Chapitre (ALG) 2 Calculs avec les réels

1 Généralités .....
2 Égalités et inégalités .....
3 Fractions, Puissances, Racines ..
4 Résolution d'équations et d'inéquations .....
5 Exercices .....

Résumé & Plan

Ce chapitre consiste essentiellement en des rappels des notions vues par le passé. Afin de ne pas se limiter à des exemples simplistes on sera parfois amené à utiliser des notions et propriétés vues au lycée qui ne seront rappelées qu'après.

L'utilisation du x en mathématiques pour désigner une inconnue vient de l'arabe, une traduction en français serait « la chose ».

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Nous supposerons construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ainsi que les sous-ensembles usuels des rationnels, entiers *etc.*. Mais tout ceci cache des difficultés auxquelles les mathématiciens se sont frottées pendant longtemps : celle de la construction de ces ensembles. Par exemple, qu'est-ce que l'entier 1, 2 *etc.* ? Dans le livre *Principia Mathematica* (1910), il faut environ 300 pages à WHITEHEAD et RUSSEL pour démontrer que $1+1=2$.

$$\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$$

Dem.

$$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$
$$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$
$$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$$
$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$
$$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Nous ne nous poserons évidemment pas de telles questions ici, et conformément au programme, nous supposerons donc connus et construits les ensembles de nombres usuels.

1 GÉNÉRALITÉS

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux *lois internes* : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$. Pourquoi les qualifier d'internes ? Car elles prennent en argument deux réels et elles renvoient un autre réel, on reste donc « dans l'ensemble $\mathbb{R}$ » :

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Rappelons quelques propriétés de la loi additive.

Proposition 1 | Propriétés de l'addition

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- **[Interne]** $x+y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- **[Commutativité]** $x+y = y+x$.
- **[Élément neutre]** $x+0 = 0+x = x$. On dit que 0 est un *élément neutre* pour l'addition.

- **[Élément opposé]** $x+(-x)=0$. On dit que $-x$ est *l'élément opposé de* x pour l'addition.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- $x \times y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- **[Commutativité]** $x \times y = y \times x$.
- **[Élément neutre]** $x \times 1 = 1 \times x = x$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication.
- **[Élément absorbant]** $x \times 0 = 0 \times x = 0$. On dit que 0 est *l'élément absorbant* pour la multiplication.
- **[Élément inverse]** Si $x \neq 0$, alors $x \times \frac{1}{x} = 1$. On dit que $\frac{1}{x}$ est *l'élément inverse de* x pour la multiplication, noté aussi x^{-1}.
- **[Distributivité]** $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

2 ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS

Une inégalité est une formule reliant deux expressions numériques avec un symbole de comparaison ($\leq$, $\geq$, $<$, $>$). Une **inégalité stricte** compare nécessairement deux valeurs différentes tandis qu'une **inégalité large** reste valable en cas d'égalité.

Attention à ne pas confondre inégalités strictes et inégalités larges. Lorsque l'on écrit ou dit « ... est plus petit/grand que ... », implicitement on parle d'inégalités larges. D'où l'importance de préciser « strictement » lorsque c'est le cas, notamment à l'oral.

Exemple 1 Préciser si les propositions logiques ci-dessous sont vraies.

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq b \implies a < b$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \implies a \leq b$

Proposition 3 | Relation d'ordre $\leq$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On dit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car

- **[Réflexivité]** $x \leq x$.
- **[Anti-symétrie]** $x \leq y$ et $y \leq x \iff x = y$.
- **[Transitivité]** $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$.

Pour comparer deux quantités (savoir laquelle des deux quantités est la plus grande), on peut faire leur différence et étudier son signe, sauf si la comparaison est évidente. De plus, deux réels se comparent toujours : on dit que $\mathbb{R}$ est *totalement ordonné*. On peut alors définir quantités ci-après, que nous utiliserons parfois.

Définition 1 | Max / Min

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on définit alors

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y, \\ y & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geq y, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1 Soit $M \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Établir que :

$\boxed{\max(x,y) \leq M \iff x \leq M \text{ et } y \leq M.}$

On établirait de-même que : $\boxed{\min(x,y) \geq M \iff x \geq M \text{ et } y \geq M.}$

MANIPULATION D'ÉGALITÉS ET D'INÉGALITÉS. On va rappeler dans ce paragraphe les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et inégalités sur $\mathbb{R}$ vues dans les classes antérieures.

Proposition 4 | Manipulations d'égalités & d'inégalités

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- **[Additionner =]** $x = y \iff x + z = y + z$.
- **[Équation produit]** $xy = 0 \iff x = 0$ **ou** $y = 0$.
- **[Multiplier =]** Si de plus $z \neq 0$, alors $x = y \iff xz = yz$.
- **[Signe d'un produit]**
  $xy \geq 0 \iff x$ et y sont de même signe,
  $xy \leq 0 \iff x$ et y sont de signe opposé.
- **[Additionner $\leq$]** $x \leq y \iff x + z \leq y + z$.
- **[Multiplier $\leq$]** Si de plus $z > 0$, alors :
  $x \leq y \iff xz \leq yz$.
  Si de plus $z < 0$, alors :
  $x \leq y \iff xz \geq yz$.

- **[Additionner des inégalités « de même sens »]** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\text{si } \begin{cases} x \leqslant y \\ z \leqslant t \end{cases} \quad \text{alors} \quad x+z \leqslant y+t.$$

- **[Multiplier des inégalités « de nombres positifs »]** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\text{si } \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant t \end{cases} \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant xz \leqslant yt.$$

- **[Inverser des inégalités]** Si x et y sont deux réels non nuls de même signe,

$$x \leqslant y \iff \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Note | *Ce dernier point est une conséquence de la décroissance de la fonction inverse sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$*, voir plus loin.*

- On peut donc multiplier une égalité **par une quantité non nulle**, et ajouter/soustraire par le même terme de chaque côté.
- Le signe d'un produit de deux éléments permet de caractériser le signe de chaque terme du produit.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement positive**.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement négative en inversant le sens de l'inégalité**.
- On peut donc additionner deux inégalités, et les multiplier sous réserve qu'elles ne fassent intervenir que des nombres réels positifs.
- On peut donc inverser deux inégalités faisant intervenir des réels non nuls de même signe.

Bien entendu, toutes ces propriétés s'adaptent à des inégalités strictes, et s'étendent à des sommes quelconques de termes.

Attention

- **On ne soustrait pas des inégalités**.

  Par exemple, $\begin{cases} -1 \leqslant 2 \leqslant 2, \\ 0 \leqslant 1 \leqslant 2 \end{cases}$ et on n'a clairement pas $-1-0 \leqslant \boxed{2-1 \leqslant 0}$!

  Si on veut encadrer une quantité du type $x-y$, on peut encadrer x et encadrer y puis multiplier l'encadrement de y par -1 *(ce qui change le sens !)* , puis sommer les inégalités pour terminer.
- Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens aussi, puisque diviser par un négatif revient à multiplier par son inverse (qui sera négatif).

Exemple 2 Soit $(a,b,c,d,x,y) \in \mathbb{R}^6$. Supposons que $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$.
Que peut-on dire de $x+y$ et de $x-y$?
Dans le cas où $a \geqslant 0$ et $c > 0$, que peut-on dire de xy et de $\frac{x}{y}$?

Note | *Pour le dernier encadrement, on prendra garde au fait qu'aucune règle ne permet de « diviser des inégalités » !*

Exercice 2 Donner un encadrement, le plus précis possible sans étude de fonction, sur $\frac{x^2}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Note | *En fait, dans cet exercice, une étude de fonction ne donnerait pas mieux...*

COMPOSITION D'INÉGALITÉS PAR UNE FONCTION CROISSANTE. Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Rappelons que (nous le reverrons dans le chapitre sur les fonctions) :

- f est dite *croissante* sur I si
$$\boxed{\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x\leqslant y \quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant f(y)}$$

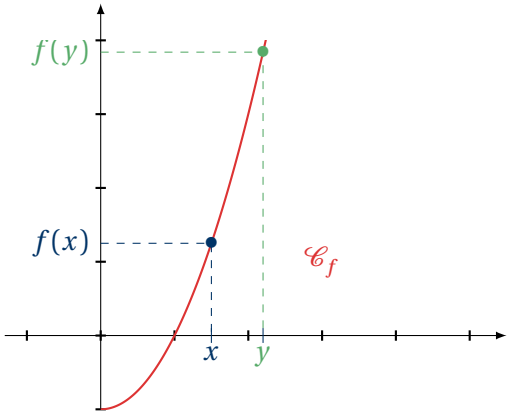
Note | *La réciproque est fausse en général, sauf si f est supposée strictement croissante (voir définition ci-dessous)*

- f est dite *strictement croissante* sur I si
$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x<y \quad\Longrightarrow\quad f(x)<f(y).$$

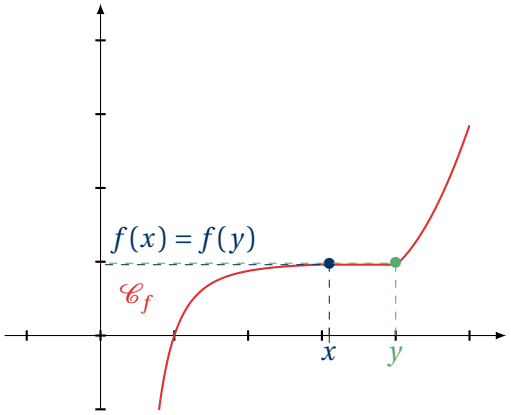
  Ainsi, composer une inégalité large par une fonction croissante conserve l'ordre de l'inégalité large, composer une inégalité stricte par une fonction strictement croissante conserve l'inégalité stricte.

- Une fonction strictement croissante est donc croissante (une inégalité stricte est forcément large).

FONCTION STRICTEMENT CROISSANTE : SI $x<y$ ALORS $f(x)<f(y)$

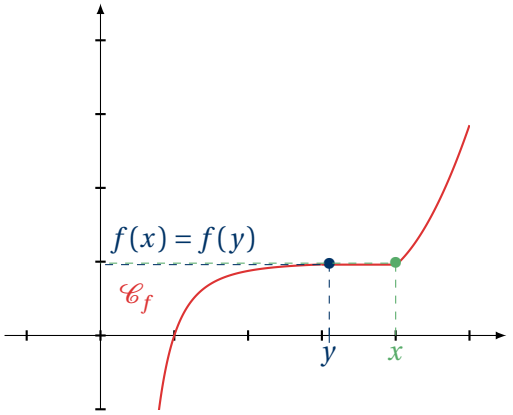


FONCTION CROISSANTE : SI $x\leqslant y$ ALORS $f(x)\leqslant f(y)$



En vue de la résolution d'équations et d'inéquations, on souhaiterait obtenir une réciproque à l'implication encadrée. Autrement dit, on souhaiterait savoir dans quel cas l'inégalité $f(x)\leqslant f(y)$ fournit l'inégalité $x\leqslant y$:

- si f est *strictement* croissante, on ne peut avoir $f(x)\leqslant f(y)$ que si $x\leqslant y$;
- si f est seulement supposée croissante, on peut avoir $f(x)\leqslant f(y)$ (en ayant $f(x)=f(y)$) sans que $x\leqslant y$! Voir par exemple le dessin ci-dessous : on a $f(x)\leqslant f(y)$ (même égaux), et pourtant $x\geqslant y$.



D'où le résultat suivant.

Proposition 5 | Composition d'une inégalité par une fonction strictement croissante

Si f est une fonction **strictement** croissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x\leqslant y \iff f(x)\leqslant f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines inéquations*

Preuve Soit $(x,y)\in \mathrm{I}^2$.

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$ Montrons l'implication par contraposée.

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 6 | Composition d'une égalité par une fonction strictement croissante

Si f est une fonction **strictement** croissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x=y \iff f(x)=f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines équations*

Preuve Soit $(x,y) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

$$x = y \iff \begin{cases} x \leqslant y \\ y \leqslant x \end{cases} \overset{\text{proposition précédente}}{\iff} \begin{cases} f(x) \leqslant f(y) \\ f(y) \leqslant f(x) \end{cases} \iff f(x) = f(y).$$

La discussion précédente possède son analogue dans le cas des fonctions décroissantes, nous énonçons rapidement les résultats associés.

COMPOSITION D'INÉGALITÉS PAR UNE FONCTION DÉCROISSANTE. Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

- f est dite *décroissante* sur I si
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)}$$

Note | *La réciproque est fausse en général, sauf si f est supposée strictement décroissante (voir définition ci-dessous)*

- f est dite *strictement décroissante* sur I si
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y).$$

Ainsi, composer une inégalité large par une fonction décroissante renverse l'ordre de l'inégalité large, composer une inégalité stricte par une fonction strictement croissante renverse l'inégalité stricte.

A l'instar des fonctions croissantes, la réciproque de l'inégalité encadrée ne peut être obtenue qu'en cas de stricte décroissance de la fonction :

Proposition 7 | Composition d'une inégalité par une fonction strictement décroissante
Si f est une fonction **strictement** décroissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines inéquations*

On en déduit que :

Proposition 8 | Composition d'une égalité par une fonction strictement décroissante
Si f est une fonction **strictement** décroissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x = y \iff f(x) = f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines équations*

Exemple 3

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^y$, car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leqslant y \implies \ln(x) \leqslant \ln(y)$, car ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x \leqslant y \iff x^2 \leqslant y^2$, car $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_-)^2, \quad x < y \implies x^2 > y^2$, car :
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x = y \iff x^2 = y^2$, car :
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = y$ **ou** $x = -y \iff x^2 = y^2$, car :
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leqslant y \iff \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$, car :

Attention

- Il est **faux** de dire que
$$\forall (x,y) \in \boxed{\mathbb{R}^2}, \quad x \leqslant y \implies x^2 \leqslant y^2$$
car la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. En revanche, il est **juste** de dire :
$$\forall (x,y) \in \boxed{(\mathbb{R}_+)^2}, \quad x \leqslant y \implies x^2 \leqslant y^2.$$
- **Pour élever au carré une inégalité en préservant le sens de l'inégalité, prenez garde au fait que les quantités doivent être positives !**

3 FRACTIONS, PUISSANCES, RACINES

3.1 Fractions

On s'intéresse ici plus particulièrement aux éléments de $\mathbb{D}$ (les nombres décimaux), et de $\mathbb{Q}$ (les rationnels) dont nous revoyons la définition.

Définition 2 | Décimaux
L'ensemble des nombres décimaux est : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Remarque 1 Un nombre décimal possède un nombre fini de chiffres après la virgule. Précisément le nombre après la virgules est la valeur de n dans l'écriture précédente.

Exemple 4

- On a : $0,25 = \frac{25}{10^2} \in \mathbb{D}$, $-0,217 = \frac{-217}{10^3} \in \mathbb{D}$, $-0,217\ldots \notin \mathbb{D}$, $3 = \frac{3}{10^0} \in \mathbb{D}$.
- De plus, $\frac{31}{2} = \frac{155}{10} \in \mathbb{D}$, $\frac{31}{3} \notin \mathbb{D}$, prouvons-le.

Définition 3 | Rationnels & Opérations

- ◇ On appelle *fraction* ou *rationnel* un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, noté $\frac{p}{q}$. Le nombre p s'appelle le *numérateur* et le nombre q s'appelle le *dénominateur*.
- ◇ L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Ainsi,
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star \right\} \supset \mathbb{D}.$$
- ◇ Deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont égales si et seulement si : $ps = qr$. On dit alors qu'elles représentent le même *nombre rationnel*.
- ◇ Une fraction $\frac{p}{q}$ est *irréductible* si et seulement si p et q ne possèdent aucun diviseur commun supérieur ou égal à 2.
- ◇ On confond un entier a avec la fraction $\frac{a}{1}$. On a donc : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- ◇ L'addition sur $\mathbb{Q}$ est définie par
$$\forall (p,r) \in \mathbb{Z},\quad \forall (q,s) \in (\mathbb{N}^\star)^2,\quad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}.$$
- ◇ La multiplication sur $\mathbb{Q}$ est définie par
$$\forall (p,r) \in \mathbb{Z},\quad \forall (q,s) \in (\mathbb{N}^\star)^2,\quad \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$
- ◇ De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{Q}$, pour $q > 0$ et $s > 0$, par
$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \iff ps \leq qr.$$

Remarque 2 La suite des chiffres d'un nombre rationnel après la virgule est *a priori* non limitée, contrairement aux décimaux.

Exemple 5 On a $-0,217\ldots \in \mathbb{Q}$, $\frac{31}{3} \in \mathbb{Q}$ et $-0,217 \in \mathbb{Q}$.

3.2 Puissance entière

Définition 4 | Puissances entières
Soient $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$.

- On note x^2 le réel $x \times x$. On définit par récurrence le réel x^n par :
$$x^0 = 1,\quad x^1 = x,\quad x^{n+1} = x \times x^n.$$
- Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit x^{-n} par : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

De manière plus explicite, avec les notations précédentes, on a :
$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}},\quad x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}}.$$
De manière générale, nous serons capable de définir ultérieurement x^α avec $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ mais il faudra attendre les rappels sur la fonction exponentielle et le logarithme. Rappelons les règles usuelles sur les fonctions puissances.

Proposition 9 | Règles sur les puissances
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ de sorte que les puissances ci-après soient définies. Alors :

- $x^{n+p} = x^n \times x^p$ $\quad (x^n)^p = x^{n \times p}$ $\quad (x \times y)^n = x^n \times y^n$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.
- Si on a de plus $x > 0$, alors : $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}}$.

Exemple 6 **(Quiz)** Cochez la ou les bonnes réponses.

Expression	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$a^5a^3 =$	☐ a^{5^3}	☐ a^{15}	☐ a^8
$a^2b^3 =$	☐ $(ab)^2b$	☐ $(ab)^5$	☐ $(ab)^6$
$(a^2)^n =$	☐ a^{2n}	☐ a^{2+n}	☐ a^{2^n}
$(3^n)^2 =$	☐ 3^{n^2}	☐ 6^n	☐ 9^n
$\left(a^{n^2}\right)^3 =$	☐ a^{3n^2}	☐ a^{n^8}	☐ a^{n^6}
$a^{3n}(a^n)^2 =$	☐ a^{3n^3}	☐ a^{n^2+3n}	☐ a^{5n}
$2^{-2k}3^k =$	☐ $\left(\frac{3}{4}\right)^k$	☐ $\left(\frac{3}{2}\right)^k$	☐ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$
$3^{2k+1}2^{-k} =$	☐ $3\left(\frac{9}{2}\right)^{-k}$	☐ $3\left(\frac{9}{2}\right)^k$	☐ $9\left(\frac{3}{2}\right)^k$
$2^n+2^n =$	☐ 4^n	☐ 2^{n+1}	☐ 2^{2n}
$(-2)^{2n+1} =$	☐ -2^{2n+1}	☐ $(-4)^{n+1}$	☐ -2×4^n
$2\times\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 =$	☐ 2^n	☐ 2^{n+1}	☐ $\frac{1}{2^{n-1}}$

Les puissances de -1 sont très faciles à calculer, elle dépend simplement de la parité de la puissance, la preuve étant une simple disjonction de cas dans la définition de la puissance entière.

Proposition 10 | Puissances alternées

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

- $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
- $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -x^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Preuve

- ◇ Si n est pair, alors $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$. Donc $(-1)^n=(-1)^{2k}=((-1)^2)^k=1^k=1$.
- ◇ Si n est pair, alors $n=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$. Donc $(-1)^n=(-1)^{2k+1}=((-1)^2)^k(-1)=-1^k=-1$.
- $(-x)^n=(-1)^nx^n$ puis utiliser le cas précédent.

Exemple 7 Écrire sous la forme $\pm2^p\times3^q$ avec p et q deux entiers relatifs :

1. $\frac{2^3\times3^2}{3^4\times3^8\times6^{-1}} =$
2. $\frac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} =$
3. $\frac{\left(3^2\times(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\times2^3\right)^{-2}} =$
4. $\frac{12^{-4}\times(-3)^3}{\left(\frac{2}{9}\right)^3\times18^2\times16^{-3}} =$

Proposition 11 | Identités remarquables

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, alors :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Preuve Elles se démontrent directement à l'aide de la définition et des règles usuelles de développement : par exemple,

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Exemple 8 **(Puissance 3)** Développer $(a+b)^3, (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Exemple 9 Développer $(a+b+c)^2$.

Note | *La formule est analogue pour quatre, cinq termes et même plus.*

Remarque 3 (Généralisations possibles)

- Les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ seront généralisées dans le chapitre sur les sommes/produits en la formule dite du *binôme de Newton* pour des puissances plus élevées.
- L'identité remarquable permettant de factoriser $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ possède elle aussi une généralisation à toute expression de la forme a^n-b^n, $n \in \mathbb{N}$.
- Nous verrons tout cela dans le Chapitre (ALG) 4.

Exercice 3 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=1$.

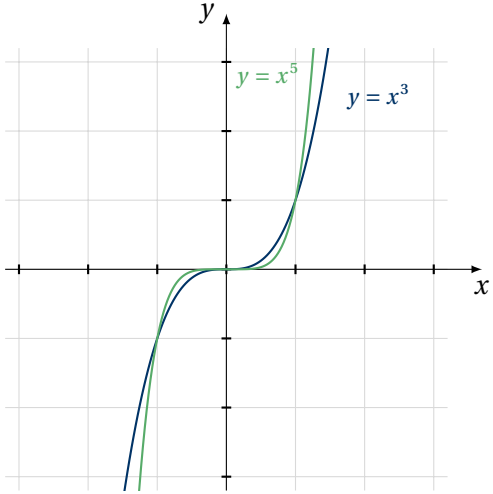
1. Montrer que :
$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right).$$
2. En déduire que : $ab+bc+ca \leqslant \frac{1}{3}$.

Encadrements et puissances entières. Nous avons un résultat sur la manipulation des encadrements et des puissances, qui précise en d'autres termes la monotonie de certaines fonctions puissance, le voici.

Proposition 12 | Puissances et encadrements

- Soit $n = 2k+1 \in \mathbb{N}$ un entier impair, $k \in \mathbb{N}$. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff x^n \leqslant y^n.$$
Autrement dit, la fonction $x \longmapsto x^{2k+1}$ est strictement croissante pour tout $k \in \mathbb{N}$.

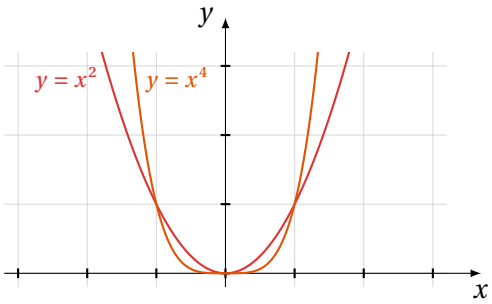
Courbe représentative de $x \longmapsto x^n$ si n est impair



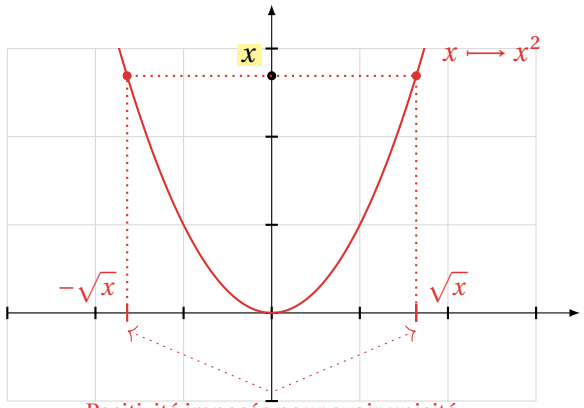
- Soit $n = 2k \in \mathbb{N}$ un entier pair, $k \in \mathbb{N}$. Alors :
  - ◇ on peut toujours élever à la puissance n un encadrement **positif**, c'est-à-dire :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant y \iff 0 \leqslant x^n \leqslant y^n.$$
  - ◇ On peut toujours élever à la puissance n un encadrement **négatif à condition de renverser l'ordre**, c'est-à-dire :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \leqslant 0 \iff 0 \leqslant y^n \leqslant x^n.$$

Autrement dit, la fonction $x \longmapsto x^{2k}$ est strictement croissante **sur** $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante **sur** $\mathbb{R}_-$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Courbe représentative de $x \longmapsto x^n$ si n est pair



Courbe représentative de $x \longmapsto x^2$



Positivité imposée pour avoir unicité

3.3 Racines carrées & cubiques

On sait élever au carré des réels, ou à une puissance plus grande. On peut aussi se poser la question inverse : est-ce que tout réel peut être vu comme le carré d'un autre? le cube d'un autre? Pour la racine carrée la réponse est clairement non pour les négatifs (un carré est forcément positif), et oui pour les positifs. Pour les cubes, il y a toujours existence et unicité.

Exemple 10

- $\sqrt{4} =$ car :
- $\sqrt{2} \approx 1.41$
- $\sqrt{36} =$ car :

Attention Racine d'un carré

La quantité $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $x^2 \geqslant 0$. En revanche, si $x < 0$, nous n'avons pas $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$!

Note | *Nous verrons un peu plus loin une formule pour simplifier $\sqrt{x^2}$ pour tout nombre réel x, qui fait appel à la valeur absolue.*

Proposition 13 | Règles sur les racines carrées

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On a :

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Racine carrée. Rappelons la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif.

Exemple 11

- $\sqrt{25 \times 64} =$
- $\sqrt{\frac{16}{49}} =$

Définition/Proposition 1 | Racine carrée

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{2}}$, tel que : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- On appelle ce réel **la** *racine carrée (ou simplement parfois « la racine »)* de x.

Attention Racine d'une somme

On ne peut rien dire de la racine d'une somme.

Par exemple, $\begin{cases} \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \end{cases}$ donc $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Note | *Il est donc absolument faux d'écrire que* $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *pour tous nombres réels positifs* a *et* b *!*

On rappelle que la règle de calcul $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$ permet de « réduire » des racines carrées *via* « extraction » de carrés parfaits[1] dans les racines carrées. Ci-après un exemple détaillé.

Exemple 12 **(Extraire un carré parfait)** Ecrire le nombre $A=\sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b *le plus petit possible* *(pour obtenir b « le plus petit possible », il faut chercher dans* 45 *le carré parfait le « plus gros possible ».)*

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{45}\\&=\sqrt{9\times 5}\\&=\sqrt{9}\times\sqrt{5}\\&=3\times\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Exemple 13 Écrire les quantités sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b *le plus petit possible* :

$\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $3\sqrt{125}$

Il arrive parfois que certaines fractions soient plus agréables à étudier sans racine carrée au dénominateur. Pour s'en débarrasser, un premier cas simple est celui où le dénominateur n'est constitué que d'une racine carrée.

Exemple 14

- $\frac{3}{\sqrt{2}}=$
- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=$

1. On appelle carré parfait le carré d'un entier naturel non nul. Ainsi, les premiers carrés parfaits sont $1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,\ldots$

Certaines racines carrées sont plus compliquées à éliminer, comme par exemple dans l'expression $\frac{1}{4-\sqrt{15}}$ *(multiplier par* $\sqrt{15}$ *au dénominateur fait apparaître un facteur* $4\sqrt{15}$ *qui traine dans les pattes!)* . On utilise alors la notion de quantité conjuguée associée à une identité remarquable pour avancer.

Définition 5 | Quantité conjuguée

Soient $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}_+$. Le nombre $A-\sqrt{B}$ est la *quantité conjuguée* de $A+\sqrt{B}$, et inversement.

Exemple 15 Par exemple, la quantité conjuguée de $4-\sqrt{15}$ est $4+\sqrt{15}$.

On a alors la relation : $\left(A+\sqrt{B}\right)\left(A-\sqrt{B}\right)=A^2-B$. Multiplier par la quantité conjuguée permet de faire « disparaître » les radicaux d'un dénominateur ou encore d'étudier le signe d'expressions de la forme $A(x)\pm B(x)$. Par exemple,

$$\frac{1}{4-\sqrt{15}}=\frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}=\frac{4+\sqrt{15}}{4^2-15}=4+\sqrt{15}.$$

Exemple 16 **(Utilisation de la quantité conjuguée)** Montrer que :

$$\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{7}}=\frac{15+2\sqrt{21}}{47}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{7}}&=\frac{\sqrt{3}(5\sqrt{3}+2\sqrt{7})}{(5\sqrt{3}-2\sqrt{7})(5\sqrt{3}+2\sqrt{7})}\\&=\frac{5\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{(5\sqrt{3})^2-(2\sqrt{7})^2}\\&=\frac{5\times 3+2\sqrt{3\times 7}}{5^2\sqrt{3}^2-2^2\sqrt{7}^2}=\frac{15+2\sqrt{21}}{75-28}=\frac{15+2\sqrt{21}}{47}.\end{aligned}$$

Exercice 4 Montrer que pour tout $x>0$, $0<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\frac{1}{2\sqrt{x}}$. En effet, via la quantité conjuguée $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, qui est strictement positive et donc non nulle, la double inégalité annoncée équivaut à

$$\begin{aligned}&0<\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\\\iff&0<\frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\iff 0 < \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\iff 0 < \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Or la première inégalité est claire, puisque $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} > 0$, et, en passant à l'inverse, la seconde devient :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x} > 2\sqrt{x} \iff \sqrt{x+1}-\sqrt{x} > 0,$$

qui est donc vraie, en vertu de la première inégalité.

Enfin, la (stricte) croissance de la fonction racine carrée permet d'obtenir certains encadrements.

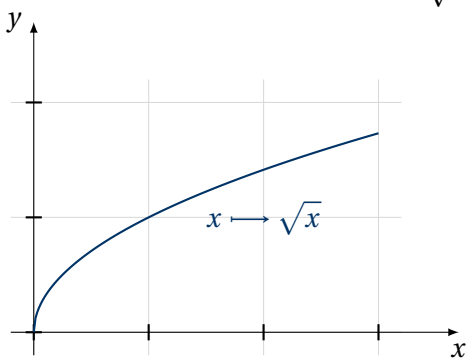
Proposition 14 | Racines et encadrements

On peut toujours appliquer la racine carrée à un encadrement de nombres réels positifs en conservant le sens de l'encadrement :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x \leqslant y \iff \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}. \\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}. \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{x}$ est (strictement) croissante.

Courbe représentative de $x \longmapsto \sqrt{x}$



Exemple 17 Montrer que : $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$. *(cette technique peut être très utile lorsque l'on ne connait pas de valeur approchée d'une racine)*

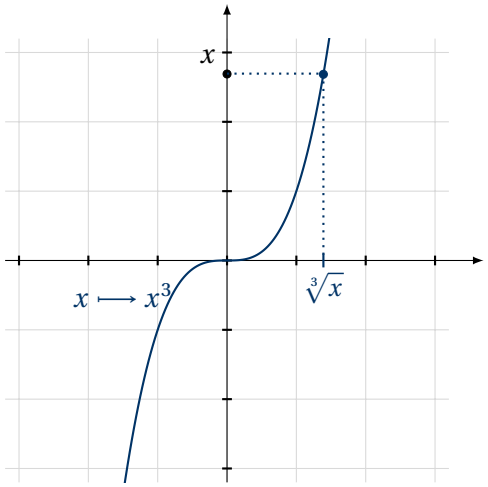
La racine cubique. Moralement, la racine cubique d'un nombre réel x est l'unique nombre réel qui, élevé au cube, donne le réel x. Une différence notable entre racine carrée et racine cubique est que la racine cubique est définie pour tout nombre réel x, alors que la racine carrée n'est définie que sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Définition/Proposition 2 | Racine cubique

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt[3]{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{3}}$, tel que :

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$. On appelle ce réel **la** *racine cubique* de x.

Courbe représentative de $x \longmapsto x^3$



Exemple 18 Déterminer $\sqrt[3]{8}$ ainsi que $\sqrt[3]{-27}$.

Les propriétés sur les racines cubiques sont analogues à celles sur les racines carrées.

Proposition 15 | Règles sur les racines cubiques

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$.
- Si on a de plus $y \neq 0$, alors : $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$.
- $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$, $\sqrt[3]{x^3} = x$.

Exercice 5 **(Comparaison des moyennes)** Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3.4 Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est le même nombre réel mais dont on aurait enlevé le signe devant. Ainsi, si ce réel est positif il n'y a rien à faire, c'est sa valeur absolue. En revanche, s'il est négatif, il suffit d'ajouter un signe « - » devant ledit réel. Cela nous mène tout droit à la définition ci-après.

Définition 6 | Valeur absolue
Soit $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue de* x, notée $|x|$, est le réel défini par :

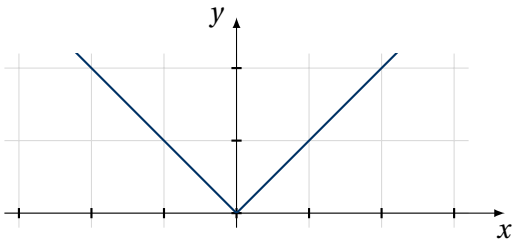
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 19 Déterminer :

- $|2| =$
- $|0| =$
- $|-3| =$
- $|-\pi| =$

La définition de la valeur absolue permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Courbe représentative de $x \longmapsto |x|$



Exemple 20 Donner, en fonction de x, un expression sans valeur absolue de la quantité $|x-3|-|x+2|$. *On pourra présenter le résultat sous forme d'un tableau.*

Définition 7 | Distance entre deux réels
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit la *distance de x à y* comme étant le réel noté $\mathrm{d}(x, y)$ et défini par : $\mathrm{d}(x, y) = \max(x, y) - \min(x, y)$. C'est donc la différence entre la plus grande valeur et la plus petite.

Exemple 21

- $\mathrm{d}(1, 4) = 4 - 1 = 3$,
- $\mathrm{d}(3, -1) = 3 - (-1) = 4$.

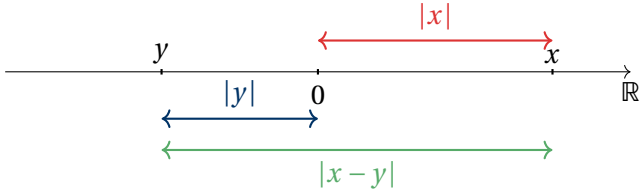
Proposition 16 | Lien entre distance et valeur absolue
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$.

Preuve *(Point clef — **Disjonction de cas suivant la position entre x et y**)*

-
-

Remarque 4 Puisque pour tout réel x, on a : $|x| = |x - 0|$, **la valeur absolue de x peut s'interpréter comme étant la distance entre x et 0.** *(Cette remarque sera essentielle pour interpréter certaines équations et inéquations en terme de distance)*

Les réels peuvent se représenter sur une droite dite « numérique », les quantités définies ci-dessus (valeur absolue et distante) se visualisent comme suit.



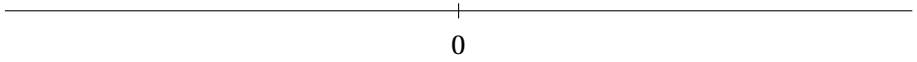
Pour tous réels x, y, la valeur absolue correspond à l'écart (sans signe) entre x et y, et $|x|$ représente donc la distance entre x et 0.

Proposition 17 | Propriétés de la valeur absolue et de la distance

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

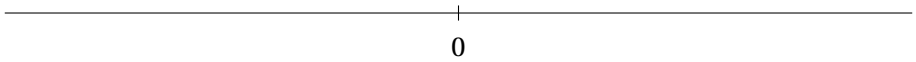
- $|0| = 0$,
- $|x| \geqslant 0$, $\quad |x| = \max\{x, -x\}$.
- **[Séparation]** $|x| = 0 \iff x = 0$, $\quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.
- **[Parité / Symétrie]** $|x| = |-x|$, $\quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.
- **[Equation et valeur absolue]** Pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$:

  $|x| = \mathrm{M} \iff x = \mathrm{M}$ **ou** $x = -\mathrm{M}$

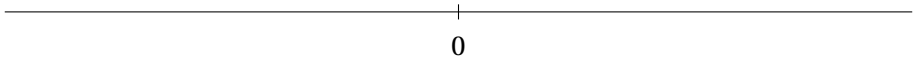


- **[Encadrement et valeur absolue]** $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- **[Inéquation et valeur absolue]** Plus généralement, pour tout $(m, \mathrm{M}) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

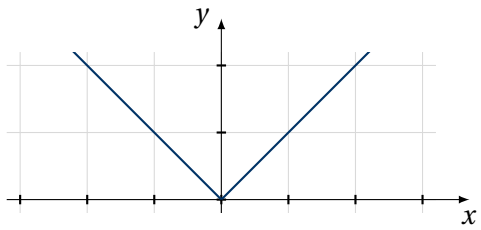
  $|x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}$



$|x| \geqslant \mathrm{M} \iff x \geqslant \mathrm{M}$ **ou** $x \leqslant -\mathrm{M}$.



$m \leqslant |x| \leqslant \mathrm{M} \iff m \leqslant x \leqslant \mathrm{M}$ **ou** $-\mathrm{M} \leqslant x \leqslant -m$.



Note | *Les propriétés restent vraies avec des inégalités strictes.*

- **[Carré]** $|x| = \sqrt{x^2}$, $\quad |x|^2 = x^2$.
- **[Égalité de valeurs absolues]** $|x| = |y| \iff x = y$ **ou** $x = -y$.
- **[Produit/quotient]** $|xy| = |x| \times |y|$. De plus si $y \neq 0$, alors :

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Remarque 5

- Les propriétés

  $|x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}$, $\quad |x| \geqslant \mathrm{M} \iff x \geqslant \mathrm{M}$ **ou** $x \leqslant -\mathrm{M}$

  sont très intuitives si on garde à l'esprit l'interprétation de la valeur absolue en terme de distance à l'origine. Par exemple, si $|x| \leqslant \mathrm{M}$, alors cela signifie que x est à distance au plus M de l'origine, donc que x est dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$.
- Elles entrainent d'ailleurs leurs analogues pour la fonction carrée : pour

tout $M \in \mathbb{R}^+$,

$$x^2 \leqslant M \iff \sqrt{x^2} = |x| \leqslant \sqrt{M} \iff -\sqrt{M} \leqslant x \leqslant \sqrt{M}.$$

Preuve

- La propriété $|0| = 0$ est évidente.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Séparation]** Montrons celle pour la valeur absolue, celle pour la distance s'obtient en remplaçant x par $x - y$ dans la première. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Parité / Symétrie]** Montrons celle pour la valeur absolue, celle pour la distance s'obtient en remplaçant x par $x - y$ dans la première. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Équation et valeur absolue]**

  $\Leftarrow$

  $\Rightarrow$

- **[Encadrement et valeur absolue]** Par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Inéquation et valeur absolue]** On démontre par exemple la première, et les autres on se contente du dessin. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Carré]** Si $x \geqslant 0$ alors
  $$\sqrt{x^2} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x = |x|.$$
  Si $x < 0$ alors $-x \geqslant 0$ et on a :
  $$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x)} \times \sqrt{(-x)} = \sqrt{(-x)}^2 = -x = |x|.$$
  La deuxième partie de la formule est une conséquence directe de la première, en l'élevant au carré.

- **[Egalité de valeurs absolues]**

- **[Produit / Quotient]** On peut par exemple utiliser la propriété analogue déjà démontrée pour la racine.

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x| \times |y|.$$

Théorème 1 | Inégalité triangulaire

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors : $\quad ||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Note | *La majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.*

- **[Égalité]** En outre, on sait caractériser les cas d'égalité :

$$|x + y| = |x| + |y| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad x = \lambda y,$$
$$|x + y| = ||x| - |y|| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_-, \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad x = \lambda y.$$

On dit alors que x, y sont *positivement* ou *négativement liés*.

Preuve

- ◇ Commençons par montrer que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Les quantités étant positives, nous allons montrer que l'inégalité élevée au carré est vraie.

◇ On montre ensuite : $\quad ||x| - |y|| \leqslant |x + y|$.

$$||x| - |y||^2 = |x|^2 - 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 - 2|xy| + y^2.$$

Or $xy \geqslant -|xy|$, d'où $x^2 + y^2 + 2xy \geqslant x^2 - 2|xy| y^2$, c'est-à-dire

$$|x + y|^2 \geqslant ||x| - |y||^2.$$

Et, comme $|x + y| \geqslant 0$ et $||x| - |y|| \geqslant 0$, en obtient en passant à la racine :

$$|x + y| \geqslant ||x| - |y||.$$

- Montrons par exemple le 1er cas d'égalité, le second se traite de la même manière. D'après la preuve précédente, on a :

$$|x + y| = |x| + |y| \iff xy = |xy| \iff xy \geqslant 0 \iff x, y \text{ sont de même signe.}$$

Il s'agit donc de prouver désormais que :

$$x, y \text{ sont de même signe} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad y = \lambda x \text{ ou } x = \lambda y.$$

Attention

- Pour tous réels x et y, on a $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ donc en remplaçant y par $-y$, on obtient (puisque $|-y| = |y|$) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leqslant |x| + |y|.$$

- En revanche, il est complètement faux d'écrire : $\quad |x - y| \leqslant \cancel{|x| - |y|}$.

- Il est aussi faux d'écrire que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\leqslant y \implies |x|\leqslant |y|$.

(Valeur absolue d'un réel)

```
def val_absolue(x):
    """
    Calcule valeur absolue de x
    """
    if x >= 0:
        return x
    else:
        return -x
```

```
>>> val_absolue(1)
1
>>> val_absolue(-1)
1
```

Exercice 6 Démontrer le majorant de l'inégalité triangulaire sans élévation au carré. *(On pourrait traiter le minorant de la même manière ; inconvénient de cette méthode, elle ne permet pas de traiter le cas d'égalité facilement...)*

Exercice 7 Soient x et y deux réels. En utilisant que :

$$x=\frac{1}{2}((x+y)+(x-y)),\quad y=\frac{1}{2}((x+y)-(x-y)),$$

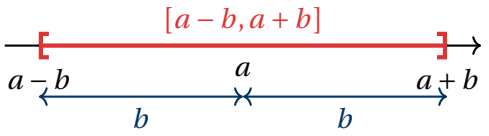
montrer que : $|x|+|y|\leqslant |x+y|+|x-y|$.

INTERVALLES ET LIEN AVEC LA VALEUR ABSOLUE. Les intervalles centrés autour d'un point peuvent être reformulés à l'aide de la valeur absolue, puisque rappelons que pour tout $b\in\mathbb{R}^+, x\in\mathbb{R}$:

$$|x|\leqslant b \iff -b\leqslant x\leqslant b \iff x\in[-b,b],$$

ou encore pour tout $x,a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^+$:

$$|x-a|\leqslant b \iff -b\leqslant x-a\leqslant b \iff x\in[a-b,a+b].$$



Dans les équivalences précédentes, on peut remplacer $\leqslant$ par $<$, on obtient dès lors :

Proposition 18
Soient $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^+$. Alors :

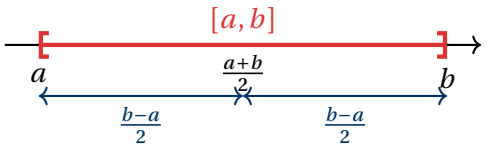
$$x\in]a-b,a+b[\iff |x-a|<b,\quad x\in[a-b,a+b] \iff |x-a|\leqslant b.$$

Si on veut plutôt exprimer des intervalles aux bornes a,b, on a la proposition suivante.

Proposition 19 | Intervalles et valeur absolue
Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\leqslant b$. Alors :

$$x\in[a,b] \iff \mathrm{d}\left(x,\frac{a+b}{2}\right)=\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}.$$

Graphiquement, on a la situation suivante :



Preuve

En résumé, la valeur absolue est une quantité très efficace pour traduire des conditions d'appartenance à un certain intervalle. Nous utiliserons régulièrement ce genre de choses en analyse.

Exercice 8 **(Propagation des erreurs)** Supposons que :

$$|x_1 - a_1| \leqslant \varepsilon_1, \quad |x_2 - a_2| \leqslant \varepsilon_2, \quad \dots \quad |x_n - a_n| \leqslant \varepsilon_n,$$

où les x_k, a_k et ε_k sont des réels. Montrer que :

$$|(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n.$$

4 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

Cette section vise à parcourir les différentes méthodes à connaitre, relatives aux équations et inéquations. Elle est à lire à la maison, le programme officiel ne prévoyant pas de temps dédié en cours pour cela. On en abordera en TD, vous devez aussi vous entrainer avec le cahier de calcul si vous vous sentez fragile sur le sujet.

4.1 Principes généraux de raisonnement

Rien de bien nouveau dans cette partie par rapport aux classes antérieures. On formalise simplement différents types de raisonnements rencontrés jusqu'alors pour résoudre des équations et inéquations, à l'aide des rudiments de logique développés dans le chapitre de logique. Commençons par rappeler des erreurs cruciales à ne pas commettre.

Attention **Au sujet des divisions / factorisations**

- Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle.
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$ *(sauf si a et b sont de même signe, auquel cas il convient de le préciser!)* . Mais, on rédige souvent la condition en utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \\ &\iff (a-b)(a+b) = 0 \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

Comment procéder pour résoudre une équation? Plusieurs méthodes s'offrent à nous.

Méthode (ALG) 2.1 **(Résolution d'une équation ou inéquation)** Étant donnée une équation ou une inéquation,

- **[Domaine de résolution]** On commence par déterminer le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans le domaine de résolution** de l'équation (ou inéquation). Ce domaine de résolution s'obtient en exprimant des conditions naturelles d'existence des quantités mises en jeu (présente d'un logarithme, d'une racine carrée, d'un quotient, ...). Plus formellement, si l'équation/inégation est de la forme :

$$f(x) = (\text{ou } \leqslant, \geqslant, <, >)\ g(x), \quad \text{alors } \mathscr{D}_r = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g.$$

- **[Résolution de l'équation]** On raisonne ensuite par équivalences pour déterminer l'ensemble des solutions du problème posé.
- **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geqslant g(x)$ avec f et g deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Notation **Ensemble de résolution et de solutions**

- On note en général $\mathscr{D}_r$ le domaine de résolution.
- L'ensemble des solutions *(sous-ensemble du domaine de définition)* est souvent noté $\mathscr{S}$.
- Lorsque l'on cherche les solutions uniquement dans un certain ensemble E, on notera $\mathscr{S}_E$ les solutions appartenant à E. En d'autres termes : $\mathscr{S}_E = \mathscr{S} \cap E$.
- Lorsque $E =]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, on notera plus simplement $\mathscr{S}_{\leqslant a}$. De-même pour $\mathscr{S}_{<a}, \mathscr{S}_{\geqslant a}, \mathscr{S}_{>a}$.

Attention

Il ne suffit pas d'écrire sur sa feuille un symbole « $\iff$ » pour prouver ladite équivalence! Si certaines ne sont pas évidentes, une justification précise est attendue *(surtout si on élève au carré une inégalité...)*

4.2 Résolution des équations avec des produits et des quotients

En cas de présence de produits/de quotients, on intègre les réflexes suivants lorsqu'on cherche à résoudre une (in)équation :

- tout passer du même côté pour comparer à 0, *(histoire de se ramener à une étude de signe)*
- tout mettre sur le même dénominateur le cas échéant, *(si présence de fractions)*
- factoriser au maximum. *(car il est pratique d'étudier le signe d'un produit/d'un quotient)* .

Méthode (ALG) 2.2 **(Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient)** Soient A et B deux réels.

- $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
- $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ (et $B \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour $AB \leqslant 0$ ou $\frac{A}{B} \leqslant 0$, on dresse un **tableau de signe** pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.
- Lorsque le membre de droite n'est pas $= 0, \leqslant 0, \geqslant 0$, on passe tout d'un côté et on applique les méthodes précédentes.

4.3 Cas polynomial

Étude de $ax + b$, $a \neq 0$. Tout se cache dans le tableau de signe.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Exemple 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

- $x(x+2) = 2x(3x-4)$.

$$x(x+2) = 2x(3x-4) \iff x(x+2-2(3x-4)) = 0$$
$$\iff 5x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{0, 2\}}$.

- $(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3)$.

$$(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3) \iff (3x-1)(x+2) > 2(1-3x)(4x+3)$$
$$\iff (3x-1)(x+2+8x+6) > 0$$
$$\iff (3x-1)(9x+8) > 0$$

Le tableau de signe est alors :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{9}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$9x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-1)(9x+8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit alors l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{8}{9}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[}.$$

- $\frac{2}{x} \geqslant \frac{4}{x+4}$. Le domaine de résolution est $\mathbb{R}\setminus\{-4;0\}$. De plus :

$$\frac{2}{x} \geqslant \frac{4}{x+4} \iff \frac{2}{x} - \frac{4}{x+4} \geqslant 0$$
$$\iff \frac{2(x+4)-4x}{x(x+4)} \geqslant 0 \iff \frac{-2(x-4)}{x(x+4)} \geqslant 0.$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$8-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{8-2x}{x(x+4)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

À l'aide du tableau, on déduit l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]0, 4]}.$$

Exercice 9 Résoudre $(x+1)^2 > (2x-3)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de ax^2+bx+c, $a \neq 0$.

On reprend les formules vues au lycée pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels. Elles seront généralisées dans le chapitres sur les nombres complexes, aux cas de coefficients complexes.

Considérons un trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en mettant le trinôme sous forme « canonique »[2]. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right)\right]. \end{aligned}$$

Le terme entre crochet ressemble à une identité remarquable de la forme « a^2-b^2 ». Deux cas se présentent, en notant $\Delta = b^2-4ac$:

- si $\Delta > 0$:
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \end{aligned}$$
donc : $ax^2+bx+c=0 \iff x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$:
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2, \end{aligned}$$
donc : $ax^2+bx+c=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, alors
$$ax^2+bx+c = a\left[\underbrace{\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}-\underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}}_{>0}\right] \quad \text{avec } a \neq 0,$$
donc $ax^2+bx+c \neq 0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On arrive tout droit au théorème suivant, déjà énoncé en classe de Première.

Théorème 2 | Second degré sur $\mathbb{R}$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
On cherche les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x. On appelle *discriminant* la quantité $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles distinctes (appelées *racines simples du trinôme*) :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$ alors il n'y a qu'une solution réelle (appelée *racine double du trinôme*) définie par $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

De plus, on connait le signe de l'expression $P(x) = ax^2+bx+c$ pour tout nombre réel x.

Proposition 20 | Signe d'un trinôme

On note $P : x \longmapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$.

- Si $\Delta > 0$, le tableau de signe de P est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de P	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de P est donné par

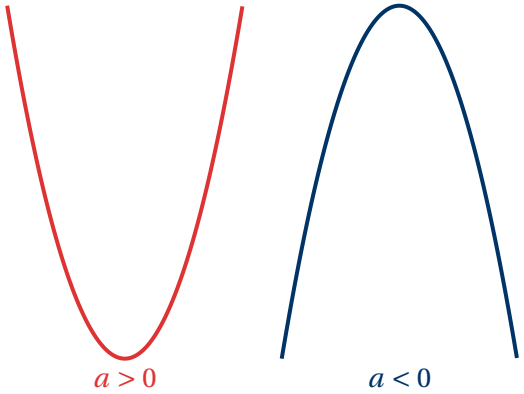
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de P	signe de a		0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, le tableau de signe de P est donné par

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de P	signe de a		

Le signe de a dicte l'allure de la courbe représentative du trinôme :

2. C'est-à-dire sans facteur en x



Le signe de Δ indique de nombre de points d'annulation du trinôme. Un cas particulier à retenir est le suivant : si le trinôme ax^2+bx+c possède deux racines distinctes, le trinôme est « du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Exemple 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante.

- $-2x^2+5x+3=0$. On trouve que les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2};3\right\}}$.
- $-2x^2+5x+3>0$. Puisqu'on a déjà calculé les racines, on déduit immédiatement le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est alors : $\boxed{\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2},3\right[}$.

Exercice 10 Soit $m\in\mathbb{R}$ et soit P le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x)=2x^2+(2m+2)x+m^2-1.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $P(x)=0$ admet-elle une unique solution ? Quelle est alors cette solution ?

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (E)$$

on ne calcule le discriminant Δ que dans les cas indispensables, il existe certains cas particuliers permettant d'économiser beaucoup de temps de calcul.

ÉTUDE DE ax^2+c, $a\neq 0$ (CAS $b=0$). L'équation (E) s'écrit alors :

$$(E)\quad ax^2+c=0 \iff x^2=-\frac{c}{a}.$$

On se ramène alors à une équation du type $x^2=k$ en ayant posé $k=-\frac{c}{a}$.

Proposition 21 | Résolution de l'équation $x^2=k$

Soit $k\in\mathbb{R}$, considérons l'équation $x^2=k$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

- si $k>0$, $x^2=k \iff x=\sqrt{k}$ **ou** $x=-\sqrt{k}$

  Note | *Prenez garde à ne pas oublier cette deuxième solution !*
- si $k=0$, $x^2=0 \iff x=0$.
- si $k<0$, l'équation $x^2=k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Preuve

- si $k>0$, alors k possède une racine carrée et
$$\begin{aligned} x^2=k &\iff x^2=\left(\sqrt{k}\right)^2\\ &\iff x^2-\left(\sqrt{k}\right)^2=0\\ &\iff \left(x-\sqrt{k}\right)\left(x+\sqrt{k}\right)=0\\ &\iff x=\sqrt{k} \text{ ou } x=-\sqrt{k}. \end{aligned}$$
- L'équivalence $x^2=0 \iff x=0$ est évidente.
- si $k<0$, l'équation $x^2=k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque $x^2\geq 0$ tandis que $k<0$: un nombre réel positif ne peut pas être égal à un nombre réel strictement négatif !

Exemple 24 Résoudre *rapidement* dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-7=0$.

$$2x^2-7=0 \iff x^2=\frac{7}{2} \iff x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{\tfrac{7}{2}};\sqrt{\tfrac{7}{2}}\right\}}$.

ÉTUDE DE ax^2+bx, $a\neq 0$ (CAS $c=0$). L'équation (E) s'écrit alors :

$$(E)\quad ax^2+bx=0 \iff x(ax+b)=0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Bref, un facteur commun apparaît, pas besoin là encore de calculer Δ !

Étude de $a^2x^2 + 2abx + b^2$, $a \neq 0$ (identité remarquable). Si l'on reconnaît le développement d'une identité remarquable, la résolution est très rapide (on obtient alors une unique solution).

Exemple 25 Résoudre *rapidement* dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \iff (2x+1)^2 = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$.

Cas de racines évidentes. Cette dernière méthode, certainement nouvelle pour la plupart d'entre vous, est très élégante à mettre en pratique. Elle est basée sur la proposition suivante.

Proposition 22 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 2

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, tels que $\Delta > 0$, où $\Delta = b^2 - 4ac$. Notons x_1, x_2 les deux solutions de $ax^2 + bx + c = 0$. Alors : $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$.

Ainsi, connaissant une racine, on peut facilement obtenir l'autre.

Preuve On sait que $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta^2}{4a^2}$$
$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Exemple 26 Pour les équations qui suivent, déterminer une solution évidente (*i.e.* dans $\{-2,-1,0,1,2\}$), puis en déduire la deuxième.

- $3x^2 - 2x - 1 = 0$. On constate que 1 est racine. Notons α la seconde, d'après les relations coefficients racines on $1 \times \alpha = \frac{-1}{3}$. Ainsi, $\alpha = -\frac{1}{3}$.
- $x^2 - 2026x - 2027 = 0$.

  On constate que -1 *est racine. Notons* α *la seconde, d'après les relations coefficients racines on* $(-1) \times \alpha = -2027$. *Ainsi,* $\alpha = 2027$.

Note | *Dans cet exemple, le calcul de* Δ *serait rédhibitoire étant donnés les coefficients...*

Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3. Tout ce qui suit deviendra plus naturel lorsque nous traiterons les polynômes dans le chapitre sur les polynômes.

Méthode (ALG) 2.3 (Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3)

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :
  - soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
  - soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0) = 0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme
    $$A(x) = (x - x_0)B(x)$$
    pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Exemple 27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$. On pourra commencer par chercher $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$
$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Par identification,

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b - a &= -4 \\ c - b &= 1 \\ -c &= 2 \end{cases} \iff a = 1, \quad b = -3, \quad c = -2.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(x^2 - 3x - 2)$.

Résolvons alors l'équation :

$$x^3-4x^2+x+2=0 \iff (x-1)(x^2-3x-2)=0$$
$$\iff x=1 \text{ ou } x^2-3x-2=0.$$

Après calcul de discriminant, on trouve que les racines de $x\mapsto x^2-3x-2$ *sont* $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. *En conclusion :* $\mathcal{S}=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2},1,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

4.4 Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

Rappel des propriétés de exp, ln. Les fonctions exp, ln seront revues un peu plus tard, mais rappelons un kit de survie concernant leurs propriétés.

Proposition 23 | Quelques propriétés de exp et ln

- **[Exponentielle]**

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{x+y}=e^xe^y,\quad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}.$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (e^x)^n=e^{nx}.$$

- **[Logarithme]**

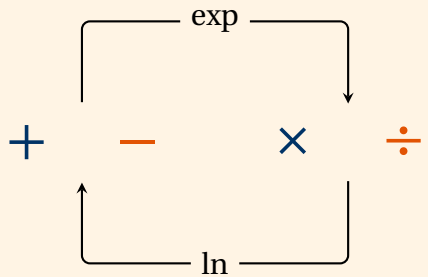
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y),\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y).$$
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \ln(x^n)=n\ln x.$$

- **[Réciprocité]**

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \ln(e^x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\quad e^{\ln x}=x.$$

Résumé

Une partie des propriétés peuvent être retenues de la manière suivante.



Utiliser les propriétés de ln, exp. L'idée est d'essayer d'appliquer ln ou exp de chaque côté afin de simplifier l'équation.

Exemple 28 Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $2\ln(x+1)=\ln(x-1)+\ln(2x-1)$. L'équation est définie lorsque

$$\begin{cases} x+1 &> 0\\ x-1 &> 0\\ 2x-1 &> 0\end{cases} \iff x>1.$$

Ainsi, l'ensemble de définition est : $\mathcal{D}_r=]1,+\infty[$.
Pour tout $x\in\mathcal{D}_r$,

$$2\ln(x+1)=\ln(x-1)+\ln(2x-1)$$
$$\iff \ln\left((x+1)^2\right)=\ln\left((x-1)(2x-1)\right)$$
$$\iff (x+1)^2=(x-1)(2x-1)$$
$$\iff x^2+2x+1=2x^2-3x+1$$
$$\iff x^2-5x=0=x(x-5)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=5.$$

Comme $0\notin\mathcal{D}_r$ et $5\in\mathcal{D}_r$, on obtient : $\boxed{\mathcal{S}=\{5\}}$.

2. $e^{x+1}e^{3x-4}>1$. On a :

$$e^{x+1}e^{3x-4}>1 \iff e^{4x-3}>1 \iff 4x-3>0$$

puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi : $e^{x+1}e^{3x-4}>1 \iff x>\frac{3}{4}$. Donc : $\boxed{\mathcal{S}=\left]\frac{3}{4},+\infty\right[}$.

Élever au carré. L'idée est d'essayer d'élever au carré afin de supprimer d'éventuelles racines. Attention : on rappelle qu'on ne peut élever au carré n'importe comment une inégalité ! Il faut toujours prendre la précaution de savoir si les membres sont positifs.

Exemple 29 Résoudre, par disjonction de cas, l'équation : $x=\sqrt{x+2}$. *On retrouve une équation du Chapitre (ALG) 1 traité par analyse-synthèse*
L'équation est définie sur $[-2,+\infty[$. Pour élever au carré et conserver l'équivalence, on doit avoir des termes positifs.

- **[Cas 1]** Si $x<0$, alors l'équation n'a pas de solution car on aurait $\sqrt{x+2}<0$. Ainsi, $\mathcal{S}_{<0}=\emptyset$.
- **[Cas 2]** Si $x\geqslant 0$, alors puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$x=\sqrt{x+2} \iff x^2=x+2$$
$$\iff x^2-x-2=0$$

$$\iff (x+1)(x-2)=0$$
$$\iff x\in\{-1,2\}.$$

Donc : $\mathscr{S}_{\geqslant 0}=\{2\}$. *(on ne garde que les solutions dans le domaine de définition et positives)*

Conclusion : $\mathscr{S}=\mathscr{S}_{<0}\cup\mathscr{S}_{\geqslant 0}=\boxed{\{2\}}$.

Exemple 30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x^2+2x}<x+1$.
La fonction $x\longmapsto x^2+2x$ est un trinôme de racines 0 et -2, l'équation est donc définie sur $]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$. Pour élever eu carré et conserver l'équivalence, on doit avoir des termes positifs.

- **[Cas 1]** Si $x<-1$, alors l'équation n'a pas de solution car on aurait $\sqrt{x^2+2x}<0$. Ainsi, $\mathscr{S}_{<-1}=\emptyset$.
- **[Cas 2]** Si $x\geqslant -1$, alors puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x^2+2x}<x+1 \iff x^2+2x<(x+1)^2$$
$$\iff \cancel{x^2}+\cancel{2x}<\cancel{x^2}+\cancel{2x}+1$$
$$\iff 0<1, \quad \text{toujours vraie.}$$

Donc : $\mathscr{S}_{\geqslant -1}=[-1,+\infty[\cap]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[)=[0;+\infty[$. *(on ne garde que les solutions dans le domaine de définition)*

Conclusion : $\mathscr{S}=\mathscr{S}_{<-1}\cup\mathscr{S}_{\geqslant -1}=\boxed{[0;+\infty[}$.

Utiliser un changement de variable.

Il s'agit de poser un changement de variable du type $X=e^x$ ou $X=\ln(x)$ ou $X=x^2$ ou $X=\sqrt{x}$... pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre (en général polynomiale).

Attention

Attention, une fois les valeurs possibles de X trouvées, il ne faut pas oublier de revenir aux solutions en x pour conclure.

Exemple 31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^4-3x^2+2=0$ et $x^4-3x^2+2<0$.
Posons $X=x^2$. On a alors :

$$x^4-3x^2+2=0 \iff X^2-3X+2=0, \quad \text{et} \quad X=x^2.$$

Les racines du trinôme $X^2-3X+2=0$ étant 1 et 2,

$$x^4-3x^2+2=0 \iff x^2=1 \text{ ou } x^2=2 \iff x\in\left\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\right\}.$$

Pour l'inéquation, $X^2-3X+2<0 \iff X\in]1;2[$ donc

$$x^4-3x^2+2<0 \iff 1<x^2<2 \iff x\in\left]-\sqrt{2},-1\right[\cup\left]1,\sqrt{2}\right[.$$

2. $e^x+e^{1-x}=e+1$.
$e^x+e^{1-x}=e+1 \iff e^{2x}+e=(e+1)e^x \iff (e^x)^2-(e+1)e^x+e=0$. On a alors :

$$e^x+e^{1-x}=e+1 \iff X^2-(e+1)X+e=0, \quad \text{et} \quad X=e^x.$$

Le trinôme $X^2-(e+1)X+e$, possède 1 comme racine évidente, la seconde est e à l'aide des relations coefficients-racines. Donc :

$$e^x+e^{1-x}=e+1 \iff e^x=1 \text{ ou } e^x=e \iff x=0 \text{ ou } x=1.$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset.}$

Enlever les valeurs absolues.

Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qu'il y a à l'intérieur. On peut donc étudier le signe de l'expression dans la valeur absolue puis faire une disjonction de cas pour résoudre l'(in)équation obtenue sans la valeur absolue dans chacun des cas possibles. On peut aussi utiliser une propriété sur la valeur absolue. Voyons cela sur plusieurs exemples.

Exemple 32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x-4|=2x+10$.

- **[Méthode 1 : disjonction de cas]**
  - **[Cas 1]** Si $x\geqslant 4$, alors $x-4\geqslant 0$ donc l'équation est :
    $$|x-4|=2x+10 \iff x-4=2x+10 \iff x=-14.$$
    Ainsi, comme $-14\ngeqslant 4$, on a $\mathscr{S}_{\geqslant 4}=\emptyset$.
  - **[Cas 2]** Si $x<4$, alors $x-4<0$ donc l'équation est :
    $$|x-4|=2x+10 \iff 4-x=2x+10 \iff x=-2.$$
    Ainsi, comme $-2<4$, on a $\mathscr{S}_{<4}=\{-2\}$.

  Conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\{-2\}}$.
- **[Méthode 2 : propriété « $|y|=M \iff \ldots$ lorsque $M\geqslant 0$ »]**
  - **[Cas 1]** Si $2x+10<0$ c'est-à-dire $x<-5$, l'équation n'a pas de solution puisque une valeur absolue est forcément positive. Donc $\mathscr{S}_{<-5}=\emptyset$.
  - **[Cas 2]** Si $2x+10\geqslant 0$ c'est-à-dire $x\geqslant -5$, alors :
    $$|x-4|=2x+10 \iff x-4=2x+10 \text{ ou } x-4=-(2x+10)$$
    $$\iff x=-14 \text{ ou } x=-2.$$
    Ainsi, comme $-2\geqslant -5$, on a $\mathscr{S}_{\geqslant -5}=\{-2\}$.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \{-2\}}$.

2. $|3-x| > |x+2|$. *Quand il y a plusieurs valeurs absolues, il peut être judicieux de commencer par dresser un tableau de signe.*

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

- si $x \in]-\infty;-2]$, l'inéquation devient :
  $$3-x > -x-2 \iff 3 > -2$$
  ce qui est toujours vrai donc l'inéquation est vérifiée pour tout $x \in]-\infty;-2]$.
- si $x \in [-2;3]$, l'inéquation devient
  $$3-x > x+2 \iff x < \frac{1}{2}$$
  donc l'inéquation est vérifiée pour tout $x \in [-2;\frac{1}{2}[$.
- si $x \in [3;+\infty[$, l'inéquation devient
  $$x-3 > x+2 \iff -3 > 2$$
  ce qui est toujours faux donc l'inéquation n'est vérifiée pour aucun $x \in [3;+\infty[$.

Finalement, $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty;\frac{1}{2}[}$.

RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS PAR UNE ÉTUDE DE FONCTION. Si on souhaite montrer qu'une inéquation est vraie pour tout x dans un certain sous-ensemble E (de $\mathbb{R}$), ou même vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que l'on n'y parvient pas par inégalités successives, on peut essayer d'étudier les variations d'une certaine fonction.

Méthode (ALG) 2.4 **(Pour montrer « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$ »)** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- On définit la fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

Commençons par un exemple complet.

Exemple 33 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^x \geqslant x+1$.

Note *Même si la question est ici formulée par une inéquation, on retiendra ici qu'une étude de fonction permet d'établir des inégalités.*

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x - x - 1$. La fonction f est dérivable car somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \exp(x) - 1$. Ainsi, si $x > 0$ alors $f'(x) > 0$ et si $x < 0$ alors $f'(x) < 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variations f admet 0 pour minimum sur $\mathbb{R}$ et l'atteint en 0. On a donc montré que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ et, par suite, $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$.

Exercice 11 Montrer, par deux méthodes, que pour tout $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (ALG) 2.1 **(Résolution d'une équation ou inéquation)** Étant donnée une équation ou une inéquation,

- **[Domaine de résolution]** On commence par déterminer le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans le domaine de résolution** de l'équation (ou inéquation). Ce domaine de résolution s'obtient en exprimant des conditions naturelles d'existence des quantités mises en jeu (présente d'un logarithme, d'une racine carrée, d'un quotient, ...). Plus formellement, si l'équation/inégation est de la forme :
$$f(x) = (\text{ou } \leqslant, \geqslant, <, >)\, g(x), \quad \text{alors } \mathscr{D}_r = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g.$$
- **[Résolution de l'équation]** On raisonne ensuite par équivalences pour déterminer l'ensemble des solutions du problème posé.
- **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geqslant g(x)$ avec f et g deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Méthode (ALG) 2.2 **(Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient)** Soient A et B deux réels.

- $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
- $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ (et $B \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour $AB \leqslant 0$ ou $\frac{A}{B} \leqslant 0$, on dresse un **tableau de signe** pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.
- Lorsque le membre de droite n'est pas $= 0, \leqslant 0, \geqslant 0$, on passe tout d'un côté et on applique les méthodes précédentes.

Méthode (ALG) 2.3 **(Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3)**

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :
  - ◇ soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
  - ◇ soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0) = 0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme
  $$A(x) = (x - x_0)B(x)$$
  pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Méthode (ALG) 2.4 **(Pour montrer « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$ »)** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- On définit la fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

5 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Sur les ensembles de nombres :
   - les ensembles classiques ..... ☐
   - les propriétés de l'addition et la multiplication des réels ..... ☐
   - les règles de calcul dans $\mathbb{Q}$ ..... ☐
   - les règles sur les puissances, les racines, ... ☐
   - les identités remarquables ..... ☐
2. Sur la relation d'ordre des réels :
   - les propriétés de la relation d'ordre ..... ☐
   - les compatibilités ..... ☐
   - le cas des puissances ..... ☐
   - les propriétés de la valeur absolue ..... ☐
   - l'inégalité triangulaire ..... ☐
3. Connaitre les différentes techniques de résolutions d'équations & d'inéquations ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.
Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler **1/2/3/4/5/6**

Exercice 1 | ●○○Un peu de logique Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^3$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, x = y^3$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^3$.

Solution (exercice 1) Étude de chaque assertion :

1. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
2. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+, x \neq y^2$.
3. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
4. Vrai : car tout réel x possède une racine cubique y, en particulier tout réel positif aussi. On peut constater que si $x \geqslant 0$ alors $y = \sqrt[3]{x} \geqslant 0$ (voir la courbe de la fonction cube par exemple).
5. Vrai : existence et unicité de la racine cubique.
6. Faux : pour $x = -1$, sa racine cubique est -1, qui n'est pas positive.

5.1 Calcul littéral

Cette section vient compléter celles du cahier de calcul, qu'il vous appartient de travailler en autonomie.

Exercice 2 | ●○○Puissances

1. Factoriser les expressions suivantes (n est un entier naturel) :
   $$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 3^{2n}, \quad B = \frac{2}{4^n} - 5 \times 2^{-2n-1} + 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^\star$. Réduire les expressions suivantes :
   $$A = x^{-1} \times \frac{x^9}{x^5}, \quad B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3}, \quad C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4}.$$

Solution (exercice 2)

1.

$$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3\times 3^{2n} = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3\times 9^n$$
$$= 9^n\left(9 - 9^2 - 3\right) = 3.9^n\left(2 - 3^3\right) = \boxed{-3.5^2.9^n}$$
$$B = \frac{2}{4^n} - 5\times 2^{-2n-1} + 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{2^{2n}} - \frac{5}{2^{2n}.2} + \frac{7}{2^{2n}}$$
$$= \frac{1}{2^{2n}}\left(2 - \frac{5}{2} + 7\right) = \boxed{\frac{13}{2^{2n+1}}.}$$
$$C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n = 9^n(-1)^n - (-1)^n 9^n = \boxed{0.}$$

2.

$$A = x^{-1}\times\frac{x^9}{x^5} = \frac{x^8}{x^5} = \boxed{x^3},$$
$$B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3} = \frac{x^6}{x^{-6}} = 1$$
$$C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4} = \frac{x^{-3}y^2}{x^4y^{-4}} = \boxed{\frac{y^6}{x^7}.}$$

Exercice 3 | ●○○ Racines

Simplifier les expressions suivantes.

- $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$,
- $B = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$,
- $C = \sqrt{4x^2-4x+1}$, on précisera notamment le domaine de validité.
- $D = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Solution (exercice 3)

$$A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$$
$$= 4\sqrt{3\times 4\times 2} - 5\sqrt{3\times 4\times 2\times 4} + 4\sqrt{6\times 3^2}$$
$$= 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6}$$
$$= \boxed{0}.$$

$$B = 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}$$
$$= 14 + 2\sqrt{49 - 4\times 6} = \boxed{24}.$$

$$C = \sqrt{(2x+1)^2} = \boxed{|2x+1|}$$ l'expression est définie sur $\mathbb{R}$

$$D = \frac{\sqrt{9}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{3-2} = \boxed{6\sqrt{3}}.$$

Exercice 4 | ●○○ Racines

Rendre entiers les dénominateurs des expressions suivantes.

$$A = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}},$$
$$B = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$$
$$C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},$$
$$D = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$$
$$E = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}},$$
$$F = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}},$$
$$G = \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}},$$
$$H = \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2.$$

Solution (exercice 4)

En multipliant par les quantités conjuguées appropriées,

$$A = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{4-2} = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2},$$
$$B = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 3 - 2\sqrt{2},$$
$$C = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 1 + \sqrt{15} - \sqrt{10},$$
$$D = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2,$$
$$E = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2} - \sqrt{3},$$
$$F = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-3} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}+3}{2},$$
$$G = -10\sqrt{2} + 4\sqrt{18} = 2\sqrt{2},$$
$$H = \frac{50}{(\sqrt{3}+1)^2} = 25(2-\sqrt{3}) = 50 - 25\sqrt{3}.$$

Exercice 5 | ●●○ [Abderahmene AB – Maxance FA] **Racines**

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ l'ensemble :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}.$$

Montrer que, si x et y sont dans $\mathbb{Q}$, il en est de même de $x-y$, xy et, si $x \neq 0$, de $1/x$.

Solution (exercice 5)

Écrivons $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Alors

$$x - y = (a-c) + (b-d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

et

$$xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Enfin, si $x \neq 0$, alors $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel, sauf dans le cas $a = b = 0$), et

$$\frac{1}{x} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

5.2 Racine

Exercice 6 | ●○○ Inégalités

1. Justifier que : $\forall x \in]0,1[, \quad x^2 < x < \sqrt{x}$.
2. En déduire : $\forall x \in]0,1[, \quad x + x^2 < 2\sqrt{x}$.

Solution (exercice 6)

1. Soit $x \in]0,1[$. Alors $x < 1 \implies x^2 < x$ en multipliant de chaque côté par x. De plus, en divisant par $\sqrt{x} > 0$ de chaque côté on a :
$$x < \sqrt{x} \iff \sqrt{x} < 1.$$
Mais $x < 1 \implies \sqrt{x} < \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de la racine. Ainsi, on a bien montré :
$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^2 < x < \sqrt{x}.}$$
2. D'après la question précédente, on a $x^2 < \sqrt{x}$ et $x < \sqrt{x}$ et en additionnant les inégalités, on obtient l'inégalité cherchée. Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^2 + x < 2\sqrt{x}.}$$

Exercice 7 | ●●○ [Jean PL – Ritâa SA] **Inégalités**

Soient $x, y \geqslant 0$.

1. Montrer que : $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2. En déduire que si $x \geqslant y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$.
3. En déduire que : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Solution (exercice 7)

1. L'inégalité est équivalente à sa version élevée au carré, puisque les deux membres sont positifs. On montre donc que :
$$x + y \leqslant (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}.$$
En simplifiant, cela revient à : $0 \leqslant 2\sqrt{xy}$, cette inégalité étant vraie puisqu'une racine carrée est positive. Ainsi :
$$\boxed{\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$
2. Puisque $x \geqslant y$, on a $x - y \geqslant 0$. Ainsi, on peut appliquer la question précédente avec $x - y$ au lieu de x. On a donc $\sqrt{x - y + y} \leqslant \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$, ce qui fournit :
$$\boxed{\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}}.$$
3. Si $x \geqslant y$, alors $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$, l'inégalité à montrer est donc :
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}.$$
Ceci a déjà été établi dans la question précédente. Si $x < y$, alors en échangeant x et y dans la question précédente, on obtient l'inégalité $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$ souhaitée. En conclusion :
$$\boxed{\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}}.$$

Exercice 8 | ●●○ Racines cubiques

On considère les deux réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}.$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de μ et ν.

1. **1.1)** Calculer $\mu\nu$ et $\mu^3 + \nu^3$.
   1.2) En déduire la valeur de $(\mu + \nu)^3$ en fonction de $\mu + \nu$.
2. On pose $\lambda = \mu + \nu$ et $P(x) = x^3 + 3x - 14$ pour tout réel x.
   2.1) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
   2.2) Trouver une racine évidente de P.
   2.3) Déterminer trois réels a, b et c tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

2.4) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, et en déduire la valeur de λ.

3. On pose $Q(x) = (x-\mu)(x-\nu)$ pour tout réel x.

3.1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.

3.2) En déduire que μ et ν sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4. Conclure.

Solution (exercice 8)

1. 1.1) On a :

$$\mu\nu = \sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})} = \sqrt[3]{49-50} = \sqrt[3]{-1} = \boxed{-1}.$$

Par ailleurs :

$$\mu^3 + \nu^3 = (7+5\sqrt{2}) + (7-5\sqrt{2}) = \boxed{14}.$$

1.2) D'autre part :

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)^3 &= (\mu+\nu)(\mu^2+2\mu\nu+\nu^2)\\ &= \mu^3+3\mu^2\nu+3\mu\nu^2+\nu^3\\ &= \mu^3+3\mu(\mu\nu)+3\nu(\mu\nu)+\nu^3\\ &= \mu^3-3\mu-3\nu+\nu^3\\ &= \mu^3+\nu^3-3(\mu+\nu)\\ &= \boxed{14-3(\mu+\nu)}.\end{aligned}$$

2. 2.1) On évalue P en λ, de sorte que :

$$P(\lambda) = (\mu+\nu)^3 + 3(\mu+\nu) - 14 = 14 - 3(\mu+\nu) + 3(\mu+\nu) - 14 \boxed{= 0}.$$

2.2) $P(2) = 0$ car $2^3 + 3.2 - 14 = 8 + 6 - 14 = 0$.

2.3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x-2)\left(ax^2+bx+c\right) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

Ainsi, on choisit a, b, c de sorte que :

$$\begin{cases} a &= 1\\ b-2a &= 0\\ c-2b &= 3\\ -2c &= -14\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1\\ 0 &= 0\\ b &= 2\\ c &= 7.\end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) = (x-2)(x^2+2x+7)}$.

2.4) D'après la question précédente, on a :

$$P(x) = 0 \iff x = 2 \ \underline{\textbf{ou}}\ x^2+2x+7 = 0.$$

Le trinôme $x \mapsto x^2+2x+7$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ puisque de discriminant < 0. Ainsi P a pour seule racine réelle 2, mais $\mu+\nu$ est aussi racine réelle de P, donc : $\boxed{\mu+\nu = 2}$.

3. 3.1) Par un simple développement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = (x-\mu)(x-\nu) = x^2 - (\mu+\nu)x + \mu\nu.$$

En utilisant les questions précédentes, vu que $\lambda + \mu = 2$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = (x-\mu)(x-\nu) = \boxed{x^2-2x-1}.$$

3.2) Ainsi,

$$\boxed{x^2-2x-1 = 0 \iff (x-\mu)(x-\nu) = 0 \iff x = \mu \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \nu.}$$

4. Pour conclure, remarquons que $x^2-2x-1 = 0$ est de discriminant $\Delta = 4 - 4(-1) = 8$. Donc les solutions de $x^2-2x-1=0$ sont :

$$\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Pour les départager, constatons que $\mu > \nu$, puisque $7+5\sqrt{2} > 7-5\sqrt{2}$ et donc par croissance stricte de la racine cubique : $\mu > \nu$. Donc en conclusion :

$$\boxed{\mu = 1+\sqrt{2},\quad \nu = 1-\sqrt{2}}.$$

Exercice 9 | ●●○ [Ilann SA – Raphaël LU] (In)équations avec radicaux

Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $\sqrt{x+1} = x-1$, **2.** $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leqslant 1$, **3.** $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$.

Solution (exercice 9) *On ne donne pas tous les détails.*

1.
- Domaine de définition : $\mathscr{D} = [-1, +\infty[$
- Attention, pour pouvoir élever au carré, il faut que les termes des deux côtés soient du même signe ! Il faut toujours faire des cas :
  - ◇ **[Cas 1]** si $x < 1$: on ne peut pas élever au carré. Une racine carrée étant toujours positive, on a $\mathscr{S}_{]-\infty,1[} = \emptyset$.
  - ◇ **[Cas 2]** Si $x \geqslant 1$: on peut passer au carrée dans l'égalité tout en conservant l'équivalence, les deux membres étant positifs. On obtient comme résultat $x = 0$ ou $x = 3$. Or, on est sous l'hypothèse $x \geqslant 1$ donc $\mathscr{S}_{[1,\infty[} = \{3\}$.

  On a : $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{]-\infty,1[} \cup \mathscr{S}_{[1,\infty[}$, soit $\boxed{\mathscr{S} = \{3\}}$.

2.
- Domaine de définition : $\mathscr{D} = [-2, +\infty[$.
- Les deux termes étant positifs, on peut passer au carré dans l'inégalité tout en conservant l'équivalence et on obtient

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leqslant 1 \iff \sqrt{(x+4)(x+2)} \leqslant -\frac{5}{2} - x.$$

Il faut ensuite faire deux cas :

- ◇ **[Cas 1]** si $x > -\frac{5}{2}$: on ne peut pas élever au carré.
  Comme une racine est toujours supérieure ou égale à 0, on a pas de solution dans ce cas.
- ◇ **[Cas 2]** Si $x \leqslant -\frac{5}{2}$: impossible car $\mathscr{D} = [-2, +\infty[$ donc pas de solution non plus dans ce cas.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

3. • Domaine de définition : $\mathscr{D} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ puisque $x \mapsto x^2 - 3$ est un trinôme de racines $\pm\sqrt{3}$, il est donc positif à l'extérieur des racines.

• ◇ **[Cas 1]** Si $x \leqslant \frac{9}{5}$, on ne peut pas élever au carré. Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, et le membre de droite étant négatif, on obtient $\mathscr{S}_{\left]-\infty, \frac{9}{5}\right]} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \frac{9}{5}\right]$.

◇ **[Cas 2]** si $x > \frac{9}{5}$. Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient

$$\sqrt{x^2-3} > 5x - 9 \iff 4x^2 - 15x + 14 < 0.$$

Les racines sont alors $\frac{7}{4}$ et 2. L'ensemble solution est alors pour ce cas, en n'oubliant pas de regarder à la fois le domaine de définition et l'hypothèse $x > \frac{9}{5}$, $\mathscr{S}_{>\frac{9}{5}} = \left]\frac{9}{5}, 2\right[$.

Synthèse : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\right[}$.

5.3 Valeur absolue

Exercice 10 | ●●○ [Gabriel BE – Louis ME] Inégalité du type triangulaire

1. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}$ est croissante positive sur $[0, \infty[$.

2. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Solution (exercice 10)

1. Notons f la fonction considérée, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in [0, \infty[$, $f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \geqslant 0$, f est donc croissante et $f(0) = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est croissante et positive sur } \mathbb{R}^+.}$

2. La propriété est exactement cette inégalité :

$$f(|u+v|) \leqslant f(|x|) + f(|y|).$$

Or d'après l'inégalité triangulaire $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. Donc par croissance de f :

$$f(|u+v|) \leqslant f(|x| + |y|).$$

Il ne reste donc qu'à constater de manière générale, que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Considérons la fonction $g(x) = f(x+y) - f(x) - f(y)$. Alors $g'(x) = f'(x+y) - f'(x) - 0 = \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 0$. g est donc, pour chaque y, décroissante et donc comme $g(0) = 0$, g est bien négative.

Exercice 11 | ●●○ [Sylvain CL – Antoine LO]

Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$|a+b| - |a-b| = 2\varepsilon_{a,b} \min\{|a|, |b|\} \quad \text{où :} \quad \varepsilon_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } ab < 0. \end{cases}$$

Exercice 12 | ●●○ (In)équations avec valeurs absolues

Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $x^2 = |x|$,

2. $|2x-3| \leqslant 2$,

3. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$,

4. $|2x+3| - |-5x+6| \geqslant 3x + 2$,

5. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant |3x+2|$,

Solution (exercice 12)

On ne donne pas tous les détails.

1. Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :

- **[Cas 1]** si $x \geqslant 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
  $$x^2 = x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0.$$
  L'ensemble des solutions est alors $\mathscr{S}_{\geqslant 0} = \{0, 1\}$.
- **[Cas 2]** si $x < 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
  $$x^2 = -x \iff x^2 + x = 0 \iff x(x+1) = 0.$$
  L'ensemble des solutions est alors $\mathscr{S}_{<0} = \{-1, 0\}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-1, 0, 1\}}$.

2. Le plus simple est ici d'utiliser une propriété sur la valeur absolue :

$$|2x-3| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant 2x-3 \leqslant 2$$
$$\iff \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}.$$

on obtient : $\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].}$

3. Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :

- **[Cas 1]** Si $2+x \geqslant 0$, à savoir si $x \geqslant -2$. L'équation à résoudre est alors :

  $$2+x+2+2x = x^2 \iff x^2-3x-4=0$$

  Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 25$, ainsi, les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2, donc $\mathscr{S}_{\geqslant -2} = \{-1, 4\}$.
- **[Cas 2]** Si $2+x < 0$, à savoir si $x < -2$. L'équation à résoudre est alors :

  $$-2-x+2+2x = x^2 \iff x^2-x=0$$

  Les solutions sont $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $[-\infty, -2[$, ainsi $\mathscr{S}_{<-2} = \emptyset$.

Conclusion : on obtient $\boxed{\mathscr{S} = \{0, 1\}}$.

4. On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\lvert 2x+3\rvert$	$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$		
$\lvert -5x+6\rvert$	$-5x+6$		$-5x+6$	0	$5x-6$		
$\lvert 2x+3\rvert - \lvert -5x+6\rvert$	$3x-9$		$7x-3$		$-3x+9$		

On étudie alors les trois cas et on obtient au final $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$

5. Les racines de $x \longmapsto x^2-x-2$ sont -1 et 2. On résout donc sur $\mathscr{D} =]-\infty, -1] \cup [2, \infty[$. Les deux membres de l'inéquation étant positifs, nous avons :

$$\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |3x+2| \iff x^2-x-2 \geqslant (3x+2)^2$$
$$\iff x^2-x-2 \geqslant 9x^2+12x+4$$
$$\iff 0 \geqslant 8x^2+13x+6.$$

Ce dernier trinôme est de discriminant négatif, donc est toujours positif. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, -1] \cup [2, \infty[}$, l'ensemble de définition.

5.4 Autres fonctions

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 13 | ●○○ [Mathéo CA – Martin LA]

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x^2-x+\frac{1}{2} \geq 0$.

2. En déduire que, pour tous réels a, b, $\quad a+b \leq (1+a^2)(1+b^2)$.

Solution (exercice 13)

1. $x^2-x+\frac{1}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq 0$.

2. En appliquant la première question à a et à b puis en ajoutant $a^2b^2 \geq 0$,

$$a^2-a+\frac{1}{2}+b^2-b+\frac{1}{2}+a^2b^2 \geq 0,$$

soit $(1+a^2)(1+b^2)-a-b \geq 0$.

Exercice 14 | ●●○ [Joshua BA – Toscane GR]

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue réelle

$$(\mathrm{E}) : \quad x^4+8x^3+2x^2+8x+1=0.$$

1. Pour $x \neq 0$, justifier que (E) équivaut à

$$x^2+8x+2+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

2. On pose $u = x+\frac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x.

3. Résoudre (E).

Solution (exercice 14)

1. Le nombre 0 n'est pas solution. Pour $x \neq 0$, il suffit de diviser l'équation par x^2.

2. $u^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

3. Après substitution, l'équation devient

$$u^2+8u=0 \iff u=0 \text{ ou } u=-8.$$

L'équation $x+1/x=0$ n'a pas de solution réelle. L'équation $x+1/x=-8$ équivaut à

$$x^2+8x+1=0,$$

dont les racines sont $-4-\sqrt{15}$ et $-4+\sqrt{15}$. Ainsi

$$S=\left\{-4-\sqrt{15},-4+\sqrt{15}\right\}.$$

Exercice 15 | ●○○ (In)équations avec des polynômes

Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $2x^2-4x+2=1-x$,

2. $(x-1)^2\leqslant 1$,

3. $\frac{2x}{4x^2-1}\leqslant\frac{2x+1}{4x^2-4x+1}$,

4. $\frac{1}{x-2}\leqslant\frac{1}{2x}$,

5. $x^3+4x^2+x-6\geqslant 0$, *on constatera que* 1 *est racine évidente.*

Solution (exercice 15)

Lorsque l'on envisage différents cas, on notera en abrégé $\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2,\ldots$ les ensembles de solutions trouvées dans ces sous-cas.

1. $2x^2-4x+2=1-x \iff 2x^2-3x+1=0$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2},1\right\}}$.

2. $(x-1)^2\leqslant 1 \iff x(x-2)\leqslant 0$ donc $\boxed{\mathscr{S}=[0,2]}$.

3. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2-1\neq 0$ et $4x^2-4x+1\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :

$$\frac{2x}{(2x+1)(2x-1)}-\frac{2x+1}{(2x-1)^2}\leqslant 0 \iff \frac{2x(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)}\leqslant 0.$$

Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[.}$

4. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $2x\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

De plus, on a :

$$\frac{1}{x-2}\leqslant\frac{1}{2x} \iff \frac{x+2}{2x(x-2)}\leqslant 0$$

et un tableau de signe donne : $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty,-2[\cup]0,2[}$.

5. 1 est racine évidente et on obtient : $x^3+4x^2+x-6\geqslant 0 \iff (x-1)(x^2+5x+6)\geqslant 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=[-3,-2[\cup]1,+\infty[.}$

Exercice 16 | ●●○ Équations à paramètres

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m\in\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2)=2m(3x-4)$,

2. $e^{2x}-2me^x+1=0$,

Solution (exercice 16)

1.
- Domaine de résolution : $\mathbb{R}$.
- On résout par équivalences successives, l'inconnue étant ici x. On obtient ainsi que :

$$m(x+2)=2m(3x-4) \iff -5mx=-10m \iff mx=2m.$$

On doit donc ici étudier deux cas selon que m est nul ou pas car on ne peut pas diviser une égalité par un nombre nul...

◇ **[Cas 1]** si $m=0$: l'équation est alors équivalente à : $0=0$. Tout est solution dans ce cas.

◇ **[Cas 2]** si $m\neq 0$: l'équation est alors équivalente à : $x=2$.

En conclusion : $\boxed{\mathscr{S}=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{si } m=0\\ \{2\} & \text{si } m\neq 0.\end{cases}}$

2. Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a

$$e^{2x}-2me^x+1=0 \iff X=e^x \text{ solution de } X^2-2mX+1=0.$$

Étude de l'équation $X^2-2mX+1=0$. Son discriminant vaut $\Delta=4(m^2-1)$. On fait des Cas selon le signe de Δ.

- Si $m\in]-1,1[$, alors $\Delta<0$, et $\boxed{\mathscr{S}_{m\in]-1,1[}=\emptyset}$.
- Si $m\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, alors $\Delta\geqslant 0$. Il existe donc deux solutions réelles (distinctes si $m\neq -1$ et $m\neq 1$ et égale sinon) qui sont :

$$X_1=m+\sqrt{m^2-1} \text{ et } X_2=m-\sqrt{m^2-1}.$$

Comme $X=e^x$, on doit vérifier si X_1 et X_2 sont bien strictement positives.

◇ Étude de X_1 :

$$X_1>0 \iff \sqrt{m^2-1}>-m.$$

– Si $m\in[-\infty,-1]$, alors $-m\geqslant 0$ et on peut passer au carré de chaque côté tout en conservant l'équivalence. Ainsi,

$$\sqrt{m^2-1}>-m \iff m^2-1>m^2 \iff -1>0.$$

Impossible donc X_1 ne peut pas être solution si $m\in[-\infty,-1]$.

— Si $m \in [1,+\infty[$, alors $-m<0$ et l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, X_1 est solution si $m \in [1,+\infty[$.

◇ Étude de X_2. On refait un raisonnement analogue et on obtient que si $m \in\ ]-\infty,-1]$, X_2 ne peut pas être solution et que si $m \in]1,+\infty]$, X_2 est solution.

On peut donc conclure dans le Cas où $m \in [-\infty,-1]$, on a :

$\boxed{\mathcal{S}_{m\in[-\infty,-1]}=\emptyset}$.

Il nous reste ainsi à finir le Cas où $m \in [1,+\infty[$. Dans ce cas, on a vu que X_1 et X_2 sont strictement positifs. On obtient alors en utilisant le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$e^{2x}-2me^x+1=0 \iff e^x=m+\sqrt{m^2-1} \text{ ou } e^x=m-\sqrt{m^2+1}$$
$$\iff x=\ln(m+\sqrt{m^2-1}) \text{ ou } x=\ln(m-\sqrt{m^2+1}$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[1,+\infty[}=\left\{\ln\left((m+\sqrt{m^2-1})\right),\ln\left((m-\sqrt{m^2-1})\right)\right.}$

Exercice 17 | ●●○ Inéquations avec paramètre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2-(m+1)x+m \geqslant 0$, **2.** $\frac{m}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+2}$,

Solution (exercice 17)

1. Ici le domaine de résolution est $\mathbb{R}$. On peut remarquer que le coefficient constant du trinôme vaut $m\times 1$, le coefficient du x vaut $-(m+1)$, et le coefficient dominant vaut 1. Les racines sont donc m et 1. Si l'on ne pense pas à utiliser cette propriété, on calcule le discriminant et on obtient que $\Delta=(m-1)^2$. On étudie donc 2 cas :

- **[Cas 1]** si $m=1$: Alors $\Delta=0$ et $x=1$ est la seule solution et :
$$x^2-(m+1)x+m \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0.$$
Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=1}=\mathbb{R}.}$
- **[Cas 2]** Si $m\neq 1$, alors $\Delta>0$ et les deux solutions réelles distinctes sont $x_1=\frac{m+1+|m-1|}{2}$ et $x_2=\frac{m+1-|m-1|}{2}$. On doit donc distinguer deux cas :
  - ◇ Si $m<1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient :
  $\boxed{\mathcal{S}_{m<1}=]-\infty,m]\cup[1,+\infty[.}$
  - ◇ Si $m>1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient :
  $\boxed{\mathcal{S}_{m>1}=]-\infty,1]\cup[m,+\infty[.}$

2. L'inéquation est définie si $x-1\neq 0$ et $x+2\neq 0$. Ainsi, $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$. Sur cet ensemble, on obtient :

$$\frac{m}{x-1}\leqslant\frac{1}{x+2} \iff \frac{m(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{x(m-1)+2m+1}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0.$$

- Si $m=1$, l'inéquation à résoudre devient alors :
$$\frac{m}{x-1}\leqslant\frac{1}{x+2} \iff \frac{3}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0.$$
Un tableau de signe donne alors : $\boxed{\mathcal{S}_{m=1}=]-2,1[.}$
- Si $m\neq 1$, alors la racine de $x(m-1)+2m+1$ est $\frac{2m+1}{1-m}$. Pour pouvoir faire un tableau de signe correct, on doit savoir où elle se situe par rapport à -2 et 1.
  - ◇ Si $m>1$. La résolution de $\frac{2m+1}{1-m}\leqslant -2$ est justement équivalente à $m>1$. Ainsi, la racine $\frac{2m+1}{1-m}$ est la plus petite des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m>1 \iff m-1>0$:

x	$-\infty$		$\frac{2m+1}{1-m}$		-2		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{m>1}=]-\infty,\frac{2m+1}{1-m}]\cup]-2,1[.}$

  - ◇ Si $0\leqslant m<1$. La résolution de $\frac{2m+1}{1-m}\geqslant 1$ est équivalente à $0\leqslant m<1$. Ainsi, la racine $\frac{2m+1}{1-m}$ est la plus grande des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m<1 \iff m-1<0$:

x	$-\infty$		-2		1		$\frac{2m+1}{1-m}$		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[0,1[} =]-2,1[\cup\left[\frac{2m+1}{1-m},+\infty\right[}$.

◇ Si $m<0$. Ainsi, la racine $\frac{2m+1}{1-m}$ est entre les racines -2 et 1. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m<0<1 \iff m-1<0$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{2m+1}{1-m}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m<0} = \left]-2,\frac{2m+1}{1-m}\right]\cup]1,+\infty[}$.

EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Exercice 18 | ●○○ **Exponentielles et logarithmiques** Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $|\ln x|<1$, **2.** $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x)$,

3. $4e^x-3e^{\frac{x}{2}}\geqslant 0$, **4.** $2\ln(x)+\ln(2x-1)>\ln(2x+8)+2\ln(x-1)$.

Solution (exercice 18)

1.
- Domaine de résolution : $\mathscr{D}=\mathbb{R}^{+\star}$
- On a : $|\ln x|<1 \iff -1<\ln x<1 \iff \frac{1}{e}<x<e$. D'où $\boxed{\mathscr{S}=]\frac{1}{e},e[}$.

2.
- Domaine de résolution : $\mathscr{D}=]2e,+\infty[$
- On a : $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \iff x^2-3xe-4e^2<0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=]2e,4e[}$.

3.
- Domaine de résolution : $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- On pose $X=e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2-3X\geqslant 0 \iff X(4X-3)\geqslant 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}}\leqslant 0$ ou $e^{\frac{x}{2}}\geqslant\frac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathscr{S}=\left[2\ln\left(\frac{3}{4}\right),+\infty\right[}$.

4.
- Domaine de résolution : $\mathscr{D}=]1,+\infty[$.
- En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2-14x+8<0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathscr{S}=]1,2[}$.

Exercice 19 | ●○○ **[Raphaël MA – Ander MA]** **Avec étude de fonction** En utilisant une fonction, répondre aux questions ci-après.

1. Montrer que : $\forall x>0,\quad x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$,

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^x-\frac{x^2}{2}\geqslant 1$.

3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{-\frac{n}{4}}<2$.

Solution (exercice 19)

1. On démontre l'inégalité en deux temps.

- Montrons d'abord que pour tout $x>0$: $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)$.

  On pose pour cela la fonction $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x\geqslant 0$: $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x)\geqslant 0$, donc f est croissante. Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x>0$: $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\geqslant 0$, à savoir $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)$.
- On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x)=\ln(1+x)-x$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=e^x-x.$$

Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $e^x\geqslant x+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc on a $f'(x)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

De plus, $f(0)=e^0-0-1=0$. Donc la fonction f est toujours positive ou

nulle d'après le tableau de variations, on a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant \frac{x^2}{2} + 1.}$$

3.