Chapitre (ALG) 3 Trigonométrie

1 Généralités .....
2 Formules trigonométriques .....
3 Équations trigonométriques ....
4 Inéquations trigonométriques .....
5 Exercices .....

Résumé & Plan

Ce chapitre consiste à revoir les éléments de trigonométrie des années antérieures, et à les compléter.

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

— Galilée

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Relation de congruence modulo.

On commence par définir une notation qui sera utilisée dans tout le chapitre.

Définition 1 | Modulo

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- Soit de plus $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :
  - ◇ on dit que x *et* y *sont congrus modulo* θ, et on note $x = y \ [\theta]$, lorsque : $\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + k\theta$.
  - ◇ On dit que x *et* y *ne sont pas congrus modulo* θ, et on note $x \neq y \ [\theta]$, lorsque : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq y + k\theta$.
- En particulier, $x = y \ [2\pi]$ lorsque : $\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + 2k\pi$.

Σ **Notation Ensemble $x + y\mathbb{Z}$**

On note aussi souvent, pour $x, y \in \mathbb{R}$: $x + y\mathbb{Z} = \{x + ky \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi, par exemple :

- $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ désigne : $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- On peut même faire le lien avec la notation précédente : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors
$$x = y \ [\theta] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + k\theta \iff x - y \in \theta\mathbb{Z}.$$

Passons maintenant à une liste de propriétés sur ce nouveau symbole =. Pour le symbole ≠, seule la multiplication/division (troisième propriété) est vérifiée.

Proposition 1 | Propriétés de la congruence

Soit $(x, x', y, y', \theta, z, \lambda) \in \mathbb{R}^7$.

- **[Transitivité]** Si $\begin{cases} x = y \ [\theta] \\ y = z \ [\theta], \end{cases}$ alors : $x = z \ [\theta]$.
- **[Compatibilité avec +]** Si $\begin{cases} x = x' \ [\theta] \\ y = y' \ [\theta], \end{cases}$ alors : $x + x' = y + y' \ [\theta]$.
- **[Multiplication par λ]** Si $x = x' \ [\theta]$, alors : $\begin{cases} \lambda x = \lambda x' \ [\lambda\theta] \\ \frac{1}{\lambda}x = \frac{1}{\lambda}x' \ \left[\frac{1}{\lambda}\theta\right] \text{ si } \lambda \neq 0. \end{cases}$

  Note | *En réalité, on a même mieux : on peut multiplier deux congruences entre elles, mais souvent inutile pour faire de la trigo.*
- **[Modulo un multiple]** Si $n \in \mathbb{Z}$ et $x = x' \ [n\theta]$, alors : $x = x' \ [\theta]$.

On retient donc notamment le fait suivant.

L'opération de multiplication / division d'une congruence doit aussi s'exercer sur le modulo !

Preuve

-
-
-
-

Exercice 1 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$x = y \ [\pi] \iff (x = y \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = y + \pi \ [2\pi])$.

1 GÉNÉRALITÉS

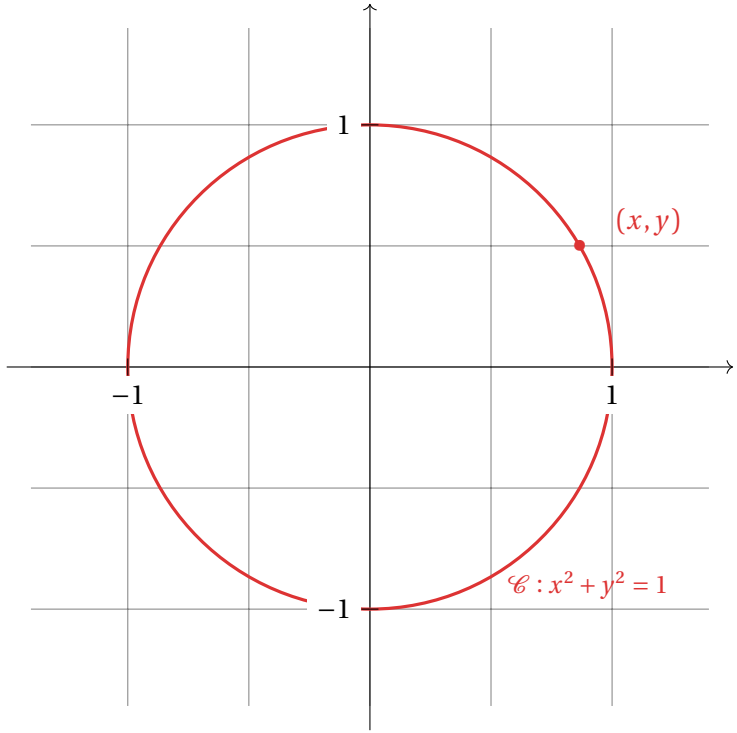
On rappelle dans cette section la définition géométrique du cosinus, sinus et de la tangente. Leur étude en tant que fonction sera faite dans le Chapitre (AN) 1.

1.1 Définitions

Définition 2 | Cercle trigonométrique

- Le *cercle trigonométrique* est le cercle $\mathscr{C}$ du plan de rayon 1 et de centre O.
- Plus précisément, il s'agit de : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Remarque 1 (Représentation graphique) Justifions que :
$\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.



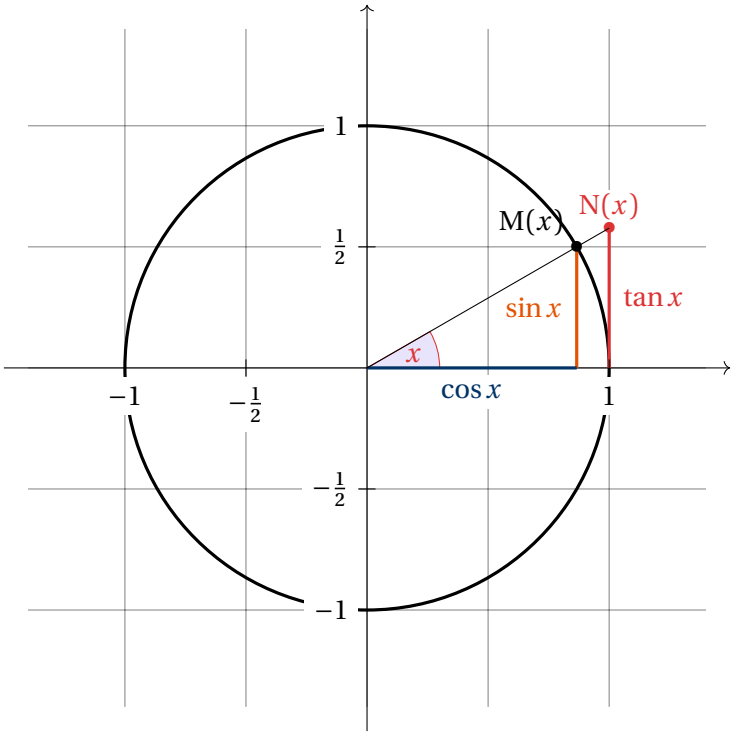
Définition 3 | Cosinus, sinus et tangente

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. Soit x un réel et $M(x)$ le point de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$.

- On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point $M(x)$.
- On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point $M(x)$.
- Lorsque $\boxed{x \notin \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}}$, c'est-à-dire $\boxed{x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]}$, on appelle *tangente de* x, notée $\tan x$, la quantité : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

  Dans la suite, on notera $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right) = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. *(cela correspondra au « domaine de définition de la fonction* tan *», que nous étudierons dans un futur chapitre)*

Remarque 2 (Interprétation géométrique de la tangente)



Pourquoi indiquer $\tan x$ à cet endroit ? Ceci est une simple conséquence du théorème de THALÈS. En effet, il donne

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut envisager d'autres cas de figure pour la position de $M(x)$ dans les différents cadrants ; cela donne d'autres configurations pour le théorème de THALÈS. De façon générale, si on note $\boxed{N(x) = (OM(x)) \cap (x=1)}$, alors $\tan(x)$ est la hauteur algébrique de $N(x)$ sur cet axe.

Remarque 3 Pour la tangente, la condition $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ garantit que $\cos x$ ne s'annule pas, donc que la fraction est bien définie.

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition $\tan(2x)$ est définie ? Même question pour $\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Proposition 2 | Conséquences directes de la définition

- **[Théorème de PYTHAGORE]** $\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\cos^2 x}_{=(\cos x)^2} + \underbrace{\sin^2 x}_{=(\sin x)^2} = 1.$

  Si de plus $x \notin \left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, alors : $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- **[Inégalités fondamentales]**

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} -1\leqslant \cos x\leqslant 1 \\ -1\leqslant \sin x\leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |\cos(x)|\leqslant 1, \\ |\sin(x)|\leqslant 1. \end{cases}$$

- **[Périodicité]** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$,

  $\cos(x+2k\pi)=\cos x,\quad \sin(x+2k\pi)=\sin x,\quad \tan(x+k\pi)=\tan x.$

Preuve

- Conséquence immédiate du théorème de Pythagore pour la première égalité. Pour la seconde : la condition assure que $\cos(x)\neq 0$ (et donc que $\tan x$ existe), il suffit alors de diviser l'égalité par $\cos^2(x)$:
-
-
- Pour cos, sin : conséquence immédiate de l'égalité $M(x+2k\pi)=M(x)$, en considérant abscisse et ordonnée. Pour tan : conséquence immédiate de l'interprétation géométrique de la tangente.

La définition de cos et sin fournit alors le résultat ci-dessous, souvent utile en pratique (voir les transformations de FRESNEL plus loin).

Proposition 3 | Théorème du relèvement

Si X et Y sont des réels tels que : $X^2 + Y^2 = 1$, alors :

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad X = \cos\theta \quad \text{et} \quad Y = \sin\theta.$$

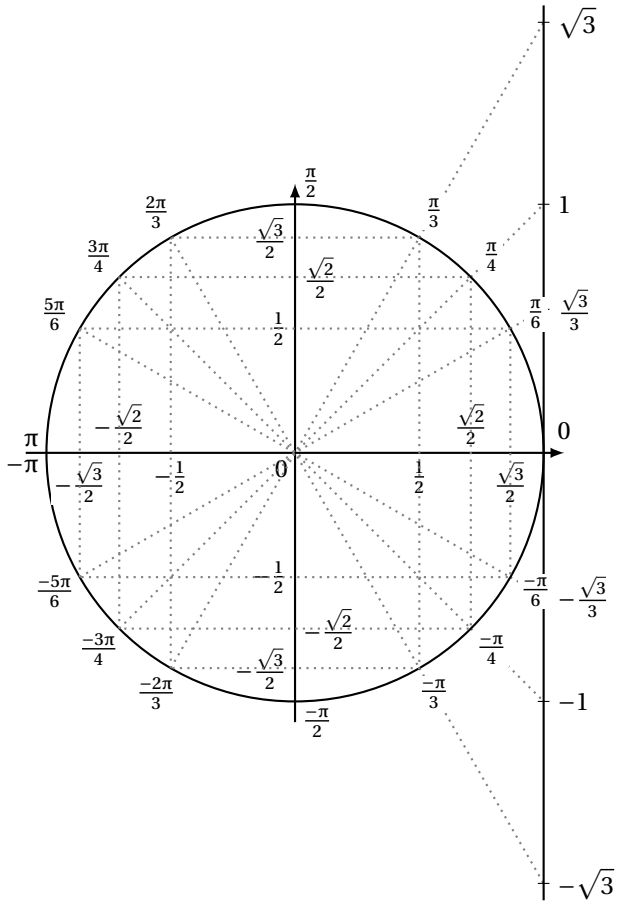
En outre, ce réel θ est unique modulo 2π.

Preuve Comme $X^2+Y^2 = 1$, le point (X, Y) se situe sur le cercle trigonométrique. L'existence de θ s'en suit.

Exercice 3 Soient m et n deux entiers. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$m^2 - n^2 = \left(m^2 + n^2\right)\cos x \quad \text{et} \quad 2mn = \left(m^2 + n^2\right)\sin x.$$

1.2 Valeurs remarquables



On rappelle également ici un certain nombre de valeurs remarquables utiles sans démonstration.

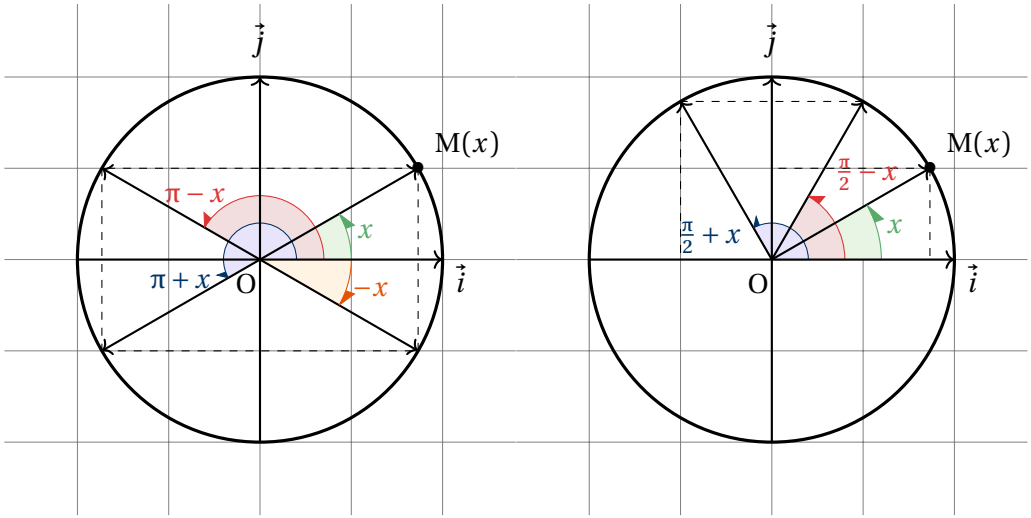
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Pour la tangente, à savoir retrouver rapidement plutôt que de les apprendre :					
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Justifions par le calcul les valeurs de $\tan(0)$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ apparaissant dans le tableau ci-dessus :

Proposition 4 | Multiples de π

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors : $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$.

Preuve Par lecture sur le cercle trigonométrique. Soit $n \in \mathbb{Z}$.



Preuve Justifions les formules pour la tangente à l'aide des précédentes, hormis $\tan(\pi + x)$ qui a déjà été constatée.

2 FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

Il existe de nombreuses formules en trigonométrie, seules quelques unes sont à notre programme, ce sont celles figurant dans les énoncés ci-après. Toutes les autres sont hors-programme, certaines d'entre elles seront vues néanmoins dans des exemples.

2.1 Angles associés

Proposition 5 | Formules de transformation d'angles associés

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$,
- $\tan(-x) = -\tan(x)$,
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$,
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$,
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$,
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$.

On justifie la majorité des formules à l'aide du dessin ci-dessous. Dans la preuve qui suit on se contente donc uniquement de la tangente.

2.2 Formules d'addition

On commence par les plus importantes : les formules d'addition.

Proposition 6 | Formules d'addition (+)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

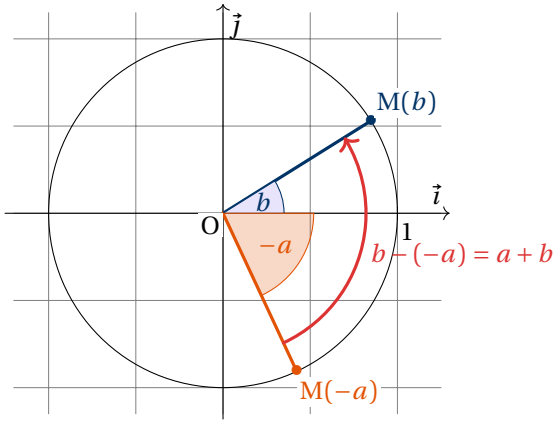
Preuve Démontrons par exemple la première formule, on s'y prendrait de la même façon pour la seconde. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(-a)\cos(b) + \sin(-a)\sin(b),$$

par parité de cos et imparité de sin. D'où :

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \overrightarrow{\mathrm{OM}(-a)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}(b)}.$$

D'autre part, une autre expression du produit scalaire donne :



On en déduit alors le corollaire qui suit.

Corollaire 1 | Formules d'addition (-)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

Preuve

-

- On procède de-même :

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) \\ &= \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) \quad \text{(formules d'addition avec +)} \\ &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \quad \text{(parité)}\end{aligned}$$

Exemple 1 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Proposition 7 | Formules d'addition « unifiée »

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$.

Remarque 4 (Comment retenir ?)

- Pour le cosinus, le signe est inversé dans le résultat. « $\pm \to \mp$ », et on ne mélange pas les fonctions.

- Pour le sinus, le signe est préservé, et on mélange les fonctions.

On peut maintenant déduire celles de la tangente.

Proposition 8 | Formules d'addition pour la tangente

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\tan(a), \tan(b)$ et $\tan(a+b), \tan(a-b)$ existent. Alors :

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}.$$

Preuve

- 🖌

- 🖌

- On en déduit alors celle avec un signe moins.

🖌

2.3 Formules de duplication/anti-linéarisation & Linéarisation

Les cas particuliers $a = b$ dans les formules d'addition fournissent les formules dites « de duplication ».

Corollaire 2 | Formules de duplication / anti-linéarisation

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1.$
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a).$

Preuve

🖌

Ou encore, de manière équivalente, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3 | Formules de linéarisation

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}, \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Remarque 5

- On parle de « linéarisation » car, par exemple pour la première, on transforme le produit $\cos(a)\boxed{\times}\cos(a)$ en somme : $\frac{1\boxed{+}\cos(2a)}{2}$.
- Ce type de formule sera très utile tout au long de l'année; calcul d'intégrales ou sommes faisant intervenir des puissances de fonctions trigonométriques par exemple.

Preuve

🖌

Exemple 2 À l'aide des valeurs remarquables et de propriétés sur cos, sin, déterminer les valeurs ci-après.

- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

- $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

-

Exemple 3 Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ calculée dans un précédent exemple.

Une version faisant intervenir la tangente existent pour ces formules de duplication.

Corollaire 4 | Formules de duplication / anti-lin, vers. tangente [H.P]

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$ existe. Alors :

$$\cos(2a) = \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}, \quad \sin(2a) = \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}.$$

Preuve

- Reprenons la formule $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et mettons $\cos^2(a)$ en facteur.

De la même façon, une formule de duplication est disponible pour la tangente en utilisant que $\tan(2a) = \tan(a+a)$.

Proposition 9 | Duplication pour la tangente

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\tan(a)$ et $\tan(2a)$ existent, alors :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Remarque 6 (Angle moitié) Les formules de duplication (dans leur version tangente pour cos, sin), nous mènent directement aux formules classiquement appelées de l'« angle moitié ».
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \pi \ [2\pi]$, alors en notant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ on a :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Ces formules servent généralement pour des calculs d'intégrale *via* « changement de variable », que nous verrons plus tard.

COMPLÉMENTS. Voici quelques formules additionnelles : elles ont le statut d'exemple car leur énoncé n'est pas à connaitre, mais c'est classique dans les sujets de devoir les retrouver. Apprenez donc surtout à la retrouver **très** rapidement !

Exemple 4 (Autres formules de linéarisation) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide des formules d'addition, établir des formules de linéarisation pour :

- $\cos(a)\cos(b) =$

- $\sin(a)\sin(b) =$

- $\sin(a)\cos(b) =$

Note | *Lorsque $a = b$, les deux premières formules donnent les formules de linéarisation du programme.*

Indication : Remarquons par exemple que $\cos(a)\cos(b)$ *apparait dans les formules d'addition portant sur* $\cos(a+b)$ *et* $\cos(a-b)$.

Exemple 5 **(Autres formules d'anti-linéarisation)** Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide des formules d'addition, établir des formules d'anti-linéarisation pour :

- $\cos(p) + \cos(q) =$

- $\cos(p) - \cos(q) =$

- $\sin(p) + \sin(q) =$

- $\sin(p) - \sin(q) =$

Indication : Remarquons que $\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} = p$ *et* $\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} = q$

2.4 Transformation de Fresnel

Une dernière conséquence des formules d'addition est la transformation d'expressions trigonométriques de la forme $a\cos x + b\sin x$ en $\rho\cos(x-\varphi)$. Pourquoi vouloir faire cela ? Cela a un intérêt en physique, et pour nous un intérêt dans les résolutions d'équations trigonométriques (voir la fin du chapitre). Commençons par énoncer la méthode générale.

Méthode (ALG) 3.1 (Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée ») Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$. On souhaite transformer l'expression :

$$E(x) = a\cos x + b\sin x \qquad \text{en} \qquad \rho\cos(x-\varphi) \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}.$$

On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. ♥ Mettre $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ en facteur ($\neq 0$ par hypothèse), de sorte que :
$$E(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$
2. Le point $\left(\frac{a}{\rho};\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = 1$. Ainsi, ses coordonnées s'écrivent sous forme de cosinus et sinus :
$$\exists \varphi \in [0, 2\pi[, \quad \frac{a}{\rho} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\rho} = \sin\varphi.$$
3. Alors : $E(x) = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \cos(x-\varphi)$ d'après la seconde formule d'addition du cosinus.

La méthode s'adapte sans trop de difficultés si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x \pm \varphi)$, ou encore $\rho\cos(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Remarque 7 L'angle φ peut ne pas être explicite en fonction des valeurs de a, b. Dans les exercices, en pratique, il le sera toujours (valeurs remarquables).

Exemple 6

- Écrire sous forme d'un cosinus l'expression $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{6}\sin x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- Même question mais avec un sinus.

- Écrire sous forme d'un cosinus puis d'un cosinus l'expression $\cos x - \sin x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

3 ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

3.1 Équations trigonométriques fondamentales

♥ **Exemple 7 (Cas des pôles du cercle trigonométrique)** En vous appuyant sur un cercle trigonométrique, résoudre les équations trigonométriques ci-après.

1. $\cos(x) = 1$

2. $\cos(x) = -1$

3. $\sin(x) = 1$

4. $\sin(x) = -1$

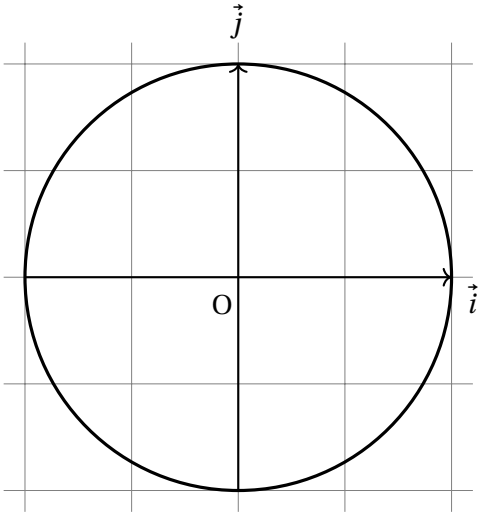
5. $\cos(x) = 0$

6. $\sin(x) = 0$

7. $\tan(x) = 1$

8. $\tan(x) = 0$

9. $\tan(x) = -1$

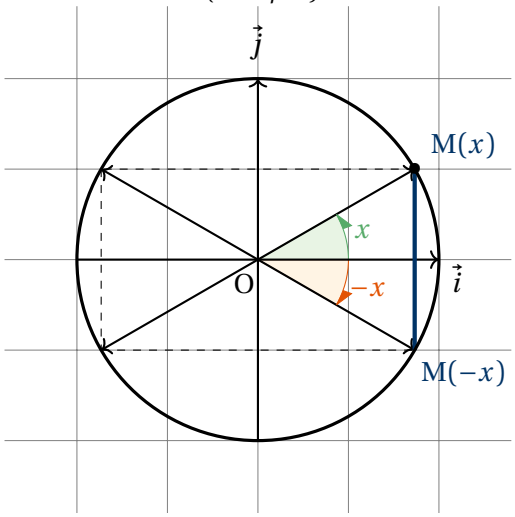


Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque le membre de droite n'est pas ± 1 ou 0, on essaiera toujours de se ramener à une « équation trigonométrique fondamentale », *i.e.* celles du résultat ci-après, dont l'ensemble des solutions est donné par la proposition suivante.

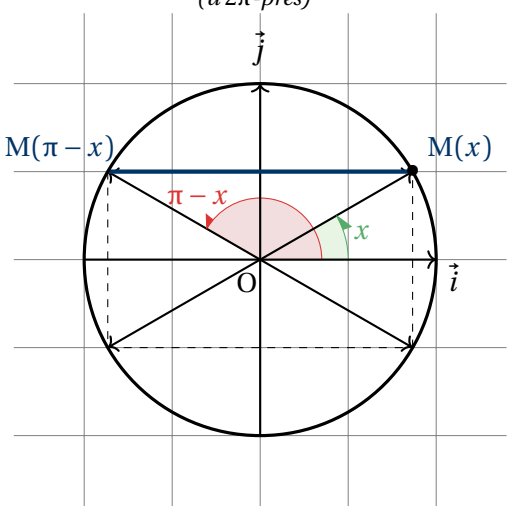
Proposition 10 | Équations trigonométriques fondamentales

- Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.
$$\cos(x) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = a + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -a + 2k\pi$$
$$\iff x = a \ [2\pi] \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -a \ [2\pi].$$
Autrement dit, l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{a + 2k\pi ; -a + 2k\pi\}.$$
- Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.
$$\sin(x) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = a + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \pi - a + 2k\pi$$
$$\iff x = a \ [2\pi] \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \pi - a \ [2\pi].$$
Autrement dit, l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{a + 2k\pi ; \pi - a + 2k\pi\}.$$
- Soit $(x, a) \in \mathcal{D}_{\tan}^2$,
$$\tan(x) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = a + k\pi$$
$$\iff x = a \ [\pi].$$
Autrement dit, l'équation $\tan(x) = \tan(a)$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{a + k\pi\}.$$

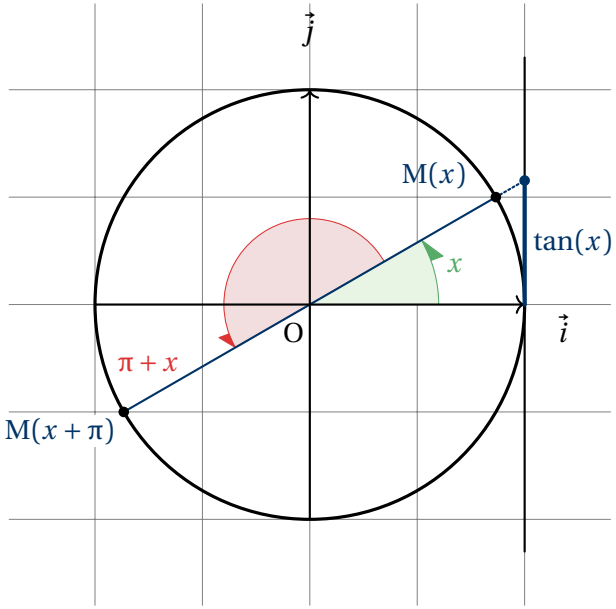
Angles ayant le même cosinus
(à 2π-près)



Angles ayant le même sinus
(à 2π-près)



Angles ayant la même tangente
(à π-près)



Définition 4 | Équation trigonométrique fondamentale
On appelle *équation trigonométrique fondamentale* l'une des équations de la proposition précédente.

Remarque 8

- Pour résoudre $\cos x = 1$, on peut *(mais peu efficace contrairement à un simple dessin)* utiliser le résultat précédent. En effet, $1 = \cos(0)$, donc :
$$\begin{aligned}\cos x = 1 &\iff \cos x = \cos 0\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = 2k\pi.\end{aligned}$$
On retrouve le résultat de l'Exemple 7 obtenu avec un simple dessin.
- Pour résoudre $\sin x = 0$, on peut *(mais peu efficace là aussi !)* utiliser le résultat précédent. En effet, $0 = \sin(0)$, donc :
$$\begin{aligned}\sin x = 0 &\iff \sin x = \sin 0\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = 0 + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \pi - 0 + 2k\pi = (2k+1)\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = k\pi.\end{aligned}$$
On retrouve le résultat de l'Exemple 7 obtenu avec un simple dessin.
- Le même constat vaut pour toutes les autres équations traitées dans l'Exemple 7.

Preuve

- Lecture graphique.
- Lecture graphique.
- Résolvons $\tan(x) = \tan(a)$ de manière calculatoire. *(une démonstration géométrique est aussi possible, en utilisant l'interprétation graphique de la tangente)*

Exemple 8

- Résoudre $\sin x = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
  - **[Méthode 1 : angles associés]**
  - **[Méthode 2 : se ramener à une tangente]**

- Résoudre $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
  - **[Domaine de résolution]**
  - **[Résolution]**

Exercice 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(\cos x)^4 - (\sin x)^4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

À L'AIDE D'UNE TRANSFORMATION DE FRESNEL. Lorsque l'équation donnée n'est pas de la forme « fondamentale », on peut parfois s'y ramener, par exemple en utilisant une transformation de FRESNEL.

Exemple 9 Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ sur $\mathbb{R}$.

À L'AIDE D'UN CHANGEMENT DE VARIABLE TRIGONOMÉTRIQUE. Il s'agit d'une résolution classique par changement de variable où l'on peut poser $X = \cos(x)$ ou $X = \sin(x)$ ou $X = \tan(x)$.

Exemple 10 Résoudre sur $[-\pi, \pi[$ l'équation $2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$.

EN FACTORISANT, À L'AIDE DE FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES. Lorsqu'on n'est dans aucun des cas précédents, on utilise les formules trigonométriques pour obtenir une expression factorisée et se ramener à l'un ou plusieurs des cas précédents.

Exemple 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(2x) = 3\tan(x)$.

4 INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Il n'y pas de résultat mentionné au programme, on procède alors à la résolution avec l'aide d'un dessin.

Méthode (ALG) 3.3 (Résoudre une inéquation trigonométrique) Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre une inéquation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)\alpha$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

Voyons plusieurs exemples.

Exemple 12 Résoudre les inéquations ci-après sur $\mathbb{R}$ puis donner les solutions sur $[0, 2\pi[$, et $[-\pi, \pi[$.

1. $2\sin x - 1 < 0$.

On se ramène à une inéquation fondamentale :

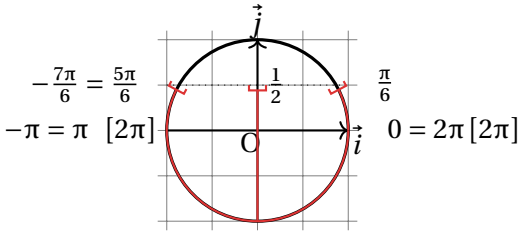
$$2\sin x - 1 < 0 \iff \sin x < \frac{1}{2}.$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[}.$$

Ainsi,

- $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[}$.
- $\boxed{\mathcal{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$.



2. $2\cos(2x) > \sqrt{3}$.

On se ramène à une inéquation fondamentale :

$$2\cos(2x) > \sqrt{3} \iff \cos(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\star).$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

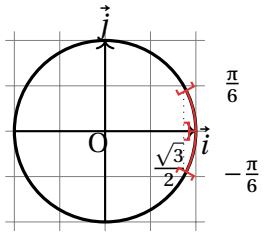
$$(\star) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Méthode (ALG) 3.2 (Résoudre une équation trigonométrique) Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour résoudre $f(x) = \alpha$:

- si $\alpha \notin [-1, 1]$, l'équation n'admet pas de solution.
- Sinon, lorsque $\alpha \in \{\pm 1, 0\}$, on conclut directement à l'aide d'un dessin.
- Sinon, on cherche à écrire α sous la forme $f(a)$ afin de résoudre une équation fondamentale.
- Si on est dans aucun des cas précédents, on peut utiliser d'autres techniques : transformation de Fresnel, changement de variable ou des formules de trigonométrie pour factoriser f.

Pour résoudre une équation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)a$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi.$$



On obtient donc :

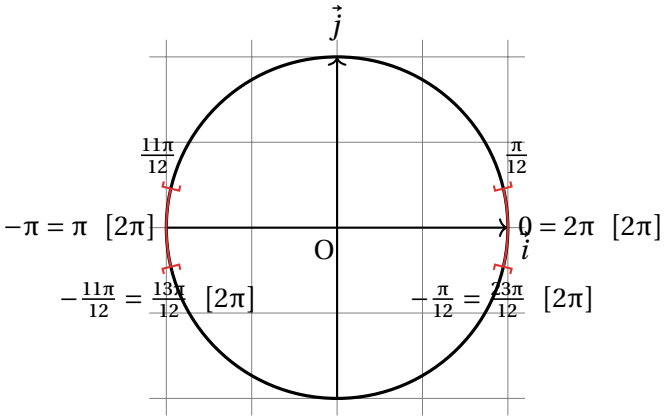
$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right[.}$$

On peut faire un second dessin pour pouvoir en déduire les solutions sur les intervalles demandés. On a :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right].}$$

Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{11\pi}{12}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \pi\right].}$$



3. $-1 < \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exemple 13 Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'inéquation $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$.

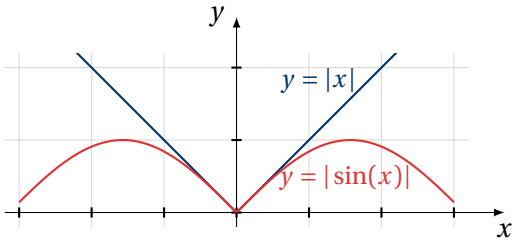
UNE INÉGALITÉ.

On termine le chapitre par une inégalité sur le sinus, nous servira plus tard pour démontrer notamment que la fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

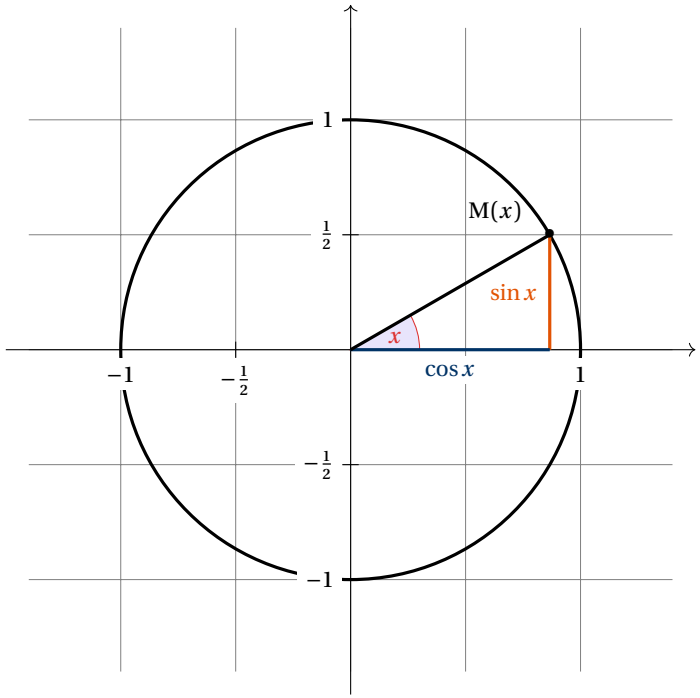
Proposition 11 | Valeur absolue du sinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \leq |x|$.

Graphiquement, en terme de graphe de fonction, l'inégalité s'interprète aussi ainsi :



Preuve Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par disjonction de cas.



FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (ALG) 3.1 **(Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée »)** Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$. On souhaite transformer l'expression :

$$\mathrm{E}(x) = a\cos x + b\sin x \qquad \text{en} \qquad \rho\cos(x-\varphi) \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}.$$

On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. ❤ Mettre $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ en facteur ($\neq 0$ par hypothèse), de sorte que :
$$\mathrm{E}(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$
2. Le point $\left(\frac{a}{\rho};\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = 1$. Ainsi, ses coordonnées s'écrivent sous forme de cosinus et sinus :
$$\exists \varphi \in [0, 2\pi[, \quad \frac{a}{\rho} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\rho} = \sin\varphi.$$
3. Alors : $\mathrm{E}(x) = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \cos(x-\varphi)$ d'après la seconde formule d'addition du cosinus.

La méthode s'adapte sans trop de difficultés si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x \pm \varphi)$, ou encore $\rho\cos(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Méthode (ALG) 3.2 **(Résoudre une équation trigonométrique)** Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour résoudre $f(x) = \alpha$:

- si $\alpha \notin [-1,1]$, l'équation n'admet pas de solution.
- Sinon, lorsque $\alpha \in \{\pm 1, 0\}$, on conclut directement à l'aide d'un dessin.
- Sinon, on cherche à écrire α sous la forme $f(a)$ afin de résoudre une équation fondamentale.
- Si on est dans aucun des cas précédents, on peut utiliser d'autres techniques : transformation de Fresnel, changement de variable ou des formules de trigonométrie pour factoriser f.

Pour résoudre une équation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)a$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

Méthode (ALG) 3.3 **(Résoudre une inéquation trigonométrique)** Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre une inéquation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)\alpha$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

5 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. connaitre la définition géométrique de cos et sin ..... ☐
2. connaitre les formules d'angles associés (à retrouver sur le cercle trigonométrique) ☐
3. connaitre les valeurs remarquables (à retrouver sur le cercle trigonométrique) . ☐
4. connaitre les formules d'addition et leur conséquence (duplication) ..... ☐
5. savoir résoudre des équations & inéquations trigonométriques ..... ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.
Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler **8**

5.1 Valeurs remarquables

Exercice 1 | ●○○ [Grégoire EL – Cyril PA] **Quelques calculs de cosinus et de sinus**

1. Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs suivantes :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$
Indication : Par exemple, pour le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$*, on pourra commencer par remarquer que* $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$
2. En utilisant cette fois une formule de duplication, calculer :
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Solution (exercice 1)

1. • On a $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, donc :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.
• De-même, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.
• À partir du calcul précédent, on a :
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}}.$$
2. Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}$. On pose alors $\theta=\frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$. Ainsi,
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$
Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}}$.
Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. On obtient ainsi,
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{\sqrt{2}+2}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$
Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}.$$

Exercice 2 | ●○○ [Benjamin JA – Emma MA] Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\sin x=\frac{1}{5}$.
Calculer $\tan x$. *On admettra à ce stade de l'année l'existence d'un tel* x.

Exercice 3 | ●●○ [Raphaël NA – Charles HE] Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1. Montrer que le nombre $x = \tan(\pi/8)$ est solution de l'équation :
$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$
2. En déduire que $x = \sqrt{2} - 1$.
3. Déterminer avec la même méthode la valeur de $\tan(\pi/12)$.

Solution (exercice 3)

1. En notant $x = \tan(\pi/8)$, la formule donne pour $a = b = \pi/8$:
$$1 = \tan(\pi/4) = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2x}{1 - x^2}$$
ce qui équivaut après simplification à $\boxed{x^2 + 2x - 1 = 0}$.
2. On résout l'équation polynomiale de degré 2. On trouve :
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$
Mais puisqu'on sait que $x \geqslant 0$ on a $\boxed{x = \sqrt{2} - 1}$.
3. De même si on pose $y = \tan(\pi/12)$ on a
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pi/6) = \frac{2y}{1 - y^2}$$
d'où $y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0$. Ainsi $y = -\sqrt{3} \pm 2$. Mais puisqu'on sait que $y \geqslant 0$ on a $\boxed{y = 2 - \sqrt{3}}$.

5.2 Formules trigonométriques

Exercice 4 | ●○○ [Lou-Anne CH – Louis DU]

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :
$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b).\sin(a - b).$$

Solution (exercice 4)

Formules d'addition à droite puis théorème de Pyth.

Exercice 5 | ●○○

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Exprimer :

1. $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$,
2. $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a), \tan(b)$ et $\tan(c)$. *On supposera choisis a, b, c de sorte que toutes les quantités soient bien définies.*

Exercice 6 | ●○○

1. Pour quelles valeurs de x l'expression $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs de x, simplifier $f(x)$.

Exercice 7 | ●●● Somme trigonométrique

Soit $x \neq 0 \ [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer par récurrence que :
$$\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Solution (exercice 7)

Si on note : $S_n = \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$, alors on a $S_{n+1} = S_n + \sin((n+1)x)$. Un récurrence simple suffira donc.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a : $\dfrac{\sin\left(\frac{2x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin x$. La propriété est initialisée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé tel que : $S_n = \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Montrons que : $S_{n+1} = \dfrac{\sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \sin((n+1)x) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin((n+1)x) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin((n+1)x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sin(y) = 2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$

Or, une formule de trigonométrie donne :
$$2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{(n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{(n+1)x}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Dès lors, en remplaçant dans l'expression précédente, on a bien :

$$S_{n+1} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\left[\cancel{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)} + \sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

La propriété est donc héréditaire, par principe de récurrence on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

Exercice 8 | ●●● Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ fois le nombre } 2}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ fois le nombre } 2}.$$

5.3 Équations & Inéquations

Exercice 9 | ●○○ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$

3. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$ **4.** $\tan(2x) = -\sqrt{3}$.

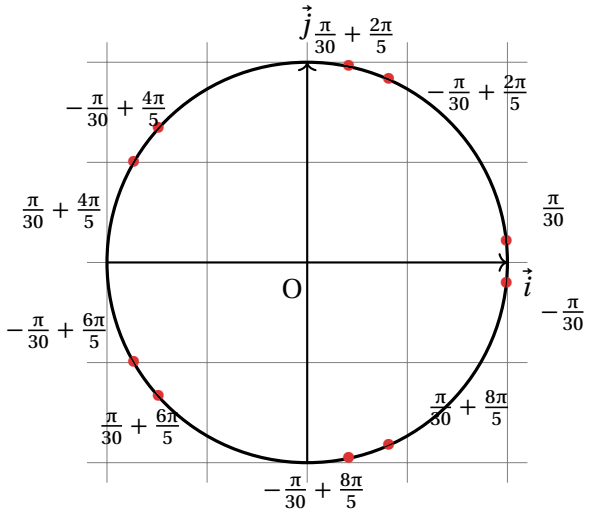
Solution (exercice 9) Il s'agit dans cet exercice d'égalités trigonométriques fondamentales que l'on résout donc en appliquant la méthode du cours.

1. L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

On obtient donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$



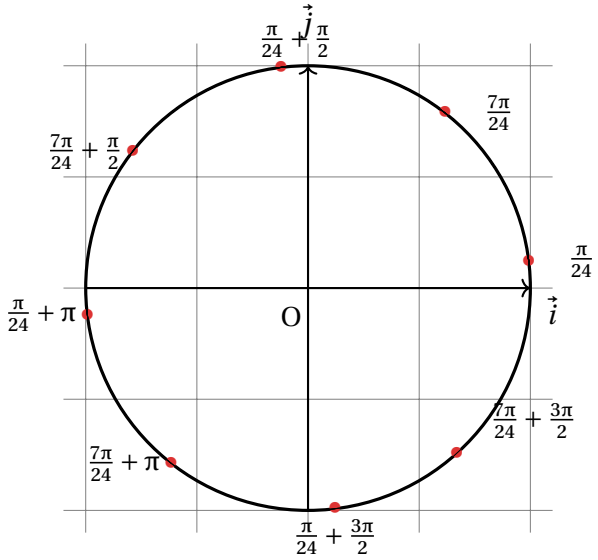
Pour savoir combien de points tracer sur le cercle pour chaque ensemble de solutions, on cherche la première valeur de k pour laquelle on retombe sur la solution de départ modulo 2π. Par exemple, pour le premier ensemble de solution, on cherche k tel que $\frac{2k\pi}{5} = 2\pi$, soit $k = 5$: on doit donc tracer 5 points sur le cercle trigonométrique. Même chose pour le deuxième ensemble de solutions.

2. L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\sin(4x) = -\frac{1}{2} \iff \sin(4x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



On remarque ici qu'il faut tracer 4 points pour chaque ensemble de solutions : en effet, on doit chercher k tel que $\frac{k\pi}{2} = 2\pi$, soit $k = 4$.

3. L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 &\iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.\end{aligned}$$

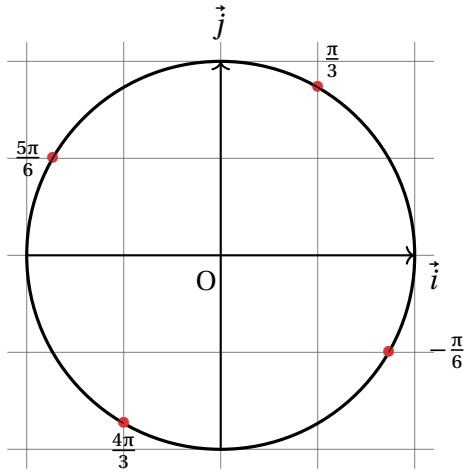
Donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

4. L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan(2x) = -\sqrt{3} &\iff \tan(2x) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.\end{aligned}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}.$$

Donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$



Exercice 10 | ●○○ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2} = 0$,

2. $3\tan^2(x) - 4\sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$,

3. **3.1)** Chercher a, b, c de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

3.2) Résoudre $2\cos^3(x) - \sin^2(x) - 2\cos(x) = 0$.

4. $\sin x + \dfrac{1}{4\cos x} = 0$.

Solution (exercice 10)

1. À l'aide d'une transformation de Fresnel, on a :

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2} = 0 &\iff 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}\\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\end{aligned}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi.$$

Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right\}}$.

2. On résout l'équation sur $\mathscr{D}_{\tan}$. On a :

$$3\tan^2(x) - 4\sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$$

$$\iff X = \tan(x) \text{ et } 3X^2 - 4\sqrt{3}X + 3 = 0.$$

Résolvons l'équation $3X^2 - 4\sqrt{3}X + 3 = 0$. Un calcul de discriminant fournit les deux solutions : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$. Ainsi :

$$3\tan^2(x) - 4\sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$$

$$\iff \tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \ \underline{\textbf{ou}}\ \tan(x) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi ; \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}}$.

3. **3.1)** On a après développement puis identification :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x-1)\left(2x^2 + 3x + 1\right)}.$$

3.2) On a : $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc

$$2\cos^3(x) - \sin^2(x) - 2\cos(x) = 0$$

$$\iff 2\cos^3(x) + \cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$$

$$\iff x = \cos(x) \text{ et } 2X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0.$$

Résolvons l'équation $2X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0$. D'après la question précédente, on $2X^3 + X^2 - 2X - 1 = (X-1)\left(2X^2 + 3X + 1\right)$ donc (après résolution de l'équation $2X^2 + 3X + 1 = 0$), on obtient que :

$$2X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0 \iff X = 1 \ \underline{\textbf{ou}}\ X = -1 \ \underline{\textbf{ou}}\ X = -\frac{1}{2}.$$

On a alors que :

$$2\cos^3(x) - \sin^2(x) - 2\cos(x) = 0$$

$$\iff \cos(x) = 1 \ \underline{\textbf{ou}}\ \cos(x) = -1 \ \underline{\textbf{ou}}\ \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}}$.

4. à faire.

Exercice 11 | ●○○ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos x - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{4}\right).$$

Exercice 12 | ●●○ [Thomas DA – Antoine DE] Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos(x) - \cos(3x) + \cos(5x) = 0.$$

Exercice 13 | ●○○ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et $[-\pi, \pi[$:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1$

2. $\sin(3x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\sqrt{2}\cos(3x) \leqslant 1$

4. $\tan(x) \leqslant 1$

Solution (exercice 13)

1. On se ramène à une inéquation fondamentale :

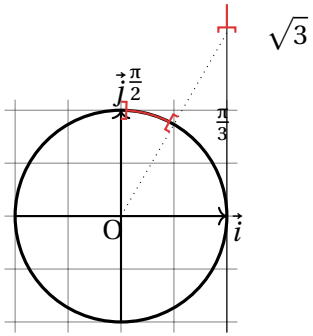
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1 \iff \tan(3x) > \sqrt{3} \quad (\star)$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$(\star) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{3} + k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

On obtient : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right[}$.



On refait alors un autre cercle trigonométrique (à faire) afin de placer les

angles solutions et on obtient, en prenant $k \in [\![0\,,\,5]\!]$:

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[\tfrac{\pi}{9}, \tfrac{\pi}{6}\right] \cup \left]\tfrac{4\pi}{9}, \tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\tfrac{7\pi}{9}, \tfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left]\tfrac{10\pi}{9}, \tfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\tfrac{13\pi}{9}, \tfrac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\tfrac{16\pi}{9}, \tfrac{11\pi}{6}\right].}$$

Enfin, on a :

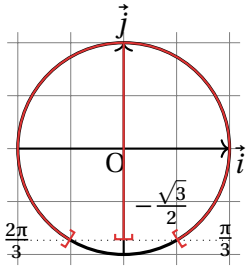
$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\tfrac{8\pi}{9}, -\tfrac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\tfrac{5\pi}{9}, -\tfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\tfrac{\pi}{3}, -\tfrac{\pi}{6}\right[\cup \left[\tfrac{\pi}{9}, \tfrac{\pi}{6}\right] \cup \left]\tfrac{4\pi}{9}, \tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left]\tfrac{7\pi}{9}, \tfrac{5\pi}{6}\right[.}$$

2. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$$\begin{aligned}
&\sin(3x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\iff &\exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\
\iff &\exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right].}$$



On fait un cercle trigonométrique pour placer les solutions, et on obtient, en prenant $k \in [\![0\,,\,2]\!]$:

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9}, 2\pi\right].}$$

Et finalement :

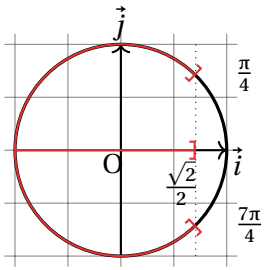
$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{8\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \pi\right].}$$

3. On a : $\sqrt{2}\cos(3x) \leqslant 1 \iff \cos(3x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant 3x \leqslant \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right].}$$



Afin de donner les solutions dans $[0, 2\pi[$ et dans $[-\pi, \pi]$, on représente les solutions sur un cercle trigonométrique en prenant $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right].}$$

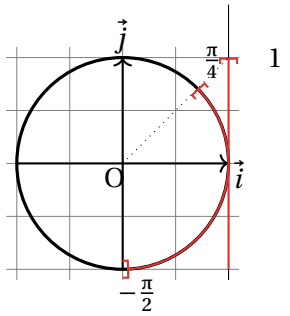
Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{9\pi}{12}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \pi\right].}$$

4. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$$\tan(x) \leqslant 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

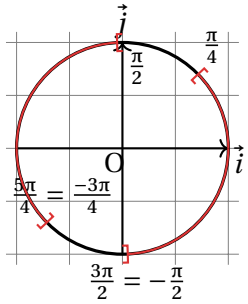
On obtient : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]}$.



Attention, les solutions pour la tangente sont définies modulo π, et non 2π. Il y a donc deux intervalles solutions à tracer sur le cercle trigonométrique.

On a donc : $\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}$. Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right].}$$


$\vec{j}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
O
$\vec{i}$
$\frac{3\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

II

Deuxième partie

Analyse