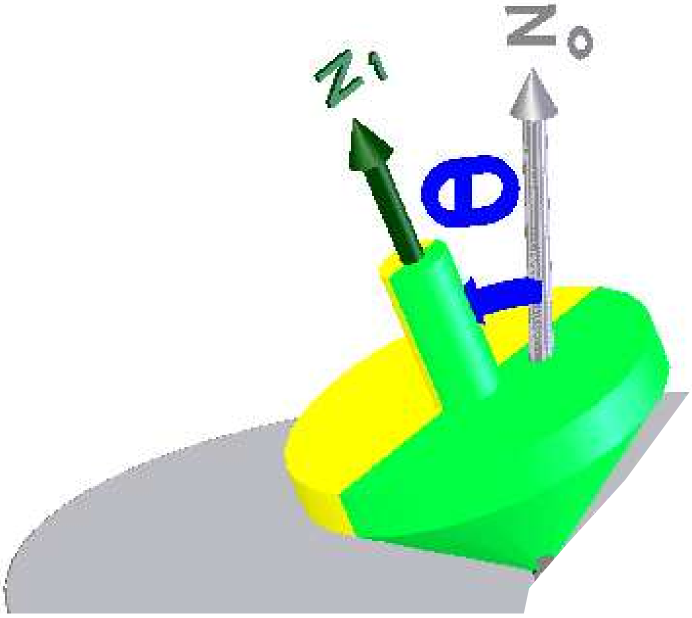


La troisième rotation s'effectue autour de (O_0, $\vec{z_1}$).

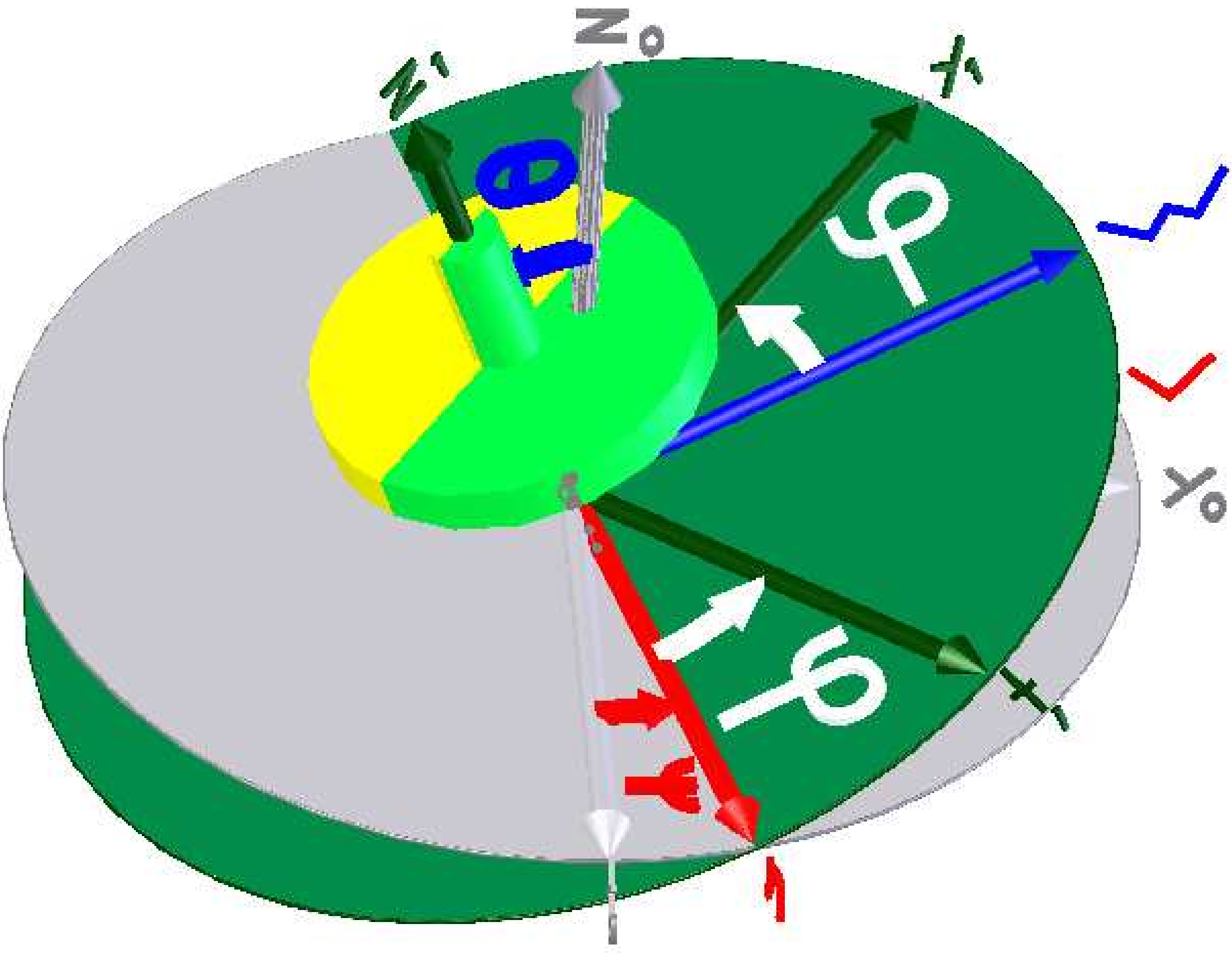
On passe alors de la base ($\vec{n}$, $\vec{w}$, $\vec{z_1}$) à ($\vec{x_1}$, $\vec{y_1}$, $\vec{z_1}$).(voir figure ci-dessous)



Revenons à l'exemple de la toupie. Dans ce cas, la rotation propre paramètre la rotation de la toupie autour de son axe de révolution. La nutation est l'angle d'inclinaison de l'axe de la toupie.



Une fois la nutation θ connue, il reste à savoir dans quel plan est situé l'axe $\left(O_0,\overrightarrow{z_1}\right)$. On utilise le plan normal à cet axe passant par 0_0, (le plan $\left(0_0,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)$), la position angulaire ψ de l'intersection de ce plan avec le plan $\left(0_0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)$ définira donc la position du plan dans lequel est l'axe $\left(O_0,\overrightarrow{z_1}\right)$.



L'orientation de $\Re_1$ par rapport à $\Re_0$ est donc définie par les trois angles d'Euler

Angle	Bases	Axe de rotation
ψ: précession.	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}) \rightarrow (\vec{n}, \vec{v}, \overrightarrow{z_0})$	$(O_0, \overrightarrow{z_0})$
θ: Nutation	$(\vec{n}, \vec{v}, \overrightarrow{z_0}) \rightarrow (\vec{n}, \vec{w}, \overrightarrow{z_1})$	$(O_0, \vec{n})$
φ: Rotation propre (on peut penser à la rotation propre de la toupie autour de son axe)	$(\vec{n}, \vec{w}, \overrightarrow{z_1}) \rightarrow (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$	$(O_0, \overrightarrow{z_1})$

Figures planes :