

Programme de colles

du 28 au 2/10/2026

- Cette semaine : 2 questions par étudiant(e) à choisir dans la liste (*aux colleurs : mixer les thèmes si possible...*)
- Cette semaine, pour ne pas trop charger la barque, **uniquement des sommes simples (sans binôme) et produits simples en exercices**. Pas encore de formule du binôme et de sommes doubles (hors questions de cours). Les questions de cours en revanche porteront sur l'ensemble du chapitre.

1 LOGIQUE, ENSEMBLES & RAISONNEMENTS



! Attention

- On évitera tout exercice théorique de logique, on contrôlera les notions plutôt *via* les techniques de raisonnements.
- Rien pour le moment sur les fonctions & application à part la définition. Elles ont été vues uniquement pour la définition d'une famille. Un chapitre ultérieur viendra compléter ces notions plus tard.
- Sur les ensembles : pas de notion de partition encore, cela sera vu plus tard en dénombrement.
- **Logique élémentaire.** Proposition logique, équivalence. Objet python `bool`. Quantificateurs. Opérations logiques **ou**, **et**, **non** sur les propositions. Négation de propositions avec quantificateurs. Implication, négation d'une implication, contraposée, transitivité et cycles d'implications.
- **Ensembles.** Définition intuitive, ensembles d'entiers, inclusion, égalité. Ensembles usuels dans $\mathbb{R}$. Intervalles. Ensemble des parties. Opérations sur les ensembles, parties disjointes. Complémentaire. Produit cartésien.
- **Fonctions & Applications.** Définition, égalité. Familles indexées par un ensemble. Généralisation de l'intersection/réunion aux familles de parties, généralisation des propriétés (MORGAN, distributivité, ...).

- **Raisonnements.** Sur l'existence/unicité de propositions. Sur les ensembles. Disjonction de cas. Sur les liens logiques entre propositions, raisonnement par l'absurde. Raisonnements par récurrence. Raisonnement par analyse-synthèse.

2 CALCULS AVEC LES RÉELS



! Attention

- Les puissances x^α avec α non entier n'ont pas encore été vues, nous n'avons pas encore revu la forme exponentielle des puissances entières. On évitera donc pour le moment les équations / inéquations faisant intervenir ce type de puissance.
- Ne sont **pas** encore au programme : majorant, minorant, borne inf/sup, cela fera l'objet d'un futur chapitre de compléments sur les réels. Seuls les aspects purement calculs pour le moment.

- **Généralités.** Addition / Multiplication, règles de calcul.
- **Égalités & Inégalités.** Inégalité, minimum maximum de deux réels. Manipulation d'encadrements. Effet d'une fonction monotone et strictement monotone sur un encadrement.
- **Fractions, puissances, racines.** Nombres décimaux et rationnels. Puissances entières d'un réel, identités remarquables. Encadrements et puissances. Racines carrées et cubiques, et effets sur un encadrement. Propriétés des racines. Valeur absolue et distance entre deux réels. Inégalité triangulaire. Écriture d'intervalles à l'aide de la valeur absolue.
- **Résolution d'équations & inéquations.** Aspect logique : travail par équivalences ou par implications (élimination de « solutions parasites »). Techniques propres aux : produits, quotients, second degré et généralisation aux ordres supérieurs lorsqu'une racine évidente est connue, transformations exponentielles et logarithmiques, avec racines et valeurs absolues, par études de fonctions.

3 TRIGONOMETRIE



Attention

- Les formules $\cos(a)\cos(b)$ (et consorts), $\cos(p) + \cos(q)$ (et consorts) ne sont pas exigibles par cœur des étudiants, les étudiant(e)s doivent savoir les retrouver **rapidement**.
- $\cos, \sin, \tan$ n'ont pas encore été étudiées en tant que fonction. Ce sera fait dans un prochain chapitre.
- **[Congruences]** Définition et propriétés de la relation de congruence modulo (encore notée avec un signe d'égalité).
- **[Généralités]** Définition de $\cos, \sin, \tan$ à l'aide du cercle trigonométrique. Premières propriétés (périodicité et parité), relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Valeurs remarquables.
- **[Formules trigonométriques]** Angles associés. Formules d'addition, de duplication et de linéarisation. Formules de duplication en fonction de la tangente (ou « formule de tangente de l'angle moitié »). Transformation de combinaisons linéaires trigonométriques en un seul terme trigonométrique.
- **[Équations et inéquations trigonométriques]** Équations à l'aide d'un théorème (que l'on peut retrouver graphiquement) et inéquations à l'aide d'un desin. Majoration $|\sin(x)| \leq |x|$ démontrée *via* des considérations géométriques.

4

CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS



- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de BERNOULLI « $a^{n+1} - b^{n+1}$ ». Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, PASCAL. Triangle de PASCAL, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.
- **Sommes doubles.** Sommes doubles libres, cas des indices séparables : définition et calcul. Sommes doubles sous contrainte $i \leq j$ et contrainte $i < j$: définition, théorème de permutation et calculs.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soient A, B deux parties d'un ensemble E . Définir proprement (avec accolades!) les ensembles $A \cup B, A \cap B$, puis démontrer les lois de MORGAN (complémentaire d'une union et d'une intersection).
2. Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3. Définir la valeur absolue et citer l'inégalité triangulaire (majorant, minorant et cas d'égalité). Démontrer le majorant.
4. Rappeler et démontrer les relations coefficients/racines pour un trinôme dans le cas $\Delta > 0$. En déduire les solutions de $x^2 - 2026x - 2027 = 0$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
6. Résoudre l'équation : $x = \sqrt{x+2}$ par analyse-synthèse d'une part, et par disjonction de cas d'autre part. (Note aux élèves : vous trouverez la réponse à cette question dans deux chapitres différents...)
7. Donner deux valeurs remarquables de $\cos, \sin$ ou $\tan$ (choisies par l'examineur), deux formules d'angles associés et deux formules de trigonométries choisies par l'examineur parmi : $\cos(x \pm y), \sin(x \pm y)$, duplication.
8. Rappeler les formules d'addition nécessaires pour établir les formules ci-dessous :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a)\cos(b) = \dots, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \sin(p) - \sin(q) = \dots$$
 puis les établir.
9. Résoudre, selon deux méthodes : $\sin x = \cos x$.
10. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.
11. Donner une formule en fonction de n pour $S_n = \sum_{k=0}^n k, n \geq 0$. La démontrer à l'aide d'un changement d'indice par retournement.
12. Donner une formule en fonction de n pour $T_n = \sum_{k=0}^n k^2, n \geq 0$. La démontrer par récurrence.
13. Soient n, p deux entiers tels que $n \geq p$. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^n (a_{k+2} - a_k)$ à l'aide d'un changement d'indice.
14. Énoncer et démontrer l'identité de BERNOULLI $a^{n+1} - b^{n+1}$.
15. Énoncer la formule du binôme et expliquer les valeurs de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$.

À venir : les nombres complexes.