

Chapitre (ALG) 2 Calculs avec les réels

- 1 Généralités
- 2 Égalités et inégalités
- 3 Fractions, Puissances, Racines ..
- 4 Résolution d'équations et d'inéquations
- 5 Exercices

Résumé & Plan

Ce chapitre consiste essentiellement en des rappels des notions vues par le passé. Afin de ne pas se limiter à des exemples simplistes on sera parfois amené à utiliser des notions et propriétés vues au lycée qui ne seront appelées qu'après.

L'utilisation du x en mathématiques pour désigner une inconnue vient de l'arabe, une traduction en français serait « la chose ».

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Nous supposons construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ainsi que les sous-ensembles usuels des rationnels, entiers *etc.*. Mais tout ceci cache des difficultés auxquelles les mathématiciens se sont frottés pendant longtemps : celle de la construction de ces ensembles. Par exemple, qu'est-ce que l'entier 1, 2 *etc.* ? Dans le livre *Principia Mathematica* (1910), il faut environ 300 pages à WHITEHEAD et RUSSEL pour démontrer que $1 + 1 = 2$.

*5443. $\vdash : \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54 \cdot 26. \supset \vdash : \alpha = \iota'x. \beta = \iota'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . x \neq y.$

[*51·231] $\equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda.$

[*13·12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1). *11 \cdot 11 \cdot 35. \supset$

$\vdash : (\exists x, y). \alpha = \iota'x. \beta = \iota'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2). *11 \cdot 54. *52 \cdot 1. \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Nous ne nous poserons évidemment pas de telles questions ici, et conformément au programme, nous supposons donc connus et construits les ensembles de nombres usuels.

1

GÉNÉRALITÉS

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux *lois internes* : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$. Pourquoi les qualifier d'internes ? Car elles prennent en argument deux réels et elles renvoient un autre réel, on reste donc « dans l'ensemble $\mathbb{R}$ » :

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Rappelons quelques propriétés de la loi additive.

Proposition 1 | Propriétés de l'addition

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- **[Interne]** $x + y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- **[Commutativité]** $x + y = y + x$.
- **[Élément neutre]** $x + 0 = 0 + x = x$. On dit que 0 est un *élément neutre* pour l'addition.

- **[Élément opposé]** $x + (-x) = 0$. On dit que $-x$ est *l'élément opposé* de x pour l'addition.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- $x \times y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- **[Commutativité]** $x \times y = y \times x$.
- **[Élément neutre]** $x \times 1 = 1 \times x = x$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication.
- **[Élément absorbant]** $x \times 0 = 0 \times x = 0$. On dit que 0 est *l'élément absorbant* pour la multiplication.
- **[Élément inverse]** Si $x \neq 0$, alors $x \times \frac{1}{x} = 1$. On dit que $\frac{1}{x}$ est *l'élément inverse* de x pour la multiplication, noté aussi x^{-1} .
- **[Distributivité]** $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

- **[Anti-symétrie]** $x \leq y$ et $y \leq x \iff x = y$.
- **[Transitivité]** $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$.

Pour comparer deux quantités (savoir laquelle des deux quantités est la plus grande), on peut faire leur différence et étudier son signe, sauf si la comparaison est évidente. De plus, deux réels se comparent toujours : on dit que $\mathbb{R}$ est *totalelement ordonné*. On peut alors définir quantités ci-après, que nous utiliserons parfois.

Définition 1 | Max / Min

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on définit alors

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y, \\ y & \text{sinon,} \end{cases} \quad \min(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geq y, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1 Soit $M \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Établir que :

$$\max(x, y) \leq M \iff x \leq M \text{ et } y \leq M.$$

On établirait de-même que : $\min(x, y) \geq M \iff x \geq M \text{ et } y \geq M.$

2 ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS

Une inégalité est une formule reliant deux expressions numériques avec un symbole de comparaison ($\leq, \geq, <, >$). Une **inégalité stricte** compare nécessairement deux valeurs différentes tandis qu'une **inégalité large** reste valable en cas d'égalité.

Attention à ne pas confondre inégalités strictes et inégalités larges. Lorsque l'on écrit ou dit « ... est plus petit/grand que ... », implicitement on parle d'inégalités larges. D'où l'importance de préciser « strictement » lorsque c'est le cas, notamment à l'oral.

Exemple 1 Préciser si les propositions logiques ci-dessous sont vraies.

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq b \implies a < b$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \implies a \leq b$



Proposition 3 | Relation d'ordre $\leq$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On dit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car

- **[Réflexivité]** $x \leq x$.

MANIPULATION D'ÉGALITÉS ET D'INÉGALITÉS. On va rappeler dans ce paragraphe les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et inégalités sur $\mathbb{R}$ vues dans les classes antérieures.

Proposition 4 | Manipulations d'égalités & d'inégalités

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- **[Additionner =]** $x = y \iff x + z = y + z$.
- **[Équation produit]** $xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0$.
- **[Multiplier =]** Si de plus $z \neq 0$, alors $x = y \iff xz = yz$.
- **[Signe d'un produit]**
 - $xy \geq 0 \iff x \text{ et } y \text{ sont de même signe,}$
 - $xy \leq 0 \iff x \text{ et } y \text{ sont de signe opposé.}$
- **[Additionner $\leq$]** $x \leq y \iff x + z \leq y + z$.
- **[Multiplier $\leq$]** Si de plus $z > 0$, alors :
 - $x \leq y \iff xz \leq yz$.
 Si de plus $z < 0$, alors :
 - $x \leq y \iff xz \geq yz$.

- **[Additionner des inégalités « de même sens »]** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\text{si } \begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \quad \text{alors } x + z \leq y + t.$$

- **[Multiplier des inégalités « de nombres positifs »]** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\text{si } \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq t \end{cases} \quad \text{alors } 0 \leq xz \leq yt.$$

- **[Inverser des inégalités]** Si x et y sont deux réels non nuls de même signe,

$$x \leq y \iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Note | Ce dernier point est une conséquence de la décroissance de la fonction inverse sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, voir plus loin.

- On peut donc multiplier une égalité **par une quantité non nulle**, et ajouter/soustraire par le même terme de chaque côté.
- Le signe d'un produit de deux éléments permet de caractériser le signe de chaque terme du produit.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement positive**.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement négative en inversant le sens de l'inégalité**.
- On peut donc additionner deux inégalités, et les multiplier sous réserve qu'elles ne fassent intervenir que des nombres réels positifs.
- On peut donc inverser deux inégalités faisant intervenir des réels non nuls de même signe.

Bien entendu, toutes ces propriétés s'adaptent à des inégalités strictes, et s'étendent à des sommes quelconques de termes.

! Attention

- **On ne soustrait pas des inégalités.**

$$\text{Par exemple, } \begin{cases} -1 \leq 2 \leq 2, \\ 0 \leq 1 \leq 2 \end{cases} \quad \text{et on n'a clairement pas } -1 - 0 \leq \boxed{2 - 1 \leq 0} !$$

Si on veut encadrer une quantité du type $x - y$, on peut encadrer x et encadrer y puis multiplier l'encadrement de y par -1 (ce qui change le sens!), puis sommer les inégalités pour terminer.

- Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens aussi, puisque diviser par un négatif revient à multiplier



par son inverse (qui sera négatif).

Exemple 2 Soit $(a, b, c, d, x, y) \in \mathbb{R}^6$. Supposons que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$. Que peut-on dire de $x + y$ et de $x - y$?

Dans le cas où $a \geq 0$ et $c > 0$, que peut-on dire de xy et de $\frac{x}{y}$?

Note

Pour le dernier encadrement, on prendra garde au fait qu'aucune règle ne permet de « diviser des inégalités »!



Exercice 2 Donner un encadrement, le plus précis possible, sur $\frac{x^2}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 1$. Majorer $ab + bc + ca$.

COMPOSITION D'INÉGALITÉS PAR UNE FONCTION CROISSANTE. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Rappelons que (nous le reverrons dans le chapitre sur les fonctions) :

- f est dite *croissante* sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Note

La réciproque est fautive en général, sauf si f est supposée strictement croissante (voir définition ci-dessous)

- f est dite *strictement croissante* sur I si

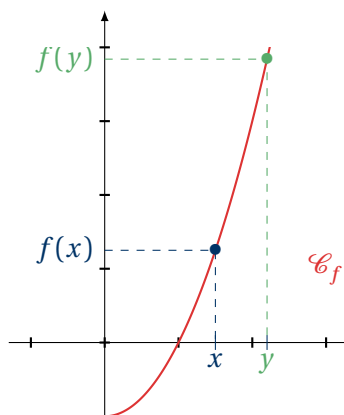
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Ainsi, composer une inégalité large par une fonction croissante conserve l'ordre de l'inégalité large, composer une inégalité stricte par une fonction strictement croissante conserve l'inégalité stricte.

- Une fonction strictement croissante est donc croissante (une inégalité stricte est forcément large).

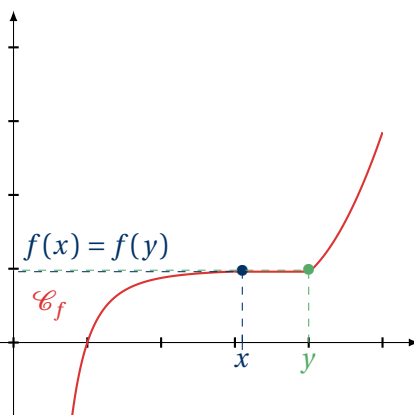
FUNCTION STRICTEMENT CROISSANTE :

SI $x < y$ ALORS $f(x) < f(y)$



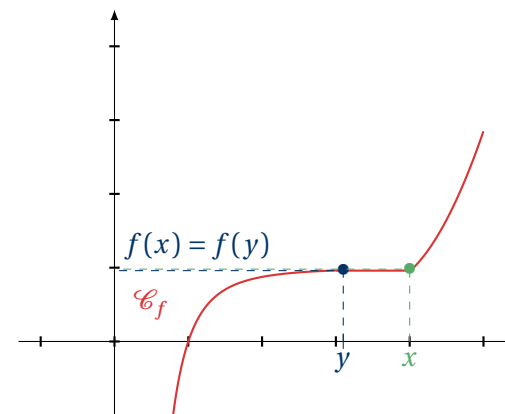
FUNCTION CROISSANTE :

SI $x \leq y$ ALORS $f(x) \leq f(y)$



En vue de la résolution d'équations et d'inéquations, on souhaiterait obtenir une réciproque à l'implication encadrée. Autrement dit, on souhaiterait savoir dans quel cas l'inégalité $f(x) \leq f(y)$ fournit l'inégalité $x \leq y$:

- si f est *strictement* croissante, on ne peut avoir $f(x) \leq f(y)$ que si $x \leq y$;
- si f est seulement supposée croissante, on peut avoir $f(x) \leq f(y)$ (en ayant $f(x) = f(y)$) sans que $x \leq y$! Voir par exemple le dessin ci-dessous : on a $f(x) \leq f(y)$ (même égaux), et pourtant $x \geq y$.



D'où le résultat suivant.

Proposition 5 | Composition d'une inégalité par une fonction strictement croissante

Si f est une fonction **strictement** croissante sur un intervalle I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

Note

Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines inéquations

Preuve



Soit $(x, y) \in I^2$.



Montrons l'implication par contraposée.

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 6 | Composition d'une égalité par une fonction strictement croissante

Si f est une fonction **strictement** croissante sur un intervalle I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x = y \iff f(x) = f(y).$$

Note

Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines équations

Preuve Soit $(x, y) \in \mathbb{I}^2$. Alors :

$$x = y \iff \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \xrightarrow{\text{proposition précédente}} \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(y) \leq f(x) \end{cases} \iff f(x) = f(y).$$

La discussion précédente possède son analogue dans le cas des fonctions décroissantes, nous énonçons rapidement les résultats associés.

COMPOSITION D'INÉGALITÉS PAR UNE FONCTION DÉCROISSANTE. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

- f est dite *décroissante* sur I si

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)}$$

Note

La réciproque est fautive en général, sauf si f est supposée strictement décroissante (voir définition ci-dessous)

- f est dite *strictement décroissante* sur I si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

Ainsi, composer une inégalité large par une fonction décroissante renverse l'ordre de l'inégalité large, composer une inégalité stricte par une fonction strictement décroissante renverse l'inégalité stricte.

À l'instar des fonctions croissantes, la réciproque de l'inégalité encadrée ne peut être obtenue qu'en cas de stricte décroissance de la fonction :

Proposition 7 | Composition d'une inégalité par une fonction strictement décroissante
Si f est une fonction **strictement** décroissante sur un intervalle I , alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, \quad x \leq y \iff f(x) \geq f(y).$$

Note

Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines inéquations

On en déduit que :

Proposition 8 | Composition d'une égalité par une fonction strictement décroissante
Si f est une fonction **strictement** décroissante sur un intervalle I , alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, \quad x = y \iff f(x) = f(y).$$

Note

Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines équations

Exemple 3

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \iff e^x \leq e^y$, car $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \implies \ln(x) \leq \ln(y)$, car $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x \leq y \iff x^2 \leq y^2$, car $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-)^2, \quad x < y \implies x^2 > y^2$, car :



- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x = y \iff x^2 = y^2$, car :



- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = y \text{ ou } x = -y \iff x^2 = y^2$, car :



- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$, car :



Attention

- Il est **faux** de dire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \implies x^2 \leq y^2$$

car la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. En revanche, il est **juste** de dire :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x \leq y \implies x^2 \leq y^2.$$

- Pour élever au carré une inégalité en préservant le sens de l'inégalité, prenez garde au fait que les quantités doivent être **positives** !

3.1 Fractions

On s'intéresse ici plus particulièrement aux éléments de $\mathbb{D}$ (les nombres décimaux), et de $\mathbb{Q}$ (les rationnels) dont nous revoyons la définition.

Définition 2 | Décimaux

L'ensemble des nombres décimaux est : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Remarque 1 Un nombre décimal possède un nombre fini de chiffres après la virgule. Précisément le nombre après la virgule est la valeur de n dans l'écriture précédente.

Exemple 4

- On a : $0,25 = \frac{25}{10^2} \in \mathbb{D}$, $-0,217 = \frac{-217}{10^3} \in \mathbb{D}$, $-0,217... \notin \mathbb{D}$, $3 = \frac{3}{10^0} \in \mathbb{D}$.
- De plus, $\frac{31}{2} = \frac{155}{10} \in \mathbb{D}$, $\frac{31}{3} \notin \mathbb{D}$, prouvons-le.

**Définition 3 | Rationnels & Opérations**

- On appelle *fraction* ou *rationnel* un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, noté $\frac{p}{q}$. Le nombre p s'appelle le *numérateur* et le nombre q s'appelle le *dénominateur*.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Ainsi,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\} \supset \mathbb{D}.$$
- Deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont égales si et seulement si : $ps = qr$. On dit alors qu'elles représentent le même *nombre rationnel*.
- Une fraction $\frac{p}{q}$ est *irréductible* si et seulement si p et q ne possèdent aucun diviseur commun supérieur ou égal à 2.
- On confond un entier a avec la fraction $\frac{a}{1}$. On a donc : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- L'addition sur $\mathbb{Q}$ est définie par

$$\forall (p, r) \in \mathbb{Z}, \quad \forall (q, s) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}.$$
- La multiplication sur $\mathbb{Q}$ est définie par

$$\forall (p, r) \in \mathbb{Z}, \quad \forall (q, s) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pq}{rs}.$$
- De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{Q}$, pour $q > 0$ et $s > 0$, par

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \iff ps \leq qr.$$

Remarque 2 La suite des chiffres d'un nombre rationnel après la virgule est *a priori* non limitée, contrairement aux décimaux.

Exemple 5 On a $-0,217... \in \mathbb{Q}$, $\frac{31}{3} \in \mathbb{Q}$ et $-0,217 \in \mathbb{Q}$.

3.2 Puissance entière

Définition 4 | Puissances entières

Soient $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$.

- On note x^2 le réel $x \times x$. On définit par récurrence le réel x^n par :

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{n+1} = x \times x^n.$$
- Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit x^{-n} par : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

De manière plus explicite, avec les notations précédentes, on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}, \quad x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}}.$$

De manière générale, nous serons capable de définir ultérieurement x^α avec $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ mais il faudra attendre les rappels sur la fonction exponentielle et le logarithme. Rappelons les règles usuelles sur les fonctions puissances.

Proposition 9 | Règles sur les puissances

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ de sorte que les puissances ci-après soient définies. Alors :

- $x^{n+p} = x^n \times x^p$ $(x^n)^p = x^{n \times p}$ $(x \times y)^n = x^n \times y^n$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.
- Si on a de plus $x > 0$, alors : $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \frac{1}{x^{m-n}}$.

Exemple 6 (Quiz) Cochez la ou les bonnes réponses.

Expression	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$a^5 a^3 =$	☐ a^{5^3}	☐ a^{15}	☐ a^8
$a^2 b^3 =$	☐ $(ab)^2 b$	☐ $(ab)^5$	☐ $(ab)^6$
$(a^2)^n =$	☐ a^{2n}	☐ a^{2+n}	☐ a^{2^n}
$(3^n)^2 =$	☐ 3^{n^2}	☐ 6^n	☐ 9^n
$(a^{n^2})^3 =$	☐ a^{3n^2}	☐ a^{n^8}	☐ a^{n^6}
$a^{3n} (a^n)^2 =$	☐ a^{3n^3}	☐ a^{n^2+3n}	☐ a^{5n}
$2^{-2k} 3^k =$	☐ $\left(\frac{3}{4}\right)^k$	☐ $\left(\frac{3}{2}\right)^k$	☐ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$
$3^{2k+1} 2^{-k} =$	☐ $3\left(\frac{9}{2}\right)^{-k}$	☐ $3\left(\frac{9}{2}\right)^k$	☐ $9\left(\frac{3}{2}\right)^k$
$2^n + 2^n =$	☐ 4^n	☐ 2^{n+1}	☐ 2^{2n}
$(-2)^{2n+1} =$	☐ -2^{2n+1}	☐ $(-4)^{n+1}$	☐ -2×4^n
$2 \times \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 =$	☐ 2^n	☐ 2^{n+1}	☐ $\frac{1}{2^{n-1}}$

Les puissances de -1 sont très faciles à calculer, elle dépend simplement de la parité de la puissance, la preuve étant une simple disjonction de cas dans la définition de la puissance entière.

Proposition 10 | Puissances alternées

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad \bullet (-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -x^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve

- Si n est pair, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $(-1)^n = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$.
 - Si n est pair, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = ((-1)^2)^k (-1) = -1^k = -1$.
- $(-x)^n = (-1)^n x^n$ puis utiliser le cas précédent.

Exemple 7 Écrire sous la forme $\pm 2^p \times 3^q$ avec p et q deux entiers relatifs :

1. $\frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 3^8 \times 6^{-1}} =$



2. $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} =$



3. $\frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}} =$



4. $\frac{12^{-4} \times (-3)^3}{\left(\frac{2}{9}\right)^3 \times 18^2 \times 16^{-3}} =$



Proposition 11 | Identités remarquables

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Preuve Elles se démontrent directement à l'aide de la définition et des règles usuelles de développement : par exemple,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Exemple 8 (Puissance 3) Développer $(a+b)^3, (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.



Exemple 9 Développer $(a + b + c)^2$.



Note | La formule est analogue pour quatre, cinq termes et même plus.

Remarque 3 (Généralisations possibles)

- Les identités remarquables $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ seront généralisées dans le chapitre sur les sommes/produits en la formule dite du *binôme de NEWTON* pour des puissances plus élevées.
- L'identité remarquable permettant de factoriser $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ possède elle aussi une généralisation à toute expression de la forme $a^n - b^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- Nous verrons tout cela dans le **Chapitre (ALG) 4**.

ENCADREMENTS ET PUISSANCES ENTIÈRES. Nous avons un résultat sur la manipulation des encadrements et des puissances, qui précise en d'autres termes la monotonie de certaines fonctions puissance, le voici.

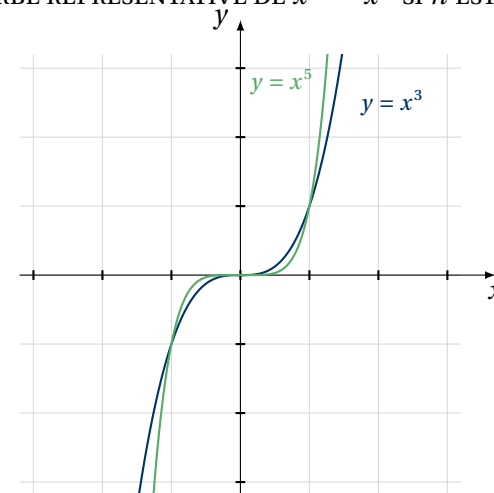
Proposition 12 | Puissances et encadrements

- Soit $n = 2k + 1 \in \mathbb{N}$ un entier impair, $k \in \mathbb{N}$. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \iff x^n \leq y^n.$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto x^{2k+1}$ est strictement croissante pour tout $k \in \mathbb{N}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto x^n$ SI n EST IMPAIR



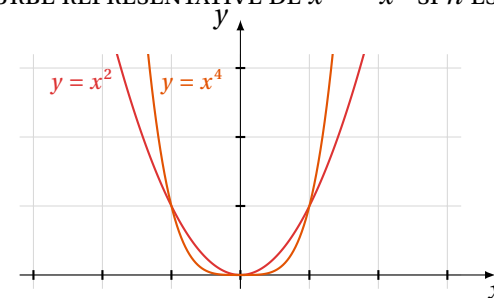
- Soit $n = 2k \in \mathbb{N}$ un entier pair, $k \in \mathbb{N}$. Alors :
 - on peut toujours élever à la puissance n un encadrement **positif**, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq x \leq y \iff 0 \leq x^n \leq y^n.$$
 - On peut toujours élever à la puissance n un encadrement **néglatif à condition de renverser l'ordre**, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \leq 0 \iff 0 \leq y^n \leq x^n.$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto x^{2k}$ est strictement croissante **sur** $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante **sur** $\mathbb{R}_-$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto x^n$ SI n EST PAIR



3.3 Racines carrées & cubiques

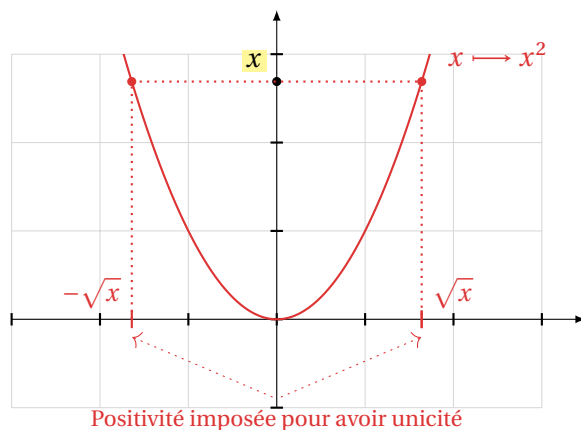
On sait élever au carré des réels, ou à une puissance plus grande. On peut aussi se poser la question inverse : est-ce que tout réel peut être vu comme le carré d'un autre ? le cube d'un autre ? Pour la racine carrée la réponse est clairement non pour les négatifs (un carré est forcément positif), et oui pour les positifs. Pour les cubes, il y a toujours existence et unicité.

RACINE CARRÉE. Rappelons la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif.

Définition/Proposition 1 | Racine carrée

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{2}}$, tel que : $(\sqrt{x})^2 = x$.
- On appelle ce réel **la racine carrée** (ou simplement parfois « la racine ») de x .

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto x^2$



Exemple 10

- $\sqrt{4} =$ car : $\bullet \sqrt{36} =$ car :
- $\sqrt{2} \approx 1.41$



Attention Racine d'un carré

La quantité $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $x^2 \geq 0$. En revanche, si $x < 0$, nous n'avons pas $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$!



Note

Nous verrons un peu plus loin une formule pour simplifier $\sqrt{x^2}$ pour tout nombre réel x , qui fait appel à la valeur absolue.

Proposition 13 | Règles sur les racines carrées

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On a :

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Exemple 11

- $\sqrt{25 \times 64} =$
- $\sqrt{\frac{16}{49}} =$



Attention Racine d'une somme

On ne peut rien dire de la racine d'une somme.

Par exemple, $\begin{cases} \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \end{cases}$ donc $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Note

Il est donc absolument faux d'écrire que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tous nombres réels positifs a et b !

On rappelle que la règle de calcul $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ permet de « réduire » des racines carrées *via* « extraction » de carrés parfaits¹ dans les racines carrées. Ci-après un exemple détaillé.

Exemple 12 (Extraire un carré parfait) Ecrire le nombre $A = \sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b le plus petit possible (pour obtenir b « le plus petit possible », il faut chercher dans 45 le carré parfait le « plus gros possible ».)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9 \times 5} && \text{on fait apparaître dans 45 un carré parfait, à savoir 9} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{5} && \text{on utilise la propriété } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ &= 3 \times \sqrt{5}. && \text{on simplifie la racine du carré parfait} \end{aligned}$$

Exemple 13 Écrire les quantités sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b le plus petit possible :

$$\sqrt{8}, \quad \sqrt{72}, \quad 3\sqrt{125}$$

1. On appelle carré parfait le carré d'un entier naturel non nul. Ainsi, les premiers carrés parfaits sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ...



Il arrive parfois que certaines fractions soient plus agréables à étudier sans racine carrée au dénominateur. Pour s'en débarrasser, un premier cas simple est celui où le dénominateur n'est constitué que d'une racine carrée.

Exemple 14

- $\frac{3}{\sqrt{2}} =$
- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$

Certaines racines carrées sont plus compliquées à éliminer, comme par exemple dans l'expression $\frac{1}{4-\sqrt{15}}$ (multiplier par $\sqrt{15}$ au dénominateur fait apparaître un facteur $4\sqrt{15}$ qui traîne dans les pattes!). On utilise alors la notion de quantité conjuguée associée à une identité remarquable pour avancer.

Définition 5 | Quantité conjuguée

Soient $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+$. Le nombre $A - \sqrt{B}$ est la *quantité conjuguée* de $A + \sqrt{B}$, et inversement.

Exemple 15 Par exemple, la quantité conjuguée de $4 - \sqrt{15}$ est $4 + \sqrt{15}$.

On a alors la relation : $(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B}) = A^2 - B$. Multiplier par la quantité conjuguée permet de faire « disparaître » les radicaux d'un dénominateur ou encore d'étudier le signe d'expressions de la forme $A(x) \pm B(x)$. Par exemple,

$$\frac{1}{4 - \sqrt{15}} = \frac{4 + \sqrt{15}}{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = \frac{4 + \sqrt{15}}{4^2 - 15} = 4 + \sqrt{15}.$$

Exemple 16 (Utilisation de la quantité conjuguée) Montrer que :

$$\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}} = \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47}.$$



$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{3}(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})}{(5\sqrt{3} - 2\sqrt{7})(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})} \\ &= \frac{5\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{(5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{5 \times 3 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{5^2 \sqrt{3}^2 - 2^2 \sqrt{7}^2} = \frac{15 + 2\sqrt{21}}{75 - 28} = \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47}. \end{aligned}$$

Exercice 4 Montrer que pour tout $x > 0$, $0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En effet, via la quantité conjuguée $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, qui est strictement positive et donc non nulle, la double inégalité annoncée équivaut à

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Or la première inégalité est claire, puisque $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$, et, en passant à l'inverse, la seconde devient :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 0,$$

qui est donc vraie, en vertu de la première inégalité.

Enfin, la (stricte) croissance de la fonction racine carrée permet d'obtenir certains encadrements.

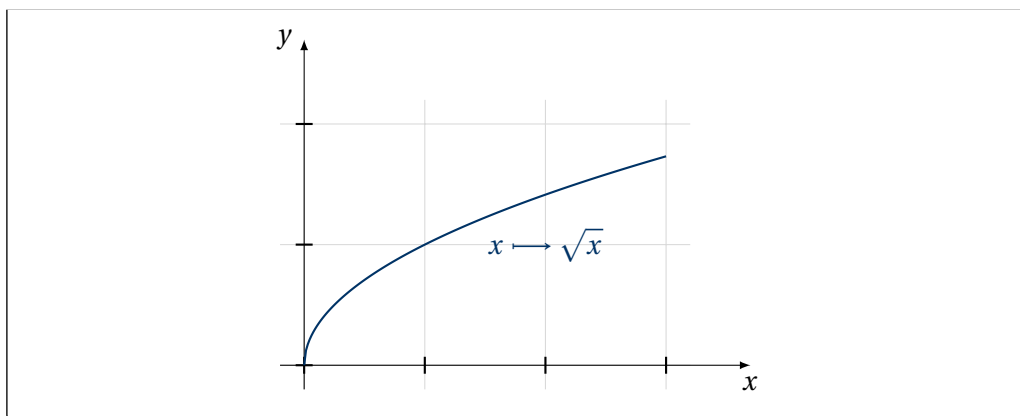
Proposition 14 | Racines et encadrements

On peut toujours appliquer la racine carrée à un encadrement de nombres réels positifs en conservant le sens de l'encadrement :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, & x \leq y \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}. \\ \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, & x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}. \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x}$ est (strictement) croissante.

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto \sqrt{x}$



Exemple 17 Montrer que : $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$. (cette technique peut être très utile lorsque l'on ne connaît pas de valeur approchée d'une racine)

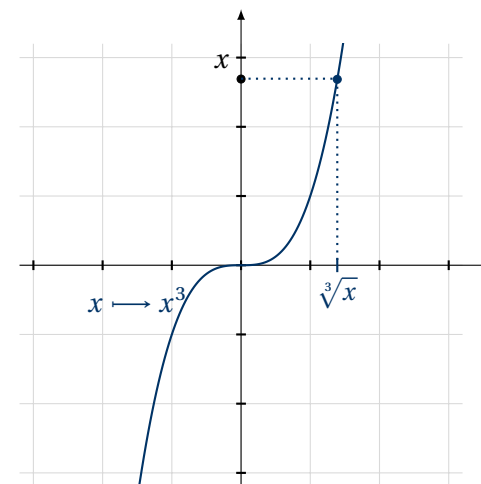


LA RACINE CUBIQUE. Moralement, la racine cubique d'un nombre réel x est l'unique nombre réel qui, élevé au cube, donne le réel x . Une différence notable entre racine carrée et racine cubique est que la racine cubique est définie pour tout nombre réel x , alors que la racine carrée n'est définie que sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Définition/Proposition 2 | Racine cubique

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt[3]{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{3}}$, tel que : $(\sqrt[3]{x})^3 = x$. On appelle ce réel **la racine cubique** de x .

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto x^3$



Exemple 18 Déterminer $\sqrt[3]{8}$ ainsi que $\sqrt[3]{-27}$.



Les propriétés sur les racines cubiques sont analogues à celles sur les racines carrées.

Proposition 15 | Règles sur les racines cubiques

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$.
- Si on a de plus $y \neq 0$, alors : $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$.
- $(\sqrt[3]{x})^3 = x$, $\sqrt[3]{x^3} = x$.

Exercice 5 (Comparaison des moyennes) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3.4 Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est le même nombre réel mais dont on aurait enlevé le signe devant. Ainsi, si ce réel est positif il n'y a rien à faire, c'est sa valeur absolue. En

revanche, s'il est négatif, il suffit d'ajouter un signe « - » devant ledit réel. Cela nous mène tout droit à la définition ci-après.

Définition 6 | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue* de x , notée $|x|$, est le réel défini par :

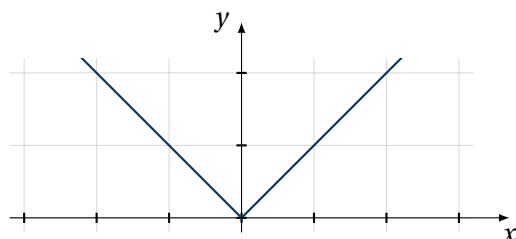
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 19 Déterminer :

- $|2| =$
- $|0| =$
- $|-3| =$
- $|\pi| =$

La définition de la valeur absolue permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto |x|$



Exemple 20 Donner, en fonction de x , un expression sans valeur absolue de la quantité $|x-3| - |x+2|$. On pourra présenter le résultat sous forme d'un tableau.



Définition 7 | Distance entre deux réels

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit la *distance* de x à y comme étant le réel noté $d(x, y)$ et défini par : $d(x, y) = \max(x, y) - \min(x, y)$. C'est donc la différence entre la plus grande valeur et la plus petite.

Exemple 21

- $d(1, 4) = 4 - 1 = 3$,
- $d(3, -1) = 3 - (-1) = 4$.

Proposition 16 | Lien entre distance et valeur absolue

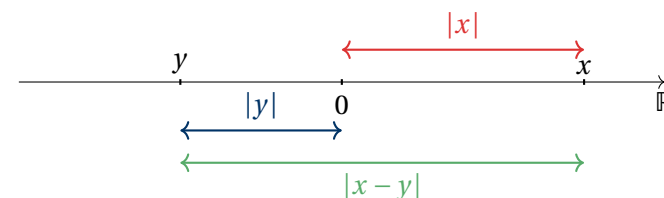
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $d(x, y) = |x - y|$.

Preuve (Point clef — *Disjonction de cas suivant la position entre x et y*)



Remarque 4 Puisque pour tout réel x , on a : $|x| = |x - 0|$, la *valeur absolue de x peut s'interpréter comme étant la distance entre x et 0*. (Cette remarque sera essentielle pour interpréter certaines équations et inéquations en terme de distance)

Les réels peuvent se représenter sur une droite dite « numérique », les quantités définies ci-dessus (valeur absolue et distante) se visualisent comme suit.



Pour tous réels x, y , la valeur absolue correspond à l'écart (sans signe) entre x et y , et $|x|$ représente donc la distance entre x et 0.

Proposition 17 | Propriétés de la valeur absolue et de la distance

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $|0| = 0$,

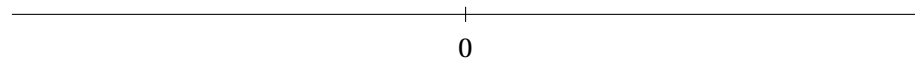
- $|x| \geq 0$, $|x| = \max\{x, -x\}$.

- **[Séparation]** $|x| = 0 \iff x = 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

- **[Parité / Symétrie]** $|x| = |-x|$, $d(x, y) = d(y, x)$.

- **[Equation et valeur absolue]** Pour tout $M \in \mathbb{R}^+$:

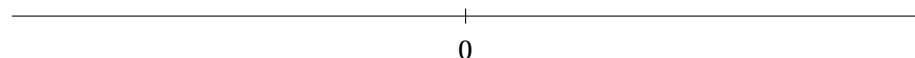
$$|x| = M \iff x = M \text{ ou } x = -M$$



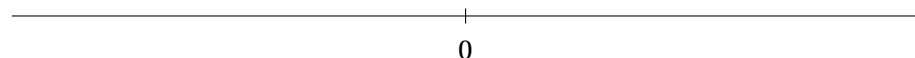
- **[Encadrement et valeur absolue]** $-|x| \leq x \leq |x|$.

- **[Inéquation et valeur absolue]** Plus généralement, pour tout $(m, M) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

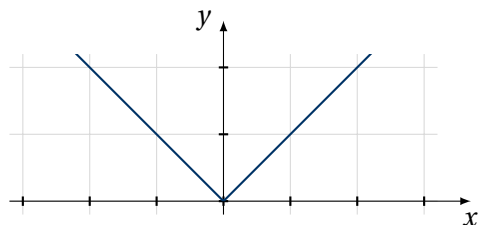
$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$$



$$|x| \geq M \iff x \geq M \text{ ou } x \leq -M.$$



$$m \leq |x| \leq M \iff m \leq x \leq M \text{ ou } -M \leq x \leq -m.$$



Note | Les propriétés restent vraies avec des inégalités strictes.

- **[Carré]** $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x|^2 = x^2$.

- **[Égalité de valeurs absolues]** $|x| = |y| \iff x = y \text{ ou } x = -y$.

- **[Produit/quotient]** $|xy| = |x| \times |y|$. De plus si $y \neq 0$, alors :

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Remarque 5

- Les propriétés

$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M, \quad |x| \geq M \iff x \geq M \text{ ou } x \leq -M$$

sont très intuitives si on garde à l'esprit l'interprétation de la valeur absolue en terme de distance à l'origine. Par exemple, si $|x| \leq M$, alors cela signifie que x est à distance au plus M de l'origine, donc que x est dans $[-M, M]$.

- Elles entraînent d'ailleurs leurs analogues pour la fonction carrée : pour tout $M \in \mathbb{R}^+$,

$$x^2 \leq M \iff \sqrt{x^2} = |x| \leq \sqrt{M} \iff -\sqrt{M} \leq x \leq \sqrt{M}.$$

Preuve

- La propriété $|0| = 0$ est évidente.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.



- **[Séparation]** Montrons celle pour la valeur absolue, celle pour la distance s'obtient en remplaçant x par $x - y$ dans la première. Soit $x \in \mathbb{R}$.



- **[Parité / Symétrie]** Montrons celle pour la valeur absolue, celle pour la distance s'obtient en remplaçant x par $x - y$ dans la première. Soit $x \in \mathbb{R}$.



- **[Équation et valeur absolue]**



- **[Encadrement et valeur absolue]** Par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.



- **[Inéquation et valeur absolue]** On démontre par exemple la première, et les autres on se contente du dessin. Soit $x \in \mathbb{R}$.



- **[Carré]** Si $x \geq 0$ alors

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = x = |x|.$$

Si $x < 0$ alors $-x \geq 0$ et on a :

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x)} \times \sqrt{(-x)} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|.$$

La deuxième partie de la formule est une conséquence directe de la première, en l'élevant au carré.

- **[Égalité de valeurs absolues]**



- **[Produit / Quotient]** On peut par exemple utiliser la propriété analogue déjà démontrée pour la racine.

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2} = |x| \times |y|.$$

Théorème 1 | Inégalité triangulaire



- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors : $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

Note $\left| \begin{array}{l} \text{La majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la} \\ \text{minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.} \end{array} \right.$

- **[Égalité]** En outre, on sait caractériser les cas d'égalité :

$$|x + y| = |x| + |y| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad x = \lambda y,$$

$$|x + y| = ||x| - |y|| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_-, \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad x = \lambda y.$$

On dit alors que x, y sont **positivement** ou **négativement** liés.

Preuve

- $\diamond$ Commençons par montrer que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Les quantités étant positives, nous allons montrer que l'inégalité élevée au carré est vraie.



◇ On montre ensuite : $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

$$||x| - |y||^2 = |x|^2 - 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 - 2|xy| + y^2.$$

Or $xy \geq -|xy|$, d'où $x^2 + y^2 + 2xy \geq x^2 - 2|xy| + y^2$, c'est-à-dire

$$|x + y|^2 \geq ||x| - |y||^2.$$

Et, comme $|x + y| \geq 0$ et $||x| - |y|| \geq 0$, on obtient en passant à la racine :

$$|x + y| \geq ||x| - |y||.$$

- Montrons par exemple le 1er cas d'égalité, le second se traite de la même manière. D'après la preuve précédente, on a :

$$|x + y| = |x| + |y| \iff xy = |xy| \iff xy \geq 0 \iff x, y \text{ sont de même signe.}$$

Il s'agit donc de prouver désormais que :

$$x, y \text{ sont de même signe} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad y = \lambda x \text{ ou } x = \lambda y.$$



! Attention

- Pour tous réels x et y , on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ donc en remplaçant y par $-y$, on obtient (puisque $|-y| = |y|$) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq |x| + |y|.$$

- En revanche, il est complètement faux d'écrire : $|x - y| \leq |x| - |y|$.



- Il est aussi faux d'écrire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \implies |x| \leq |y|$.



>_ (Valeur absolue d'un réel)

def val_absolue(x) :

"""

Calcule valeur absolue de x

"""

if x >= 0:

return x

else:

return -x

```
>>> val_absolue(1)
```

```
1
```

```
>>> val_absolue(-1)
```

```
1
```

Exercice 6 Démontrer le majorant de l'inégalité triangulaire sans élévation au carré. (On pourrait traiter le minorant de la même manière; inconvénient de cette méthode, elle ne permet pas de traiter le cas d'égalité facilement...)

Exercice 7 Soient x et y deux réels. En utilisant que :

$$x = \frac{1}{2}((x + y) + (x - y)), \quad y = \frac{1}{2}((x + y) - (x - y)),$$

montrer que : $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Exercice 8 (Propagation des erreurs) Supposons que :

$$|x_1 - a_1| \leq \varepsilon_1, \quad |x_2 - a_2| \leq \varepsilon_2, \quad \dots \quad |x_n - a_n| \leq \varepsilon_n,$$

où les x_k, a_k et ε_k sont des réels. Montrer que :

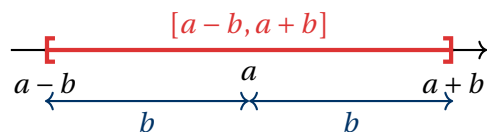
$$|(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n.$$

INTERVALLES ET LIEN AVEC LA VALEUR ABSOLUE. Les intervalles centrés autour d'un point peuvent être reformulés à l'aide de la valeur absolue, puisque rappelons que pour tout $b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$:

$$|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b \iff x \in [-b, b],$$

ou encore pour tout $x, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$:

$$|x - a| \leq b \iff -b \leq x - a \leq b \iff x \in [a - b, a + b].$$



Dans les équivalences précédentes, on peut remplacer $\leq$ par $<$, on obtient dès lors :

Proposition 18

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$x \in]a - b, a + b[\iff |x - a| < b, \quad x \in [a - b, a + b] \iff |x - a| \leq b.$$

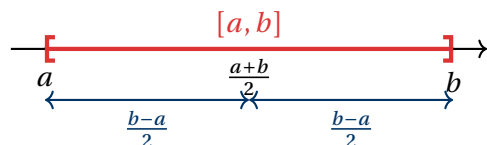
Si on veut plutôt exprimer des intervalles aux bornes a, b , on a la proposition suivante.

Proposition 19 | Intervalles et valeur absolue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Alors :

$$x \in [a, b] \iff d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) = \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}.$$

Graphiquement, on a la situation suivante :



En résumé, la valeur absolue est une quantité très efficace pour traduire des conditions d'appartenance à un certain intervalle. Nous utiliserons régulièrement ce genre de choses en analyse.

4

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

Cette section vise à parcourir les différentes méthodes à connaître, relatives aux équations et inéquations. Elle est à lire à la maison, le programme officiel ne prévoyant pas de temps dédié en cours pour cela. On en abordera en TD, vous devez aussi vous entraîner avec le cahier de calcul si vous vous sentez fragile sur le sujet.

4.1

Principes généraux de raisonnement

Rien de bien nouveau dans cette partie par rapport aux classes antérieures. On formalise simplement différents types de raisonnements rencontrés jusqu'alors pour résoudre des équations et inéquations, à l'aide des rudiments de logique développés dans le chapitre de logique. Commençons par rappeler des erreurs cruciales à ne pas commettre.



Attention Au sujet des divisions / factorisations

- Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle.
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$ (sauf si a et b sont de même signe, auquel cas il convient de le préciser!). Mais, on rédige souvent la condition en utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \\ &\iff (a - b)(a + b) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{identité remarquable} \\ \text{équation produit-nul} \end{array} \right. \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

Comment procéder pour résoudre une équation? Plusieurs méthodes s'offrent à nous.

Méthode (ALG) 2.1 (Résolution d'une équation ou inéquation) Étant donnée une équation ou une inéquation,

- **[Domaine de résolution]** On commence par déterminer le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution dans le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation). Ce domaine de résolution s'obtient en exprimant des conditions naturelles d'existence des quantités mises en jeu (présence d'un logarithme, d'une racine carrée, d'un quotient, ...). Plus formellement, si l'équation/inéquation est de la forme :

$$f(x) = (\text{ou } \leq, \geq, <, >) g(x), \quad \text{alors } \mathcal{D}_r = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$
- **[Résolution de l'équation]** On raisonne ensuite par équivalences pour déterminer l'ensemble des solutions du problème posé.
- **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$ avec f et g deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Σ

Notation Ensemble de résolution et de solutions

- On note en général $\mathcal{D}_r$ le domaine de résolution.
- L'ensemble des solutions (*sous-ensemble du domaine de définition*) est souvent noté $\mathcal{S}$.
- Lorsque l'on cherche les solutions uniquement dans un certain ensemble E , on notera $\mathcal{S}_E$ les solutions appartenant à E . En d'autres termes : $\mathcal{S}_E = \mathcal{S} \cap E$.
- Lorsque $E =]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, on notera plus simplement $\mathcal{S}_{\leq a}$. De même pour $\mathcal{S}_{< a}, \mathcal{S}_{\geq a}, \mathcal{S}_{> a}$.

!

Attention

Il ne suffit pas d'écrire sur sa feuille un symbole « $\iff$ » pour prouver ladite équivalence! Si certaines ne sont pas évidentes, une justification précise est attendue (*surtout si on élève au carré une inégalité...*)

4.2 Résolution des équations avec des produits et des quotients

En cas de présence de produits/de quotients, on intègre les réflexes suivants lorsqu'on cherche à résoudre une (in)équation :

- tout passer du même côté pour comparer à 0, (*histoire de se ramener à une étude de signe*)
- tout mettre sur le même dénominateur le cas échéant, (*si présence de fractions*)
- factoriser au maximum. (*car il est pratique d'étudier le signe d'un produit/d'un quotient*).

Méthode (ALG) 2.2 (Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient) Soient A et B deux réels.

- $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
- $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ (et $B \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour $AB \leq 0$ ou $\frac{A}{B} \leq 0$, on dresse un **tableau de signe** pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.
- Lorsque le membre de droite n'est pas $= 0, \leq 0, \geq 0$, on passe tout d'un côté et on applique les méthodes précédentes.

4.3 Cas polynomial

ÉTUDE DE $ax + b, a \neq 0$. Tout se cache dans le tableau de signe.

Si $a > 0$				Si $a < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+	$ax + b$	+	0	-

Exemple 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

- $x(x+2) = 2x(3x-4)$.

$$x(x+2) = 2x(3x-4) \iff x(x+2-2(3x-4)) = 0$$

$$\iff 5x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{0, 2\}$.

$$\bullet (3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3).$$

$$(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3) \iff (3x-1)(x+2) > 2(1-3x)(4x+3)$$

$$\iff (3x-1)(x+2+8x+6) > 0$$

$$\iff (3x-1)(9x+8) > 0$$

Le tableau de signe est alors :

x	$-\infty$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$9x+8$	$-$	0	$+$	$+$	
$(3x-1)(9x+8)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On déduit alors l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, -\frac{8}{9} \right[\cup \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[.$$

$$\bullet \frac{2}{x} \geq \frac{4}{x+4}. \text{ Le domaine de résolution est } \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}. \text{ De plus :}$$

$$\frac{2}{x} \geq \frac{4}{x+4} \iff \frac{2}{x} - \frac{4}{x+4} \geq 0$$

$$\iff \frac{2(x+4)-4x}{x(x+4)} \geq 0 \iff \frac{-2(x-4)}{x(x+4)} \geq 0.$$

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$8 - 2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{8 - 2x}{x(x + 4)}$	$+$	$-$	$+$	0	$-$

À l'aide du tableau, on déduit l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, -4 \right[\cup \left] 0, 4 \right[.$$

Exercice 9 Résoudre $(x+1)^2 > (2x-3)^2$ sur $\mathbb{R}$.

ÉTUDE DE $ax^2 + bx + c, a \neq 0$. On reprend les formules vues au lycée pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels. Elles seront généralisées dans le chapitre sur les nombres complexes, aux cas de coefficients complexes.

Considérons un trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en mettant le trinôme sous forme « canonique »². On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \quad \text{forme canonique} \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a^2} (b^2 - 4ac) \right]. \end{aligned}$$

Le terme entre crochet ressemble à une identité remarquable de la forme « $a^2 - b^2$ ». Deux cas se présentent, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right), \quad \text{identité remarquable} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - 0 \right] \\ &= a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } ax^2 + bx + c = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}.$$

- si $\Delta < 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{> 0} \right] \quad \text{avec } a \neq 0,$$

2. C'est-à-dire sans facteur en x

donc $ax^2 + bx + c \neq 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On arrive tout droit au théorème suivant, déjà énoncé en classe de Première.

Théorème 2 | Second degré sur $\mathbb{R}$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

On cherche les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x . On appelle *discriminant* la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes (appelées *racines simples du trinôme*) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$ alors il n'y a qu'une solution réelle (appelée *racine double du trinôme*) définie par $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

De plus, on connaît le signe de l'expression $P(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout nombre réel x .

Proposition 20 | Signe d'un trinôme

On note $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Si $\Delta > 0$, le tableau de signe de P est donné par :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de P	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

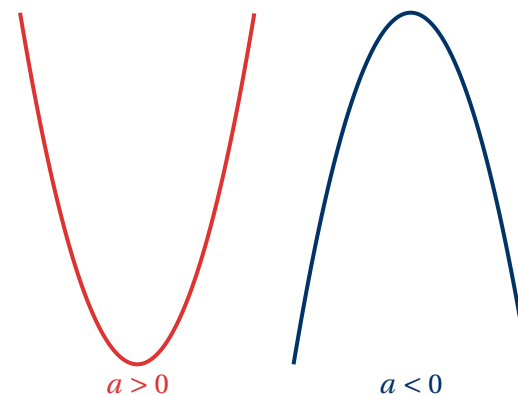
- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de P est donné par

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de P	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$, le tableau de signe de P est donné par

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de P	signe de a	

Le signe de a dicte l'allure de la courbe représentative du trinôme :



Le signe de Δ indique de nombre de points d'annulation du trinôme. Un cas particulier à retenir est le suivant : si le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède deux racines distinctes, le trinôme est « du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Exemple 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante.

- $-2x^2 + 5x + 3 = 0$. On trouve que les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$.
- $-2x^2 + 5x + 3 > 0$. Puisqu'on a déjà calculé les racines, on déduit immédiatement le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions est alors : $\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}, 3\right[$.

Exercice 10 Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit P le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^2 + (2m + 2)x + m^2 - 1.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $P(x) = 0$ admet-elle une unique solution ? Quelle est alors cette solution ?

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (\text{E})$$

on ne calcule le discriminant Δ que dans les cas indispensables, il existe certains cas particuliers permettant d'économiser beaucoup de temps de calcul.

ÉTUDE DE $ax^2 + c, a \neq 0$ (CAS $b = 0$). L'équation (E) s'écrit alors :

$$(\text{E}) \quad ax^2 + c = 0 \iff x^2 = -\frac{c}{a}.$$

On se ramène alors à une équation du type $x^2 = k$ en ayant posé $k = -\frac{c}{a}$.

Proposition 21 | Résolution de l'équation $x^2 = k$

Soit $k \in \mathbb{R}$, considérons l'équation $x^2 = k$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- si $k > 0$, $x^2 = k \iff x = \sqrt{k}$ **ou** $x = -\sqrt{k}$

Note | Prenez garde à ne pas oublier cette deuxième solution!

- si $k = 0$, $x^2 = 0 \iff x = 0$.
- si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Preuve

- si $k > 0$, alors k possède une racine carrée et

$$\begin{aligned} x^2 = k &\iff x^2 = (\sqrt{k})^2 \\ &\iff x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0 \\ &\iff (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0 \\ &\iff x = \sqrt{k} \text{ ou } x = -\sqrt{k}. \end{aligned}$$
- L'équivalence $x^2 = 0 \iff x = 0$ est évidente.
- si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque $x^2 \geq 0$ tandis que $k < 0$: un nombre réel positif ne peut pas être égal à un nombre réel strictement négatif!

Exemple 24 Résoudre rapidement dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 7 = 0$.

$$2x^2 - 7 = 0 \iff x^2 = \frac{7}{2} \iff x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Ainsi : $\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}} \right\}.$

ÉTUDE DE $ax^2 + bx, a \neq 0$ (CAS $c = 0$). L'équation (E) s'écrit alors :

$$(\text{E}) \quad ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}.$$

Bref, un facteur commun apparaît, pas besoin là encore de calculer Δ !

ÉTUDE DE $a^2x^2 + 2abx + b^2, a \neq 0$ (IDENTITÉ REMARQUABLE). Si l'on reconnaît le développement d'une identité remarquable, la résolution est très rapide (on obtient alors une unique solution).

Exemple 25 Résoudre rapidement dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \iff (2x + 1)^2 = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Donc : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$

CAS DE RACINES ÉVIDENTES. Cette dernière méthode, certainement nouvelle pour la plupart d'entre vous, est très élégante à mettre en pratique. Elle est basée sur la proposition suivante.

Proposition 22 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, tels que $\Delta > 0$, où $\Delta = b^2 - 4ac$. Notons x_1, x_2 les deux solutions de $ax^2 + bx + c = 0$. Alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ainsi, connaissant une racine, on peut facilement obtenir l'autre.

Preuve On sait que $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors :



$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Exemple 26 Pour les équations qui suivent, déterminer une solution évidente (i.e. dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$), puis en déduire la deuxième.

- $3x^2 - 2x - 1 = 0$. On constate que 1 est racine. Notons α la seconde, d'après les relations coefficients racines on $1 \times \alpha = -\frac{1}{3}$. Ainsi, $\alpha = -\frac{1}{3}$.
- $x^2 - 2026x - 2027 = 0$.



On constate que -1 est racine. Notons α la seconde, d'après les relations coefficients racines on $(-1) \times \alpha = -2027$. Ainsi, $\alpha = 2027$.

Note

Dans cet exemple, le calcul de Δ serait rédhibitoire étant donnés les coefficients...

LORSQUE LE DEGRÉ EST SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 3. Tout ce qui suit deviendra plus naturel lorsque nous traiterons les polynômes dans le chapitre sur les polynômes.

Méthode (ALG) 2.3 (Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3)

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :

- ◊ soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
- ◊ soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0) = 0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme

$$A(x) = (x - x_0)B(x)$$

pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Exemple 27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$. On pourra commencer par chercher $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$



On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x - 1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c. \end{aligned}$$

Par identification,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -4 \\ c - b = 1 \\ -c = 2 \end{cases} \iff a = 1, \quad b = -3, \quad c = -2.$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(x^2 - 3x - 2).$$

Résolvons alors l'équation :

$$x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Après calcul de discriminant, on trouve que les racines de $x \mapsto x^2 - 3x - 2$ sont

$$\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}. \text{ En conclusion : } \mathcal{S} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, 1, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

4.4

Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE $\exp, \ln$. Les fonctions $\exp, \ln$ seront revues un peu plus tard, mais rappelons un kit de survie concernant leurs propriétés.

Proposition 23 | Quelques propriétés de $\exp$ et $\ln$

• [Exponentielle]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

• [Logarithme]

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(x^n) = n \ln x.$$

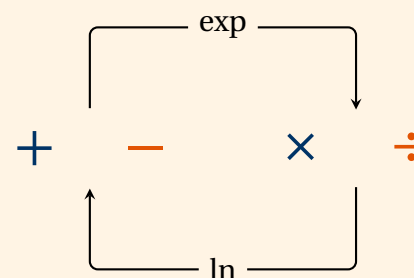
• [Réciprocité]

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{++}, \quad e^{\ln x} = x.$$



Résumé

Une partie des propriétés peuvent être retenues de la manière suivante.



UTILISER LES PROPRIÉTÉS DE $\ln$, $\exp$. L'idée est d'essayer d'appliquer $\ln$ ou $\exp$ de chaque côté afin de simplifier l'équation.

Exemple 28 Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$. L'équation est définie lorsque

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \iff x > 1.$$

Ainsi, l'ensemble de définition est : $\mathcal{D}_r =]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_r$,

$$\begin{aligned} 2\ln(x+1) &= \ln(x-1) + \ln(2x-1) \\ \iff \ln((x+1)^2) &= \ln((x-1)(2x-1)) \\ \iff (x+1)^2 &= (x-1)(2x-1) \\ \iff x^2 + 2x + 1 &= 2x^2 - 3x + 1 \\ \iff x^2 - 5x = 0 &= x(x-5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

Comme $0 \notin \mathcal{D}_r$ et $5 \in \mathcal{D}_r$, on obtient : $\mathcal{S} = \{5\}$.

2. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$. On a :

$$e^{x+1}e^{3x-4} > 1 \iff e^{4x-3} > 1 \iff 4x-3 > 0$$

puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi :

$$e^{x+1}e^{3x-4} > 1 \iff x > \frac{3}{4}. \text{ Donc : } \mathcal{S} =]\frac{3}{4}, +\infty[.$$

ÉLEVER AU CARRÉ. L'idée est d'essayer d'élever au carré afin de supprimer d'éventuelles racines. Attention : on rappelle qu'on ne peut élever au carré n'importe comment une inégalité ! Il faut toujours prendre la précaution de savoir si les membres sont positifs.

Exemple 29 Résoudre, par disjonction de cas, l'équation : $x = \sqrt{x+2}$. On retrouve une équation du **Chapitre (ALG) 1** traité par analyse-synthèse. L'équation est définie sur $]-\infty, 2]$. Pour élever au carré et conserver l'équivalence, on doit avoir des termes positifs.

• **[Cas 1]** Si $x \leq 0$, alors l'équation n'a pas de solution car on aurait $\sqrt{2-x} < 0$. Ainsi, $\mathcal{S}_{<0} = \emptyset$.

• **[Cas 2]** Si $x \geq 0$, alors puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2-x} &\iff x^2 = 2-x \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\iff (x-1)(x+2) = 0$$

$$\iff x \in \{1, -2\}.$$

Donc : $\mathcal{S}_{\geq 0} = \{1\}$. (on ne garde que les solutions dans le domaine de définition)

Conclusion : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{<0} \cup \mathcal{S}_{\geq 0} = \boxed{\{1\}}$.

Exemple 30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x^2+2x} < x+1$.

La fonction $x \mapsto x^2+2x$ est un trinôme de racines 0 et -2, l'équation est donc définie sur $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$. Pour élever au carré et conserver l'équivalence, on doit avoir des termes positifs.

• **[Cas 1]** Si $x < -1$, alors l'équation n'a pas de solution car on aurait $\sqrt{x^2+2x} < 0$. Ainsi, $\mathcal{S}_{<-1} = \emptyset$.

• **[Cas 2]** Si $x \geq -1$, alors puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2x} < x+1 &\iff x^2+2x < (x+1)^2 \\ &\iff x^2+2x < x^2+2x+1 \\ &\iff 0 < 1, \text{ toujours vraie.} \end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{S}_{\geq -1} = [-1, +\infty[\cap (]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[) = [0; +\infty[$. (on ne garde que les solutions dans le domaine de définition)

Conclusion : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{<-1} \cup \mathcal{S}_{\geq -1} = \boxed{[0; +\infty[}$.

UTILISER UN CHANGEMENT DE VARIABLE. Il s'agit de poser un changement de variable du type $X = e^x$ ou $X = \ln(x)$ ou $X = x^2$ ou $X = \sqrt{x}$... pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre (en général polynomiale). Dans les exercices, le changement de variable éventuel à réaliser sera toujours donné.

! Attention

Attention, une fois les valeurs possibles de X trouvées, il ne faut pas oublier de revenir aux solutions en x pour conclure.

Exemple 31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ et $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$.

Posons $X = x^2$. On a alors :

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff X^2 - 3X + 2 = 0, \text{ et } X = x^2.$$

Les racines du trinôme $X^2 - 3X + 2 = 0$ étant 1 et 2,

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 2 \iff x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}.$$

Pour l'inéquation, $X^2 - 3X + 2 < 0 \iff X \in]1; 2[$ donc

$$x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \iff 1 < x^2 < 2 \iff x \in]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[.$$

2. $e^x + e^{1-x} = e + 1.$

$$e^x + e^{1-x} = e + 1 \iff e^{2x} + e = (e + 1)e^x \iff (e^x)^2 - (e + 1)e^x + e = 0. \text{ On a alors :}$$

$$e^x + e^{1-x} = e + 1 \iff X^2 - (e + 1)X + e = 0, \quad \text{et} \quad X = e^x.$$

Le trinôme $X^2 - (e + 1)X + e$, possède 1 comme racine évidente, la seconde est e à l'aide des relations coefficients-racines. Donc :

$$e^x + e^{1-x} = e + 1 \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = e \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Conclusion : $\mathcal{S} = \emptyset.$

ENLEVER LES VALEURS ABSOLUES. Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qu'il y a à l'intérieur. On peut donc étudier le signe de l'expression dans la valeur absolue puis faire une disjonction de cas pour résoudre l'(in)équation obtenue sans la valeur absolue dans chacun des cas possibles. On peut aussi utiliser une propriété sur la valeur absolue. Voyons cela sur plusieurs exemples.

Exemple 32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x - 4| = 2x + 10.$

• **[Méthode 1 : disjonction de cas]**

◇ **[Cas 1]** Si $x \geq 4$, alors $x - 4 \geq 0$ donc l'équation est :

$$|x - 4| = 2x + 10 \iff x - 4 = 2x + 10 \iff x = -14.$$

Ainsi, comme $-14 \not\geq 4$, on a $\mathcal{S}_{\geq 4} = \emptyset.$

◇ **[Cas 2]** Si $x < 4$, alors $x - 4 < 0$ donc l'équation est :

$$|x - 4| = 2x + 10 \iff 4 - x = 2x + 10 \iff x = -2.$$

Ainsi, comme $-2 < 4$, on a $\mathcal{S}_{< 4} = \{-2\}.$

Conclusion : $\mathcal{S} = \{-2\}.$

• **[Méthode 2 : propriété « $|y| = M \iff \dots$ lorsque $M \geq 0$ »]**

◇ **[Cas 1]** Si $2x + 10 < 0$ c'est-à-dire $x < -5$, l'équation n'a pas de solution puisque une valeur absolue est forcément positive. Donc $\mathcal{S}_{< -5} = \emptyset.$

◇ **[Cas 2]** Si $2x + 10 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -5$, alors :

$$\begin{aligned} |x - 4| = 2x + 10 &\iff x - 4 = 2x + 10 \text{ ou } x - 4 = -(2x + 10) \\ &\iff x = -14 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$

Ainsi, comme $-2 \geq -5$, on a $\mathcal{S}_{\geq -5} = \{-2\}.$

Conclusion : $\mathcal{S} = \{-2\}.$

2. $|3 - x| > |x + 2|.$ Quand il y a plusieurs valeurs absolues, il peut être judicieux de commencer par dresser un tableau de signe.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$3 - x$		+	+	0	-
$x + 2$	-	0	+	+	

- si $x \in]-\infty; -2]$, l'inéquation devient :

$$3 - x > -x - 2 \iff 3 > -2$$

ce qui est toujours vrai donc l'inéquation est vérifiée pour tout $x \in]-\infty; -2]$.

- si $x \in [-2; 3]$, l'inéquation devient

$$3 - x > x + 2 \iff x < \frac{1}{2}$$

donc l'inéquation est vérifiée pour tout $x \in [-2; \frac{1}{2}[.$

- si $x \in [3; +\infty[$, l'inéquation devient

$$x - 3 > x + 2 \iff -3 > 2$$

ce qui est toujours faux donc l'inéquation n'est vérifiée pour aucun $x \in [3; +\infty[.$

Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{1}{2}[.$

RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS PAR UNE ÉTUDE DE FONCTION. Si on souhaite montrer qu'une inéquation est vraie pour tout x dans un certain sous-ensemble E (de $\mathbb{R}$), ou même vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que l'on n'y parvient pas par inégalités successives, on peut essayer d'étudier les variations d'une certaine fonction.

Méthode (ALG) 2.4 (Pour montrer « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ ») Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- On définit la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x).$
- On étudie les variations de h , on en déduit le signe de $h.$
- Le signe de h donne alors la réponse.

Commençons par un exemple complet.

♥ **Exemple 33** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$.

Note

Même si la question est ici formulée par une inéquation, on retiendra ici qu'une étude de fonction permet d'établir des inégalités.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x - 1$. La fonction f est dérivable car somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \exp(x) - 1$. Ainsi, si $x > 0$ alors $f'(x) > 0$ et si $x < 0$ alors $f'(x) < 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

D'après le tableau de variations f admet 0 pour minimum sur $\mathbb{R}$ et l'atteint en 0 . On a donc montré que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et, par suite, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 11 Montrer, par deux méthodes, que pour tout $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (ALG) 2.1 (Résolution d'une équation ou inéquation) Étant donnée une équation ou une inéquation,

- **[Domaine de résolution]** On commence par déterminer le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution dans le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation). Ce domaine de résolution s'obtient en exprimant des conditions naturelles d'existence des quantités mises en jeu (présence d'un logarithme, d'une racine carrée, d'un quotient, ...). Plus formellement, si l'équation/inéquation est de la forme :

$$f(x) = (\text{ou } \leq, \geq, <, >) g(x), \quad \text{alors } \mathcal{D}_r = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

- **[Résolution de l'équation]** On raisonne ensuite par équivalences pour déterminer l'ensemble des solutions du problème posé.
- **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$ avec f et g deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Méthode (ALG) 2.2 (Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient) Soient A et B deux réels.

- $AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$.
- $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ (et $B \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour $AB \leq 0$ ou $\frac{A}{B} \leq 0$, on dresse un **tableau de signe** pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.
- Lorsque le membre de droite n'est pas $= 0, \leq 0, \geq 0$, on passe tout d'un côté et on applique les méthodes précédentes.

Méthode (ALG) 2.3 (Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3)

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :
 ◇ soit on factorise directement en repérant un facteur commun,

- ◇ soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0) = 0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme

$$A(x) = (x - x_0)B(x)$$

pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Méthode (ALG) 2.4 (Pour montrer « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ ») Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- On définit la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h , on en déduit le signe de h .
- Le signe de h donne alors la réponse.

5

EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

- Sur les ensembles de nombres :
 - les ensembles classiques ☐
 - les propriétés de l'addition et la multiplication des réels ☐
 - les règles de calcul dans $\mathbb{Q}$ ☐
 - les règles sur les puissances, les racines, ☐
 - les identités remarquables ☐
- Sur la relation d'ordre des réels :
 - les propriétés de la relation d'ordre ☐
 - les compatibilités ☐
 - le cas des puissances ☐
 - les propriétés de la valeur absolue ☐
 - l'inégalité triangulaire ☐
- Connaitre les différentes techniques de résolutions d'équations & d'inéquations ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.

Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard 24 h avant la date prévue.



Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler

1/2/3/4/5/6

Exercice 1 | ●○○ Un peu de logique Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^3$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, x = y^3$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^3$.

5.1 Calcul littéral

Cette section vient compléter celles du cahier de calcul, qu'il vous appartient de travailler en autonomie.

Exercice 2 | ●○○ Puissances

1. Factoriser les expressions suivantes (n est un entier naturel) :

$$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 3^{2n}, B = \frac{2}{4^n} - 5 \times 2^{-2n-1} + 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Réduire les expressions suivantes :

$$A = x^{-1} \times \frac{x^9}{x^5}, \quad B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3}, \quad C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4}.$$

Exercice 3 | ●○○ Racines Simplifier les expressions suivantes.

- $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$,
- $B = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$,
- $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, on précisera notamment le domaine de validité.
- $D = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Exercice 4 | ●○○ Racines Rendre entiers les dénominateurs des expressions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}, & B &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}, \\ C &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}, & D &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \\ E &= \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}, & F &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}, \\ G &= \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}, & H &= \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 5 | ●●○ [Abderahmene AB – Maxance FA] Racines Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels de la forme

$$a + b\sqrt{2}, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{Q}^2.$$

Montrer que, si x et y sont dans $\mathbb{K}$, il en est de même de $x - y$, xy et, si $x \neq 0$, de $1/x$.

5.2 Racine

Exercice 6 | ●○○ Inégalités

1. Justifier que : $\forall x \in]0, 1[, \quad x^2 < x < \sqrt{x}$.
2. En déduire : $\forall x \in]0, 1[, \quad x + x^2 < 2\sqrt{x}$.

Exercice 7 | ●●○ [Jean PL – Ritâa SA] Inégalités Soient $x, y \geq 0$.

1. Montrer que : $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2. En déduire que si $x \geq y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.
3. En déduire que : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

Exercice 8 | ●●○ Racines cubiques On considère les deux réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de μ et ν .

1. **1.1)** Calculer $\mu\nu$ et $\mu^3 + \nu^3$.
- 1.2) En déduire la valeur de $(\mu + \nu)^3$ en fonction de $\mu + \nu$.
2. On pose $\lambda = \mu + \nu$ et $P(x) = x^3 + 3x - 14$ pour tout réel x .
 - 2.1) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
 - 2.2) Trouver une racine évidente de P .
 - 2.3) Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$
 - 2.4) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, et en déduire la valeur de λ .
3. On pose $Q(x) = (x - \mu)(x - \nu)$ pour tout réel x .
 - 3.1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.

3.2) En déduire que μ et ν sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4. Conclure.

Exercice 9 | ●●○ [Ilann SA – Raphaël LU] (In)équations avec radicaux Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $\sqrt{x+1} = x-1$, 2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$, 3. $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$.

5.3 Valeur absolue

Exercice 10 | ●●○ [Gabriel BE – Louis ME] Inégalité du type triangulaire

1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante positive sur $[0, \infty[$.

2. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 11 | ●●○ [Sylvain CL – Antoine LO] Soient a et b deux réels. Montrer que :

$$|a+b| - |a-b| = 2\varepsilon_{a,b} \min\{|a|, |b|\} \quad \text{où :} \quad \varepsilon_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \geq 0 \\ -1 & \text{si } ab < 0. \end{cases}$$

Exercice 12 | ●●○ (In)équations avec valeurs absolues Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $x^2 = |x|$, 2. $|2x-3| \leq 2$,
 3. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$, 4. $|2x+3| - |-5x+6| \geq 3x+2$,
 5. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2|$,

5.4 Autres fonctions

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 13 | ●○○ [Mathéo CA – Martin LA]

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0$.
 2. En déduire que, pour tous réels a, b , $a + b \leq (1+a^2)(1+b^2)$.

Exercice 14 | ●●○ [Joshua BA – Toscane GR] On cherche à résoudre l'équation d'inconnue réelle

$$(E) : x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 8x + 1 = 0.$$

1. Pour $x \neq 0$, justifier que (E) équivaut à

$$x^2 + 8x + 2 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

 2. On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Développer u^2 en fonction de x .
 3. Résoudre (E).

Exercice 15 | ●○○ (In)équations avec des polynômes Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$, 2. $(x-1)^2 \leq 1$,
 3. $\frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}$, 4. $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x}$,
 5. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$, on constatera que 1 est racine évidente.

Exercice 16 | ●●○ Équations à paramètres Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$, 2. $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$,

Exercice 17 | ●●○ Inéquations avec paramètre Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$,
2. $\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2}$,

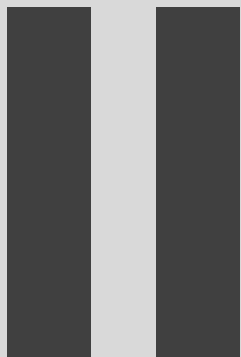
EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Exercice 18 | ●○○ **Exponentielles et logarithmiques** Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $|\ln x| < 1$,
2. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$,
3. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$,
4. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$.

Exercice 19 | ●○○ **[Raphaël MA – Ander MA]** **Avec étude de fonction** En utilisant une fonction, répondre aux questions ci-après.

1. Montrer que : $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$,
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\frac{n}{4}} < 2$.



Deuxième partie

Analyse