

Chapitre (ALG) 5 Nombres Complexes

- 1 Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique
- 2 Forme exponentielle
- 3 Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$
- 4 Application des nombres complexes en trigonométrie
- 5 Application des nombres complexes à la géométrie
- 6 Exercices

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de définir un nouvel ensemble $\mathbb{C}$ permettant de faciliter les calculs de trigonométrie par exemple.

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XV ième siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de CARDAN, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle « sophistiqué ». C'est Raphaël BOMBELLI qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors « impossibles » avant de leur donner le nom d'imaginaires.

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1 DÉFINITION DE $\mathbb{C}$ ET FORME ALGÈBRE

Les nombres réels, comme leur nom l'indique, sont issus du « monde réel ». Par exemple les entiers servent à compter des unités, les nombres décimaux et fractionnaires généralisent ce principe. Pour les irrationnels : par exemple $\sqrt{2}$ correspond à la longueur de la diagonale d'un carré de longueur de côté 1, π à l'aire du disque de rayon 1... bref, toutes ces quantités ont une interprétation.

L'introduction de nombres dits « complexes » comme dans la prochaine définition a été motivée par plusieurs problèmes.

- **La résolution de certaines équations** n'admettant pas, *a priori*, de solutions réelles, comme par exemple

$$x^2 + 1 = 0. \quad (\text{Eq Defi i})$$

En effet, x^2 ne peut jamais être égal à -1 . Même si elle n'admet pas de solution réelle, on peut en fait définir un ensemble contenant $\mathbb{R}$, et noté $\mathbb{C}$, dans lequel cette équation admet deux solutions notées i et $-i$. Cet ensemble sera construit exprès pour cela.

- **En géométrie du plan.** Si les réels représentent l'ensemble de la droite réelle, alors les nombres complexes définis plus bas correspondent au plan. On peut considérer les nombres complexes comme une façon synthétique d'écrire l'abscisse et l'ordonnée de chaque point du plan. Au lieu de travailler avec un couple de réels (x, y) , on utilise la notation $x + i y$. Le nombre imaginaire i sert à identifier l'ordonnée. L'avantage d'une telle notation est qu'elle va simplifier les manipulations géométriques car elle combine deux informations (abscisse et ordonnée) en un seul nombre.
- **En trigonométrie,** au travers de l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, que nous définirons en fin de chapitre. Les nombres complexes s'invitent alors dans d'autres sciences, notamment en Physique où les physiciens trouvèrent là encore les complexes comme commodes pour manipuler des signaux périodiques (en électricité notamment).

Définition/Proposition 1 | Définition d'un nombre complexe

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) dont les éléments sont appelés les *nombres complexes*, et muni de deux opérations d'addition $+$ et de multiplication $\times$, qui satisfont les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient un élément i pour lequel : $i^2 = -1$.
- **[Forme algébrique]** Si $z \in \mathbb{C}$, alors z peut être écrit de manière unique sous une forme dite *algébrique* : $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
On appellera :
 - ◊ *partie réelle* de z le réel x noté $\text{Re}(z)$,
 - ◊ *partie imaginaire* de z le réel y noté $\text{Im}(z)$.
 - ◊ Si $x = 0$, on dit que z est *imaginaire pur* (ensemble noté $i\mathbb{R}$).
 - ◊ Si $y = 0$, $z = x \in \mathbb{R}$.
- Les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$ sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans $\mathbb{R}$: pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$,
 - ◊ **[Associativité de $+$]** $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
 - ◊ **[Associativité de $\times$]** $(zz')z'' = z(z'z'')$.
 - ◊ **[Commutativité]** $z + z' = z' + z$, $z \times z' = z' \times z$.
 - ◊ **[Distributivité]** $z(z' + z'') = (zz') + (zz'')$.
 - ◊ **[Neutres]** $z + 0 = 0 + z = z$, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

L'existence de $\mathbb{C}$ est admise, des éléments de réponses sont néanmoins donnés ci-après. Même si nous n'insisterons pas trop là-dessus : il ne suffit pas de prétendre son existence pour qu'il existe, *i.e.* la phrase « soit $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ et possédant un élément i tel que $i^2 = -1$ » n'a aucune légitimité mathématique. Pour définir proprement $\mathbb{C}$, on part d'un ensemble déjà connu, $\mathbb{R}$ en l'occurrence (mais attention, cet ensemble aussi on ne vous l'a jamais construit!) et on en définit un autre possédant les propriétés souhaitées, c'est le propos de la prochaine preuve.

Preuve (Éléments sur la construction de $\mathbb{C}$ [H.P]) Rappelons que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, c'est un ensemble bien défini que nous pouvons utiliser pour construire $\mathbb{C}$. Alors on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+$ et $\times$ suivantes :

1. **[Somme de nombres complexes]**
 $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
2. **[Produit de nombres complexes]**
 $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

Note Les coordonnées du couple correspondent aux parties réelles et imaginaires de $(x + iy)(x' + iy')$ avec la règle de calcul $i^2 = -1$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont plutôt représentés de la manière suivante : l'élément (x, y) est noté $x + iy$, et les propriétés précédentes deviennent :

1. **[Somme de nombres complexes]**
 $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$,
2. **[Produit de nombres complexes]**
 $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$,

impliquant en particulier que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ en faisant $y = 1, y' = 1, x = 0$ et $x' = 0$, c'est-à-dire en notation complexe $i^2 = -1$. On a donc construit un élément noté i et un ensemble $\mathbb{C}$, où cet élément i est une solution dans $\mathbb{C}$ de $x^2 + 1 = 0$. C'est ce qu'on voulait. Notons également que l'écriture $z = x + iy$ d'un élément $z \in \mathbb{C}$ est bien unique puisque deux couples sont uniques si et seulement s'ils ont même abscisse et même ordonnée.

Reformulons l'unicité de l'écriture algébrique (très importante en pratique) sous forme d'une proposition indépendante.

Proposition 1 | Unicité de la forme algébrique

Soient $z = x + iy, z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

On dit que l'on peut *identifier* partie réelle et partie imaginaire dans l'écriture algébrique. Les propriétés de la Définition/Proposition 1 permettent de faire toute sorte de calculs, qui sont donc identiques à ceux menés dans $\mathbb{R}$ mais en tenant compte de la relation $i^2 = -1$. Voici quelques exemples.

Exemple 1 Déterminer la forme algébrique des complexes ci-dessous.

1. $z_1 = 3 - 2i + 2 + 5i$,



2. $z_2 = (3 - 2i)(2 + 5i)$,



3. $z_3 = (\sqrt{3} - i)^2$,



4. $z_4 = (1 - i)^2$.



Nous définissons aussi un complexe particulier qui apparaît souvent, et dont il faut connaître l'expression.

Σ Notation Complexe j

On note généralement $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Comme nous l'avons déjà dit en introduction, les complexes permettent de résoudre certaines équations dans un ensemble que nous avons créé de toute pièce pour l'occasion. Une étape clé pour cela est de pouvoir factoriser des expressions dans $\mathbb{C}$, qui ne l'était pas dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2 | Identités « $a^2 \pm b^2$ »

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Alors :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib).$$

Preuve La première a déjà été prouvée, passons à la seconde.



1.2 Affixe et interprétation géométrique

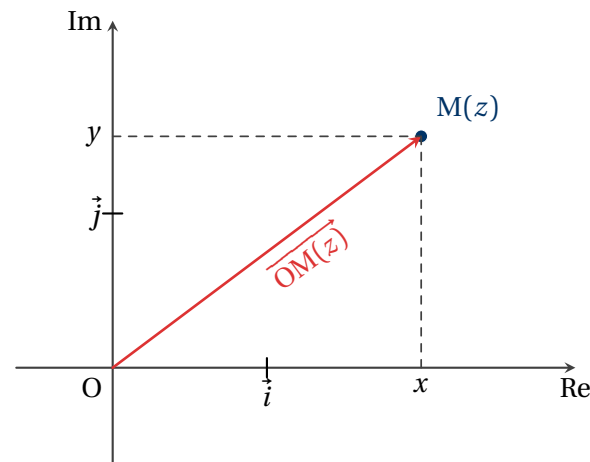
Rappelons que : $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est l'ensemble des points géométriques du plan, ou l'ensemble des vecteurs du plan. Ils possèdent une abscisse et une ordonnée. Un complexe a quant à lui également deux paramètres : sa partie réelle et sa partie imaginaire. Cela nous mène tout droit à la définition suivante.

Par construction, nous allons voir que l'ensemble $\mathbb{C}$ s'identifie au plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À chaque point et vecteur du plan on associe de manière unique un couple de coordonnées (x, y) exprimées dans ce repère.

Définition 1 | Affixe

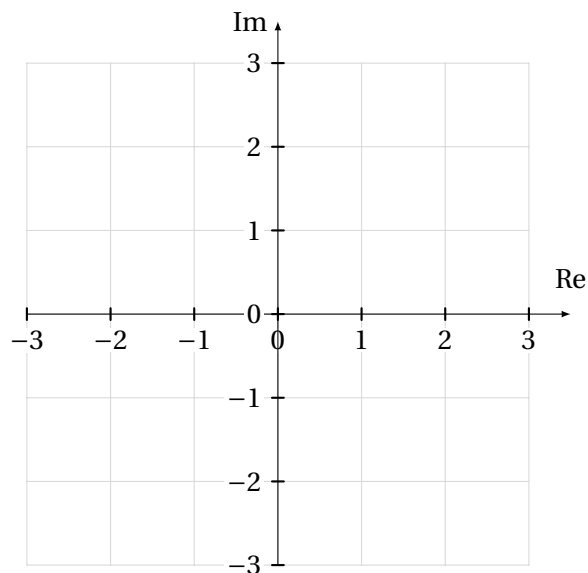
Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Étant donné un nombre complexe $z = x + iy$, on appelle :
 - ◇ *point image de z* le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On le note souvent $M(z)$,
 - ◇ *vecteur image de z* le vecteur $\vec{v}(z) = \overrightarrow{OM(z)}$, d'origine O et de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- On dit alors que z est l'*affixe* du point M (ou du vecteur $\vec{v}(z)$).



La notion d'affixe permet donc de relier la géométrie du plan dans $\mathbb{R}^2$ aux complexes.

Exemple 2 Soient $z = 2 + i$ et $z' = 1 - 2i$. Représenter sur la figure ci-contre $M(z)$, $M'(z')$, $N(z + z')$, $P(-z)$.



1.3 Conjugué & Module

Le complexe conjugué est un complexe qui interviendra souvent, nous le formalisons donc dans une notation.

Définition 2 | Conjugué

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle *conjugué de* $z = x + iy$ le complexe $\bar{z} = x - iy$.

Exemple 3 Calculer les conjugués de z_1, z_2, z_3, z_4 .

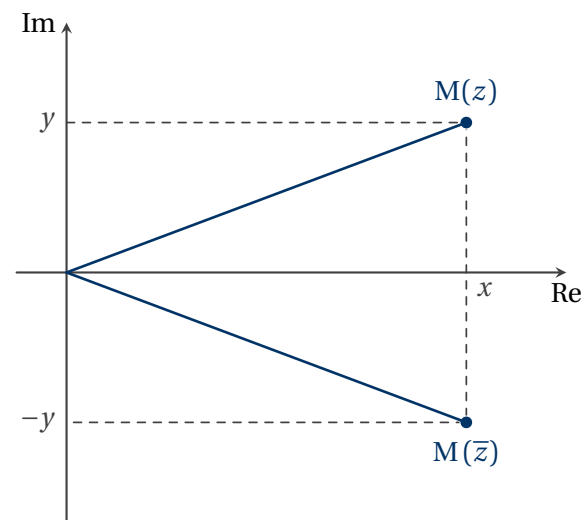


Exemple 4 Sur la figure précédente, ajouter le point $M_1(\bar{z})$.

Exemple 5 Calculer j^2 et l'exprimer en fonction de $\bar{j}$.



Remarque 1 (Interprétation géométrique du conjugué) Le conjugué de z est $x - iy$, il correspond au symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) .



Pour terminer cette section de généralités, on introduit la notion de module, analogue de la valeur absolue pour les réels. Nous l'interpréterons géométriquement un peu plus tard.

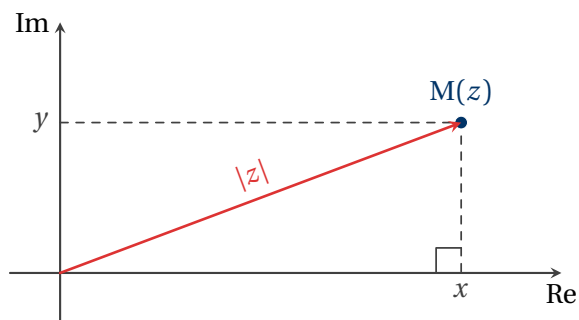
Définition 3 | Module

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle *module* de z le réel positif noté $|z|$, et défini par :

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, on retrouve la valeur absolue : si $z = x \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Remarque 2 (Interprétation géométrique du module) Le module de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est, rappelons-le, défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il correspond, d'après le théorème de PYTHAGORE, à la distance entre O et $M(z)$ notée $d(O, M(z))$.



Exemple 6 Calculer les modules de z_1, z_2, z_3, z_4 .



LIEN MODULE/CONJUGUÉ. Le problème de la définition précédente est qu'elle nécessite de connaître la forme algébrique du complexe afin de pouvoir calculer son module. Une autre expression est celle présentée ci-après, elle fait intervenir le conjugué qui possède tout un tas de propriétés permettant de gagner en rapidité dans les calculs. Nous profiterons également dans la suite de cette propriété pour déduire des propriétés sur le module à l'aide de celles déjà établies sur le conjugué.

Proposition 3 | Lien module/conjugué

Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z\bar{z}$ est un réel positif, et on a : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Preuve Notons $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$. Alors :

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$. En passant à la racine, on déduit la formule $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Attention Des complexes ne se comparent pas

Nous savons toujours comparer deux réels, en revanche, il n'existe pas de moyen simple de comparer deux complexes ! On n'écrira donc **jamais** 😡 des choses du type « $z \leq z'$ » avec z, z' deux complexes.

Plus précisément, on ne peut pas définir sur $\mathbb{C}$ de relation d'ordre qui prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{R}$. En effet, supposons qu'une telle relation d'ordre existe. Alors le complexe i est soit positif, soit négatif.

- Si on suppose $i \geq 0$ alors $i \times i \geq 0$, donc $-1 \geq 0$, ce qui est absurde.
- Si on suppose $i \leq 0$ alors $i \times i \geq 0$ également (en multipliant par un nombre négatif, on modifie le sens de l'inégalité), donc $-1 \geq 0$, ce qui est également absurde.

1.4 Propriétés

Exemple 7 (Technique de l'expression conjuguée (motivation))

- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$. On souhaite définir le complexe $z' = \frac{1}{z}$, c'est-à-dire définir la forme algébrique de z' vérifiant : $zz' = z'z = 1$.
- Pour deviner ladite forme algébrique, on utilise la technique de l'« expression conjuguée », c'est-à-dire on multiplie la fraction $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$ par $\bar{z} = x - iy$. On constate que cette technique fait alors apparaître un **nombre réel au dénominateur**.



Proposition 4 | Parties réelles, imaginaires, conjugué

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

- **[Existence d'un élément inverse]** Si $z \neq 0$, alors z est inversible dans $\mathbb{C}$ c'est-à-dire : $\exists z' \in \mathbb{C}$, $zz' = z'z = 1$.
Plus précisément, z' est donné par : $z' = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. On le note en général $\frac{1}{z}$ ou encore z^{-1} . (vous ne devez pas apprendre par coeur la formule $z' = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, mais la retrouver au cas par cas à l'aide de la technique de l'expression conjuguée)
- **[$\mathbb{R}$ -linéarité de la partie réelle/imaginaire]**
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \text{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \text{Re } z + \mu \text{Re } z',$
 $\text{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \text{Im } z + \mu \text{Im } z'.$

- **[Conjugué et somme/produit/quotient]**

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}, \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}. \quad \text{Si de plus } z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

- **[Involutivité]** $\overline{\overline{z}} = z.$

Attention

Il est **faux** de dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

Pour une raison très pragmatique déjà : une telle formule ne peut être vraie car une partie réelle ou imaginaire est un nombre réel.

Preuve On notera $z = x + iy, z' = x' + iy'$ dans toute cette preuve.

- On vérifie simplement que l'expression de $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ trouvée dans l'exemple précédent convient :



- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda z + \mu z' = \lambda(x + iy) + \mu(x' + iy') = (\lambda x + \mu x') + i(\lambda y + \mu y').$$

On tire alors directement les formules :

$$\operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re} z + \mu \operatorname{Re} z', \quad \operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im} z + \mu \operatorname{Im} z'.$$

- On a :

$$z + z' = x + x' + i(y + y'), \quad z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

Donc :

$$\overline{z + z'} = x + x' - i(y + y'), \quad \overline{z \times z'} = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

On vérifie alors sans difficulté que :

$$\overline{z + z'} = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{z \times z'} = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

La formule de conjugaison de z^n s'en déduit alors par récurrence évidente. Pour λz , on écrit simplement $\lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$, donc $\overline{\lambda z} = \lambda x - i(\lambda y) = \lambda x + i(-\lambda y)$, d'où l'on tire la formule. Enfin, reste à calculer le conjugué d'un quotient, pour cela il suffit d'établir que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, il suffira ensuite d'utiliser le conjugué d'un produit pour conclure.

Rappelons que $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$, donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$. D'autre part, on vérifie sans peine que $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$ en utilisant la technique de l'expression conjuguée.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$

Dans la preuve précédente on a utilisé une technique classique pour obtenir l'inverse d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On peut la résumer comme suit.

Méthode (ALG) 5.1 (Quotient sous forme algébrique : expression conjuguée) Pour deux réels $x, y \in \mathbb{R}$, et $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} + i \left(\frac{-y}{|z|^2} \right).$$

Il faut parfaitement savoir appliquer cette méthode sur des exemples.

Exemple 8 (Forme algébrique d'un quotient) Calculer la forme algébrique des complexes ci-après. On note $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un complexe quelconque.

1. $z_5 = \frac{1-i}{2+3i},$



2. $z_6 = \frac{1}{(4-i)(3+2i)},$



3. $z_7 = \frac{z^2}{z+i},$



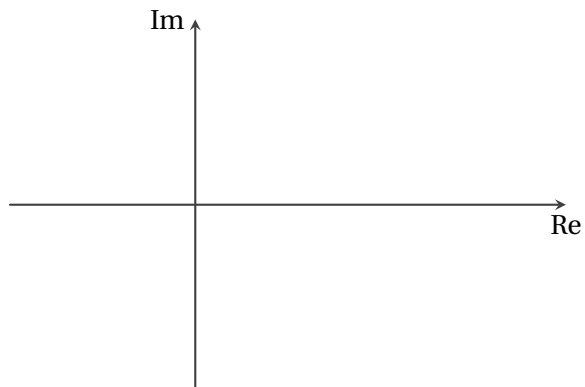
Proposition 5 | Caractérisation des réels/imaginaires purs

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes.

- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z).$
- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z, \quad z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z.$



Remarque 3 (Interprétation géométrique) Interprétons géométriquement les formules de la proposition précédente.



Preuve



Proposition 6 | Module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- **[Séparation]** $|z| = 0 \iff z = 0$.
- **[Symétrie]** $|-z| = |z|, \quad |\bar{z}| = |z|$.
- **[Produit/quotient]** $|z \times z'| = |z| \times |z'|$. De plus si $z' \neq 0$, alors :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

- **[Développement du module au carré]**

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \bar{z}') + |z'|^2.$$

- **[Majoration partie réelle / imaginaire]**

$$\underbrace{|\operatorname{Re} z|}_{\text{valeur absolue}} \leq \underbrace{|z|}_{\text{module}}, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Preuve



Les propriétés du module sont similaires à celles déjà établies dans le **Chapitre (ALG) 2** concernant la valeur absolue, à l'exception des propriétés concernant les majorations. Car rappelons le, on ne peut comparer deux nombres complexes.



La formule de développement du carré du module d'une somme est très importante en pratique.

Méthode (ALG) 5.2 (Développement d'une norme de somme au carré) Soit $|z + z'|^2$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Écrire la quantité en fonction du conjugué : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'})$.
2. Développer.

! Attention

On oublie la formule *archi-fausse* suivante :

$$|z + z'|^2 \neq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|.$$

Exercice 1 (Identité du parallélogramme) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
2. Interprétez géométriquement cette formule.

Théorème 1 | Inégalité triangulaire

- Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors : $||z| - |z'||| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Note

La majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.

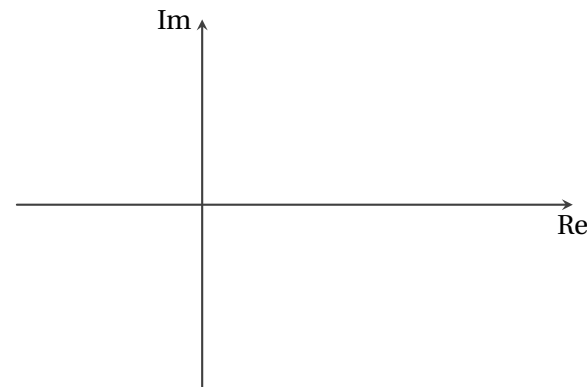
- **[Égalité]** En outre, on sait caractériser les cas d'égalité :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad z = \lambda z' \quad \text{ou} \quad z' = \lambda z,$$

$$||z| - |z'||| = |z + z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_-, \quad z = \lambda z' \quad \text{ou} \quad z' = \lambda z.$$

On dit alors que z, z' sont **positivement** ou **négativement** liés.

Remarque 4 (Interprétation géométrique) Interprétons géométriquement l'inégalité triangulaire.



Comme dans le cas de la valeur absolue, la majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.

Preuve

- $\diamond$ Commençons par montrer que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Les quantités étant positives, nous allons montrer que l'inégalité élevée au carré est vraie.



- ◇ On montre ensuite : $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$.
 $||z| - |z'||^2 = |z|^2 - 2|z| \times |z'| + |z'|^2 = |z|^2 - 2|zz'| + |z'|^2$.
 Or $|\operatorname{Re}(zz')| \leq |zz'|$, d'où $-|zz'| \leq \operatorname{Re}(zz') \leq |zz'|$ et en particulier $-2|zz'| \leq \operatorname{Re}(zz')$. On déduit alors :
 $|z + z'|^2 \geq ||z| - |z'||^2$.
 Par stricte croissance de la racine, on obtient en passant à la racine :
 $|z + z'| \geq ||z| - |z'||$.

- Montrons par exemple le 1er cas d'égalité, le second se traite de la même manière. D'après la preuve précédente, on a :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \operatorname{Re}(z\overline{z'}) = |zz'| = |z\overline{z'}|.$$

Il s'agit donc de prouver désormais que :

$$\operatorname{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad z = \lambda z' \quad \text{ou} \quad z' = \lambda z.$$



COMPLEXES DE MODULE 1. Les complexes de module 1, c'est-à-dire situés à distance 1 de O, jouissent de propriétés intéressantes, les voici.

Définition 4 | Complexes de module 1

On appelle *ensemble des complexes de module 1* l'ensemble $\mathbb{U}$ défini par :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Proposition 7 | Propriétés des complexes de module 1

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. Alors :

- **[Stabilité]** $zz' \in \mathbb{U}, \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{U},$
- **[Inverse]** $\frac{1}{z} = \overline{z}.$

Preuve



Rappelons la définition du cercle trigonométrique.

Définition 5 | Cercle trigonométrique

- Le *cercle trigonométrique* est le cercle du plan de rayon 1 et de centre O.
- Plus précisément, il s'agit de : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$

Un lien fort existe avec $\mathbb{U}$: les points de $\mathcal{C}$ sont, par définition même de cos, sin, les points d'affixe un élément de $\mathbb{U}$.

2 FORME EXPONENTIELLE

Nous avons vu que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ très proches et s'identifient. De la même manière qu'un point de $\mathbb{R}^2$ peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes et polaires, un complexe peut être écrit en forme algébrique ou comme nous allons le voir de suite sous *forme trigonométrique*.

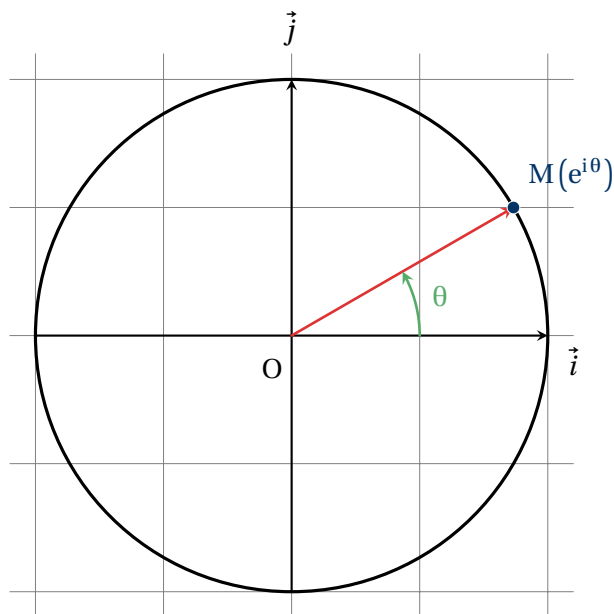
2.1 Exponentielle imaginaire

Avant de discuter de la forme trigonométrique des complexes, nous allons avoir besoin de présenter un complexe particulier : l'exponentielle imaginaire.

Définition 6 | Nombre complexe $e^{i\theta}$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle imaginaire* de $\theta \in \mathbb{R}$, notée $e^{i\theta}$, le nombre complexe de forme algébrique :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$



Exemple 9

- Calculer la forme algébrique de $z_9 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

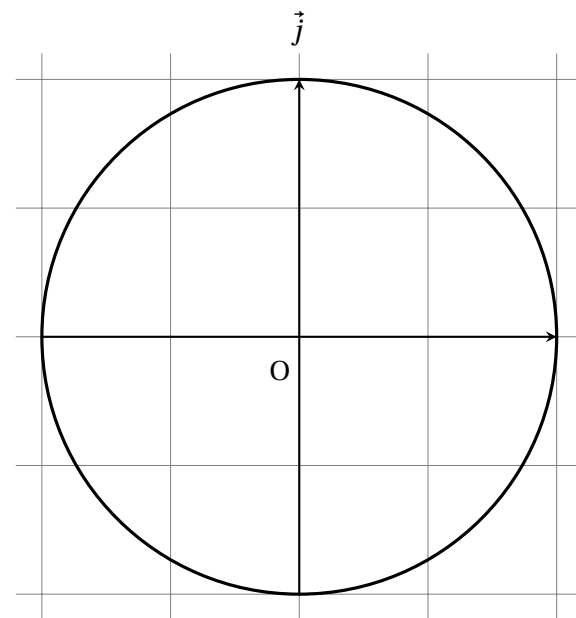


- On a : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



Exemple 10 Placer sur le cercle trigonométrique les points d'affixes suivantes :

$$z_1 = e^{i0}, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$



Proposition 8 | Lien avec le cercle trigonométrique

Notons $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ le cercle trigonométrique. Alors :

$$\mathcal{C} = \{M(z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{U}\} = \{M(e^{i\theta}) \mid \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Preuve (Point clef — Définition de $\sin, \cos$)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors $|z| = 1$ donc $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, c'est-à-dire $M(x, y)$ est un point du cercle trigonométrique. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta.$$

Du côté de z , nous avons alors : $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$.

Pour l'instant, $e^{i\theta}$ n'est donc qu'une notation ! Les propriétés de cette notation, qui permettront d'effectuer des calculs, sont données dans la proposition suivante. Mais si l'on utilise une notation exponentielle c'est qu'elle va sûrement hériter des mêmes propriétés que l'exponentielle réelle connue depuis le lycée. Les voici.

Proposition 9 | Propriétés de l'exponentielle imaginaire

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ deux réels. Alors :

- $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

- $e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1.$
- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}, \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}.$
- $\diamond \quad e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 0 \ [2\pi].$
 $\diamond \quad \text{Plus généralement : } e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' \ [2\pi].$
- **[Formule de MOIVRE]** $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n.$

Remarque 5 La formule de MOIVRE signifie en d'autres termes que :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Elle aura de précieuses applications en trigonométrie (voir la fin du chapitre).

Remarque 6 (Et pour l'exponentielle réelle?) Vous saviez déjà que pour tous

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a \cdot e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Les propriétés du-dessus sont donc parfaitement analogues. De plus,

$$e^a = e^b \iff a = b$$

dans le monde réel. En revanche, pour des complexes, l'égalité de droite est vraie à 2π -près.

Preuve

- 

- $\diamond$ 

- $\diamond$ 

- $\diamond$ Montrons le cas $n \in \mathbb{N}$ par récurrence. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n.$



- Conséquence directe des valeurs : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0.$

- 

- Soit $n < 0$ désormais. C'est dans ce cas un simple jeu d'écriture en cherchant à utiliser les propriétés précédentes :

$$e^{in\theta} = e^{i(-n)(-\theta)} \underset{\text{car } -n > 0}{=} [e^{i(-\theta)}]^{-n} = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} \underset{\text{car } -n > 0}{=} \frac{1}{e^{-ni\theta}} = e^{ni\theta}.$$

Exemple 11 Calculer j^3 et $1 + j + j^2$.



Les formules ci-après paraissent anecdotiques au premier abord, mais elles seront d'intérêt capital pour toutes les applications des nombres complexes en trigonométrie.

Proposition 10 | Formules d'EULER

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}).$$

Preuve Nous avons déjà établi que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En prenant $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, on obtient les formules d'EULER.

2.2 Forme exponentielle

Nous avons déjà rencontré un complexe j , qui s'écrivait sous deux formes.

- En effet, nous avons établi que $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a vu également que l'écriture exponentielle avait été bien pratique dans certains calculs (celui de j^3 notamment, bien plus que la forme algébrique).
- On peut donc se demander à présent : « est-ce que tout complexe peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$? ». La réponse est :



- En revanche, si $z \neq 0$, le complexe $\frac{z}{|z|}$ est bien de module 1 :



Ces constats nous mènent tout droit à la définition suivante.

Définition/Proposition 2 | Argument d'un nombre complexe (non nul)

Soit z un nombre complexe **non nul**.

- Alors : $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, donc : $\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.
- Un tel réel θ est appelé **un argument** de z . L'ensemble des autres arguments de z est alors : $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Il existe un unique argument dans $[0, 2\pi[$, on l'appelle en général *l'argument principal* de z .

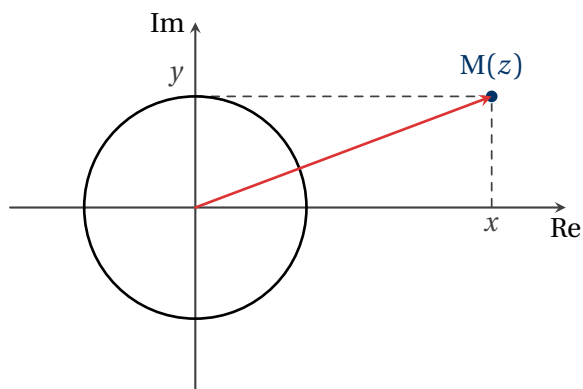
Note

Parfois certaines références considèrent $]-\pi, \pi]$ comme intervalle pour l'argument principal

Notation

Pour dire que θ est un argument de z , on note : $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$. Lire « un argument de z est θ modulo 2π », c'est-à-dire à « 2π -près ».

Remarque 7 (Interprétation géométrique) Interprétons géométriquement les quantités points d'affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\frac{z}{|z|}$ et l'angle θ sur un même dessin. Rajoutez sur le dessin ci-dessous $\frac{z}{|z|}$ et l'angle θ .



Ainsi : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z) \pmod{2\pi}$ où $M(z)$.

Définition 7 | Forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul, dont θ est un argument.

- L'écriture $z = |z| e^{i\theta}$ est appelée *forme exponentielle* de z .
- L'écriture $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z .

Méthode (ALG) 5.3 (Mettre sous forme exponentielle un nombre complexe)

- Soit $z \neq 0$.
 1. Calculer $|z|$, puis mettre $|z|$ en facteur dans z .
 2. Chercher $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, i.e. tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$
 La forme exponentielle est alors : $z = |z| e^{i\theta}$. Il arrive parfois que l'angle θ ne soit pas explicite.
- **[Produit/Quotient]** Pour les produits et quotients de deux complexes, il est inutile de commencer par le mettre sous forme algébrique avant de trouver la forme exponentielle. En effet, notons $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \neq 0$ ($\theta_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2} \neq 0$ ($\theta_2 \in \mathbb{R}$). Alors :

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Exemple 12 Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants.

1. $1 + i, 1 - i,$



2. $1 - i\sqrt{3},$



3. $\frac{1+i}{1-i},$



4. $(\sqrt{3} - i)^n, n \in \mathbb{N}.$



Exemple 13 Donner un argument des complexes $i, -i, 2i$. Cette question revient à déterminer la forme exponentielle.



Exercice 2 (Lien entre les deux formes et application trigonométrique)

Donner les formes algébriques et exponentielles de $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{12}), \sin(\frac{\pi}{12})$.

Méthode (ALG) 5.4 (Complexe sous forme « quasi-exponentielle ») Soit $z \neq 0$ tel que $z = Ke^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $K \in \mathbb{R}$ (puisque K n'est pas supposé positif, ce n'est a priori pas la forme exponentielle de z) alors, pour mettre z sous forme exponentielle, on écrit :

$$z = \begin{cases} Ke^{i\theta} & \text{si } K \geq 0, \\ \underbrace{(-K)}_{>0} (-e^{i\theta}) = (-K)e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

- Si $K \in i\mathbb{R}$, on commence par écrire i sous la forme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis on retombe sur le cas précédent.

Exemple 14 Déterminer la forme exponentielle de :

- $z = x \in \mathbb{R}, x > 0$,



- $z = x \in \mathbb{R}, x < 0$,



- $-2e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.



- $ie^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$,



- $\frac{-4e^{-2i\theta}}{5e^{5i\theta'}}, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$,



- $z = \sin(\lambda)e^{i\theta}$, avec $(\lambda, \theta) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.



Méthode (ALG) 5.5 (Technique de l'angle moitié (forme exponentielle d'une somme d'exponentielles imaginaires)) Soient deux nombres complexes z, z' de module un donné sous forme exponentielle : $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ avec $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors la forme exponentielle de $z + z'$ s'obtient par le calcul suivant :

$$z + z' = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).$$

La méthode s'adapte à $z - z'$ en faisant apparaître un sinus. Pour obtenir la forme exponentielle, on applique alors la méthode précédente.

Exemple 15 En utilisant la technique de l'angle moitié, retrouver la forme exponentielle de $1 \pm i$.





Exemple 16 (Deux formes exponentielles très importantes)

1. Déterminer la forme exponentielle de $1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi[$. Que dire si $\theta \in [\pi, 2\pi[$?

- [Calcul de l'angle moitié]



- [Mise en facteur de l'angle moitié]



- [Conclusion]



2. Même question avec $1 - e^{i\theta}$.



On a donc établi dans l'exemple précédent la remarque ci-dessous.

Remarque 8 (Forme exponentielle de $1 \pm e^{i\theta}$) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Les formes exponentielles de $1 \pm e^{i\theta}$ sont données par :

- $1 + e^{i\theta} = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \in [0, \pi[, \\ (-2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)} & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$
- $1 - e^{i\theta} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)}.$

Ces expressions ne sont pas à apprendre par coeur, mais surtout savoir les établir.

Passons à quelques propriétés de l'argument d'un nombre complexe, qui découlent

des propriétés déjà établies sur l'exponentielle imaginaire.

Proposition 11 | Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux complexes non nuls. Alors :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$,
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$,
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z \pmod{2\pi}$,
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 \pmod{\pi}$,
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Preuve

Preuve Notons $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ les formes exponentielles de z et z' , avec $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi[$, $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

- $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$ par propriétés de l'exponentielle. Donc :
 $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$ par propriétés de l'exponentielle. Donc :
 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$.
- $\bar{z} = \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$ puisque ρ est un réel. Donc, par propriété de l'exponentielle :
 $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, et dès lors : $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z \pmod{2\pi}$.
- 

- 

Remarque 9 Lorsqu'un argument n'est pas explicite, on peut néanmoins calculer souvent sa tangente. On a plus précisément : si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \neq (0, 0)$ alors un argument $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ de z vérifie :

- si $x > 0$ alors $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Si $x < 0$ alors $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ et $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Note

Nous verrons dans le cours sur arctan comment trouver θ lorsqu'on sort des valeurs usuelles...

- Si $x = 0$ et $y > 0$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Si $x = 0$ et $y < 0$ alors $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Proposition 12 | Caractérisation de l'égalité de nombres complexes

Soient z, z' deux nombres complexes. Alors :

$$z = z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases} \text{ et } |z| = |z'| \iff |z| = |z'| \text{ et } \arg z = \arg z' \pmod{2\pi}.$$

Preuve La première équivalence a déjà été constatée lors de l'étude de la forme algébrique. On montre donc uniquement :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' \pmod{2\pi} \end{cases}.$$



Évidente, par passage au module et à un argument.



Supposons que $|z| = |z'|$, $\arg z = \arg z' \pmod{2\pi}$.



BILAN SUR LES FORMES ALGÈBRIQUES ET EXPONENTIELLES.

- **[Comment choisir la forme à utiliser?]** Lorsque l'on cherche à démontrer un résultat sur des nombres complexes, il ne faut **pas** systématiquement l'écrire sous forme algébrique : $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$.

Cette forme est adaptée aux problèmes « additifs », où ce qui intervient est plutôt des sommes (ou plus généralement des combinaisons linéaires) de complexes. Les problèmes « multiplicatifs » se résolvent mieux en utilisant la forme exponentielle lorsque $z \neq 0$: $z = |z| e^{i \arg z}$.

- Terminons avec un rappel des propriétés calculatoires sur les deux formes.

Preuve



	Forme algébrique	Forme exponentielle
Définition	$z = x + iy, z' = x' + iy'$	$z = \rho e^{i\theta}, z' = \rho' e^{i\theta'}$
Égalité	$z = z' \iff x = x', y = y'$	$z = z' \iff \rho = \rho', \theta = \theta' \pmod{2\pi}$
Somme	$z + z' = (x + x') + i(y + y')$	...
Produit	$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$	$z \times z' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance	...	$z^n = r^n e^{in\theta}$
Inverse	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{xx' + yy' + i(xy' - yx')}{x^2 + y^2}$	$\frac{z'}{z} = \frac{\rho'}{\rho} e^{i(\theta' - \theta)}$

2.3 Exponentielle complexe e^z

Jusqu'ici on a défini e^x pour $x \in \mathbb{R}$, et $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Autrement dit l'exponentielle est définie pour les nombres réels et pour les nombres imaginaires purs. On va voir maintenant comment définir plus généralement e^z pour $z \in \mathbb{C}$.

Définition 8 | Exponentielle complexe

Soit z un nombre complexe s'écrivant sous la forme $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$. On définit appelle *exponentielle complexe de z* le complexe :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Remarque 10

- Le module de e^z est :
- Un argument de e^z est :
- $\operatorname{Re}(e^z) =$
- $\operatorname{Im}(e^z) =$

Proposition 13 | Propriétés de l'exponentielle complexe

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$,
- $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$,
- $e^{nz} = (e^z)^n$.

Exemple 17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $e^z = 1 + i$.



Proposition 14 | Égalité entre exponentielles complexes

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors : $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Note | Ne pas oublier le « i » dans $2i\pi\mathbb{Z}$!

Preuve



Exemple 18 Retrouver les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $e^z = 1+i$, en utilisant ce résultat.



3 ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS $\mathbb{C}$

On revient maintenant à notre problématique initiale : constater que l'ensemble $\mathbb{C}$ définie précédemment permet de résoudre désormais des équations qui n'avaient pas de solution dans $\mathbb{R}$.

3.1 Équations du type $z^2 = a$, où $a \in \mathbb{C}$

Dans toute cette sous-section, on fixe un nombre complexe a et on cherche à déterminer les nombres complexes z vérifiant $z^2 = a$.

3.1.1 Cas a réel Lorsque a est un nombre réel, on peut directement appliquer la proposition suivante.

Proposition 15 | Racines carrées de réels

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- si $a > 0$, $z^2 = a \iff z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$,
- si $a = 0$, $z^2 = 0 \iff z = 0$,
- si $a < 0$, $z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.

Preuve



Exemple 19 Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z^2 = 2 \iff$
- $z^2 = -3 \iff$

Exercice 3 Résoudre $(2z+1)^2 + z^2 = 0$ en utilisant une identité remarquable. On donnera les solutions sous forme algébrique.

3.1.2 Cas a complexe Dans le cas plus général où $a \in \mathbb{C}$, deux méthodes existent pour déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^2 = a$.

1ER CAS : a POSSÈDE UNE FORME EXPONENTIELLE « SIMPLE » On cherche aussi z sous forme exponentielle.

Exemple 20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$.



On dit que l'on vient de trouver les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$, conformément à la définition ci-dessous.

Définition/Proposition 3 | Racine carrée

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

- On appelle racine carrée de α tout nombre complexe z de sorte que $z^2 = \alpha$.
- Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées.

Remarque 11 Le nombre complexe 0 possède quant à lui une seule racine carrée : 0.

Preuve Soit α un nombre complexe non nul, on note $\alpha = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrons que α possède deux racines carrées.



Attention

- Les notations $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt[n]{\alpha}$ sont réservées à $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (ou bien $\alpha \in \mathbb{R}$ si n est impair).
- Les notations $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt[n]{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont interdites (elles n'ont aucun sens car il n'y a pas unicité).

2ND CAS : a POSSÈDE UNE FORME EXPONENTIELLE NON CALCULABLE. Il est possible qu'un argument ne soit pas accessible, et donc que la forme exponentielle ne soit pas explicite. Dans ce cas, il devient utile de savoir raisonner à partir de la forme algébrique.

Voici à présent une méthode spécifique pour le cas où a est complexe donné sous forme algébrique.

Méthode (ALG) 5.6 (Calculs de racines carrées de complexes avec forme algébrique)

Pour résoudre $z^2 = a + ib$ avec $a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Chercher z sous la forme $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
2. En remplaçant, on obtient : $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$.
3. Pour résoudre ce système, on introduit une troisième équation provenant du module $|z|^2 = |a + ib|$, ce qui donne :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'où au total :

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2xy = b.$$

En faisant la somme et la différence des deux premières, on obtient des solutions (4 au plus). On en exclut certaines à l'aide de la condition $2xy = b$.

L'idée principale à retenir étant la suivante :

pour résoudre $z^2 = \alpha$, travailler au choix sur la FORME EXPONENTIELLE de z , ou la forme algébrique de z .

Le choix dépend de si on veut *in fine* des solutions données sous forme exponentielle ou algébrique, et surtout si la forme exponentielle de α vous semble explicite.

Exemple 21 Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$ sous forme algébrique.



3.2 Équation du type $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$

Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$, nous avons vu que l'outil principal était la forme canonique. Revoyons ce que c'est.

Définition 9 | Mise sous forme canonique

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Mettre le trinôme à coefficients complexes $az^2 + bz + c$ sous forme canonique, c'est déterminer deux complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - \alpha)^2 + \beta.$$

Remarque 12 Soit $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{C}$. Pour mettre sous forme canonique un trinôme, on utilisera à bon escient l'égalité suivante :

$$z^2 + kz = z + 2\frac{kz}{2} = \left(z + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Exemple 22 Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

1. $3x^2 - 8x + 5 =$



2. $-x^2 + 2x - 2 =$



3. $z^2 + iz + 2 + i =$



Exemple 23 (Introductif) Considérons l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, qui n'avait pas de solution dans $\mathbb{R}$ et cherchons désormais des solutions dans $\mathbb{C}$.



Considérons plus généralement une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a revu dans le **Chapitre (ALG) 2** comment on trouvait les solutions, à l'aide de la forme canonique. On avait établi en notant $\Delta = b^2 - 4ac$ que :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Notons $\delta \in \mathbb{C}$ une racine complexe de Δ , c'est-à-dire un complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. On reconnaît alors une identité remarquable du type « $a^2 - b^2$ » :



$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right). \end{aligned} \quad \text{identité } a^2 - b^2$$

On a ainsi factorisé dans $\mathbb{C}$ (comme vous l'aviez fait en première, mais dans $\mathbb{R}$) l'expression $az^2 + bz + c$ peu importe le signe de Δ , ce qui nous mène tout droit aux solutions de l'équation.

Théorème 2 | Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (\text{E})$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant associé au trinôme, et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ . Alors :

- les solutions de (E) sont : $\frac{-b \pm \delta}{2a}$.
- En particulier, lorsque $\Delta \in \mathbb{R}$:
 - si $\Delta > 0$, $\delta = \sqrt{\Delta}$ convient, et les solutions de (E) sont : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - Si $\Delta = 0$, $\delta = 0$ convient, l'unique solution de (E) est : $\frac{-b}{2a}$.
 - Si $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ convient, et les solutions de (E) sont : $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On voit que les solutions sont distinctes dès que :

$$\frac{-b - \delta}{2a} \neq \frac{-b + \delta}{2a} \iff \delta \neq 0 \iff \Delta \neq 0.$$

Lorsque $\Delta = 0$ (ou de manière équivalente que $\delta = 0$), on a une unique solution $\frac{-b}{2a}$. Ces solutions permettent de factoriser le trinôme.

Proposition 16 | Factorisation

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On considère l'équation (E) associée, et notons z_1, z_2 les deux solutions éventuellement confondues de (E). Alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2). \quad (\text{forme factorisée})$$

Preuve Conséquence de la démonstration du **Théorème 2**.

Exemple 24 Résoudre les équations :

1. $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$.



2. $z^2 + 2z + 4 = 0$.



On a $\Delta = 4 - 16 = -12$. Les solutions sont alors : $\frac{-2 \pm (4i)}{2} = \boxed{-1 \pm 2i}$.

3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$.



$\Delta = -4\sin^2\theta$. Nous avons plusieurs cas :

- si $\theta = \pi$: alors $\Delta = 0$ et on a une seule racine double $\boxed{\cos\theta}$.
- si $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, alors $\Delta < 0$, donc les racines sont $\frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \boxed{e^{\pm i\theta}}$.

Exemple 25 Retrouver les solutions de $(2z + 1)^2 + z^2 = 0$ en utilisant cette fois-ci le **Théorème 2**.



Remarque 13 Les relations coefficients-racines vues dans le **Chapitre (ALG) 2** restent valables dans $\mathbb{C}$: à utiliser toujours en priorité lorsqu'une racine est évidente.

Exemple 26 Résoudre : $z^2 + iz + 2 = 0$. On pourra vérifier que i est racine.



3.3 Équations polynomiales générales

Les polynômes seront étudiés plus en détail dans un futur chapitre (**Chapitre (ALG) 8**), mais précisons un peu de vocabulaire. On appelle *fonction polynomiale complexe* une fonction de la forme :

$$z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ des complexes appelés les *coefficients* du polynôme. L'entier n est appelé le *degré* du polynôme. On a alors le résultat de factorisation suivant.

Proposition 17 | Caractérisation par factorisation



Soient P une fonction polynomiale complexe de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$P(\lambda) = 0 \iff \forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - \lambda)Q(z),$$

où Q est une fonction polynomiale complexe de degré $n - 1$.

Preuve



Immédiat, évaluer l'identité en λ .



Soit λ une racine de P et notons $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $a_k \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = P(z) - 0 = P(z) - P(\lambda). \quad \text{Dès lors :}$$



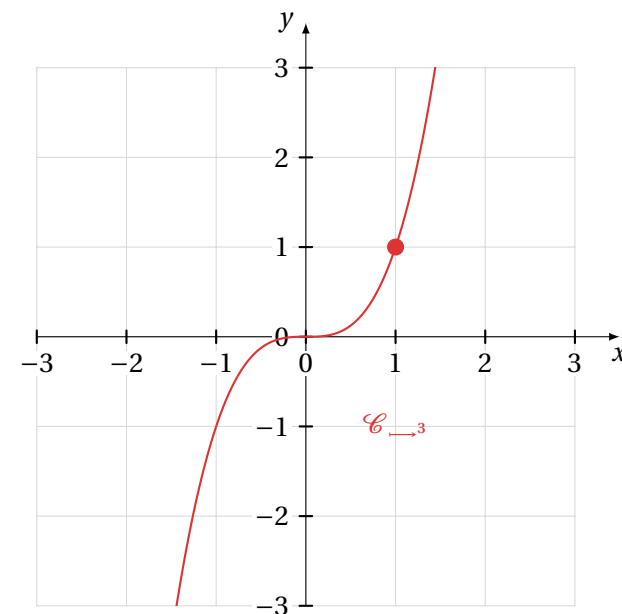
Ce résultat sert à factoriser successivement un polynôme afin d'en déduire les solutions de $P(z) = 0$.

Exemple 27 On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + 3z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.



1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'équation n'admet qu'une solution : 1.



2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on voit que $j = e^{2i\pi/3}$ convient, mais aussi $j^2 = e^{4i\pi/3}$ – et en fait nous allons montrer que ce sont les seules.

On constate que : l'ensemble des racines cubiques complexes de 1 contient l'ensemble des racines cubiques réelles de 1, et il y en a systématiquement au moins autant dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.

Définition 10 | Racines n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle *racine n -ième* de α tout complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = \alpha$.

- On note $\mathbb{U}_n(\alpha)$ l'ensemble des solutions de $z^n = \alpha$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U}_n(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = \alpha\}.$$
 Si $\alpha = 1$, on parle de *racine n -ième de l'unité*. On note alors :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$
- Si $n = 2$, on parle de *racine carrée* de α , pour $n = 3$ de *racine cubique*.

3.4 Racines n -ièmes d'un complexe

De manière générale, on appelle « racine n -ième » d'un objet mathématique une quantité qui élevée à la puissance n donne cet objet (l'objet en question peut être un réel, un complexe ou même une matrice).

Regardons pour commencer un exemple. Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et considérons l'équation $z^3 = 1$ avec $z \in \mathbb{K}$.

Trouver les racines n -ièmes d'un complexe est un problème multiplicatif (avec des puissances), donc la bonne forme à adopter est la forme exponentielle, nous allons très largement nous en servir dans la suite. On retient donc que :

pour résoudre $z^n = \alpha$, travailler sur les FORMES EXPONENTIELLES !

Méthode (ALG) 5.7 (Calculs de racines n -ième de complexes avec forme exponentielle) Pour résoudre $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ il n'y a que zéro comme solution).

1. Calculer la forme exponentielle de $\alpha = \rho e^{i\theta}$.
2. Chercher z sous la forme $z = \rho' e^{i\theta'}$, $\rho' > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$.
3. En remplaçant, on obtient comme conditions $(\rho')^n = \rho$ et $n\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Résoudre ces deux équations puis conclure, en regardant notamment les k qui donnent un argument dans $[0, 2\pi[$.

Exemple 28

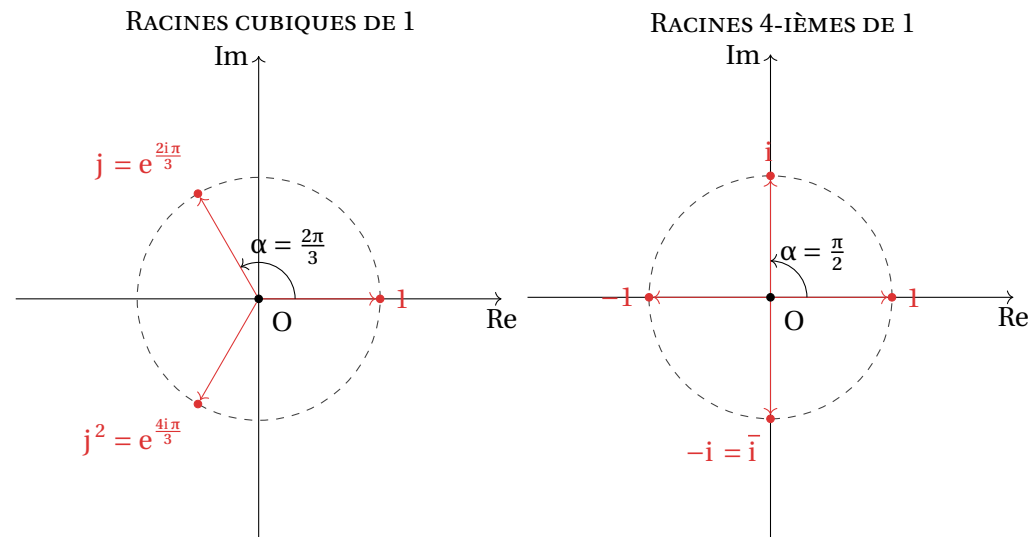
- Pour $\mathbb{U}_2$, les calculs sont évidents. En effet,

$$z^2 = 1 \iff z^2 - 1^2 = (z - 1)(z + 1) = 0 \iff z = \pm 1.$$
 Donc : $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.
- Déterminer $\mathbb{U}_3$.



- De la même façon, on montrerait que $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$.

On peut pour terminer représenter les éléments de $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.



De manière générale, on a le résultat suivant.

Proposition 18 | Description des racines n -ièmes de l'unité $\mathbb{U}_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} = \{ \omega^k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}, \quad \text{où : } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Preuve



Que fait-on pour résoudre $z^n = \alpha$? On se ramène à $\mathbb{U}_n$ afin d'utiliser le résultat précédent.

Exemple 29

- Déterminer les racines quatrièmes de -16 .

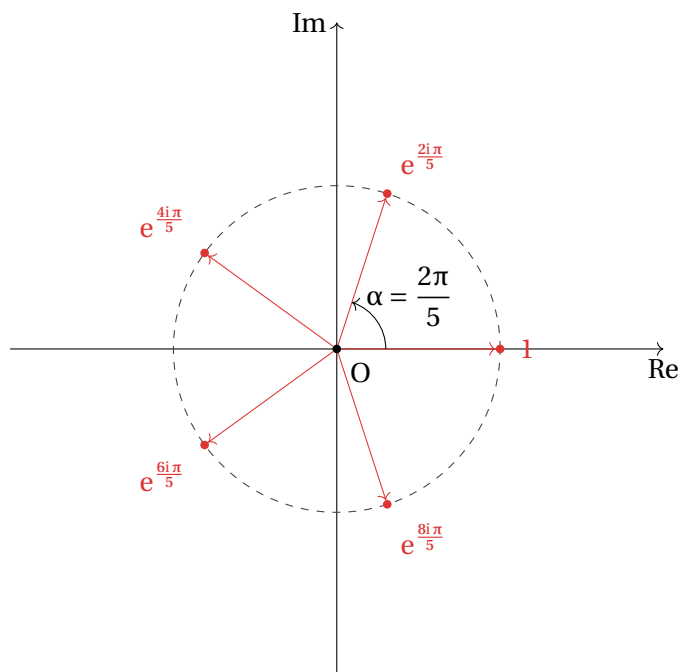


- Déterminer les racines cubiques de $1 + i$.



Exercice 4 Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$, $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$.
2. Interpréter géométriquement ces formules, par exemples sur les éléments de $\mathbb{U}_5$.



4

APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES EN TRIGONOMÉTRIE

Les nombres complexes, grâce à l'exponentielle complexe, fournissent des méthodes très efficaces pour transformer des expressions trigonométriques. Voyons comment.

Méthode (ALG) 5.8 (Linéarisation & Antilinéarisation avec des complexes)

1. [Pour linéariser $\cos^k \theta, \sin^k \theta$] écrire

$$\cos^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k, \quad \sin^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^k,$$

puis développer avec le binôme, regrouper les termes avec leur conjugué, utiliser les formules d'EULER.

2. [Pour antilinéariser $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$] écrire

$$\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Re}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^k\right),$$

$$\sin(k\theta) = \operatorname{Im}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Im}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Im}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^k\right),$$

puis développer avec le binôme et calculer les parties réelles et imaginaires.

3. [Pour linéariser des produits] En utilisant les formules d'EULER, on peut linéariser des expressions de la forme $\cos x \cos y, \sin x \sin y, \cos x \sin y, \sin x \cos y$.

4. [Pour anti-linéariser des sommes] En utilisant des techniques d'angle moitié, on peut antilinéariser des expressions de la forme $\cos x \pm \cos y, \sin x \pm \sin y, \cos x \pm \sin y, \sin x \pm \cos y$.

Rappel (Formules d'EULER) On rappelle les formules d'EULER déjà établies. Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ou encore :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta), \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta), \quad e^{-i\theta} - e^{i\theta} = -2i \sin(\theta).$$

Exemple 30 (Linéarisation)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$.



2. De-même, établir une formule pour $\cos x \sin y$.



3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^3 x$ en utilisant les nombres complexes.



4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3 x \sin x$ en utilisant les nombres complexes.



Exemple 31 (Anti-Linéarisation)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, en utilisant les nombres complexes.



Les complexes peuvent rendre de multiples services en trigonométrie, y compris les calculs de sommes de fonctions trigonométriques, comme le montrent les exemples ci-après.

Méthode (ALG) 5.9 (Calculs de sommes trigonométriques)

1. Écrire $\cos, \sin$ comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\dots)$, *i.e.* : $\operatorname{Re}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Im}(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

Σ Notation

Dans l'exemple qui suit, on notera : $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 32 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :
$$G_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$



2. En déduire les sommes $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.



On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5.1 Affixe d'un vecteur et applications

On rappelle qu'à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) , on peut associer le nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + iy$ qui est l'*affixe* du vecteur $\vec{u}$. Il résulte des propriétés des vecteurs ci-dessous.

Proposition 19 | Propriétés des affixes de vecteurs

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z' , le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$ et $\lambda \vec{u}$ a pour affixe λz (où $\lambda \in \mathbb{R}$).
- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ avec $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$, alors :
 - ◊ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
 - ◊ Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Preuve 

Proposition 20 | Longueur et modules

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B . Alors :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Preuve 

Exemple 33 Déterminer les ensembles

$$\mathcal{E}_1 = \{M(z) \mid |z - 2| = |z + i|\}$$

$$\mathcal{E}_2 = \{M(z) \mid |z - 3 + 2i| = |1 - i|\}$$



Proposition 21 | Mesure d'un angle, version 1

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points distincts du plan, alors :

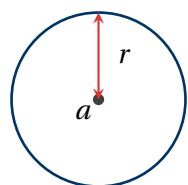
$$\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}.$$

Preuve

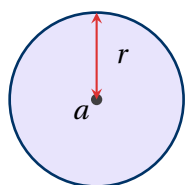


Il en découle que pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$:

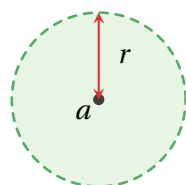
- le cercle de centre a et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$,
- le disque fermé de centre a et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$,
- le disque ouvert de centre a et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$.



Cercle



Disque fermé



Disque ouvert

Exercice 5 Soit $A(a), B(b), C(c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que le triangle ABC soit isocèle en a .

Exemple 34 Calculer $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right)$ avec $A(2)$ et $B(1 + i\sqrt{3})$.



Proposition 22 | Mesure d'un angle, version 2

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $D(z_D)$ quatre points quelconques du plan avec $A \neq B$, $C \neq D$, alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Preuve



En particulier : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

On en déduit alors la proposition ci-dessous.

Proposition 23 | Alignement et orthogonalité

Soit A, B, C trois points du plan. Alors :

- A, B, C sont alignés $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- $(AB) \perp (AC) \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Preuve

**5.4 Écriture complexe des transformations usuelles**

On considère $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 11 | Écriture complexe

Soit f une application de $\mathcal{P}$ ans $\mathcal{P}$:

$$f: \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \longmapsto & M'(z'). \end{cases}$$

On lui associe une application, appelée *écriture complexe de f* et encore notée f , définie par :

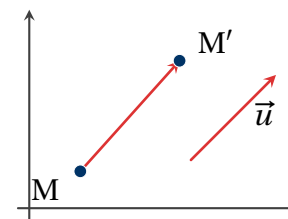
$$f: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z', \end{cases} \quad \text{où } M(z) \text{ et } M'(z').$$

Cela revient simplement à confondre $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$ via l'afixe associée. On travaille donc cette fois avec des complexes plutôt que les points géométriques associés.

ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE TRANSLATION. Rappelons tout d'abord la définition géométrique d'une translation.

Définition 12 | Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle *translation de vecteur $\vec{u}$* l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$
**Proposition 24 | Écriture complexe d'une translation**

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'afixe a . Alors l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z' = z + a \end{cases}$$



Exemple 35 Préciser la nature de $f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' = z - 2i. \end{cases}$

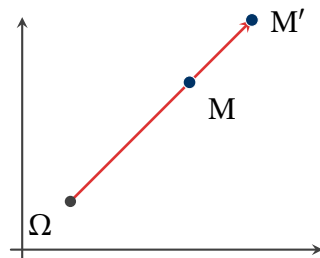


ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE HOMOTHÉTIE. On rappelle tout d'abord la définition d'une homothétie.

Définition 13 | Homothétie

Soit λ un nombre réel non nul et Ω un point du plan. On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport λ* l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}.$$



Proposition 25 | Écriture complexe d'une homothétie

Soit Ω un point du plan d'affixe ω et λ un réel non nul. Alors l'application associée à l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' = \omega + \lambda(z - \omega) \end{cases}$$



Exemple 36 Préciser la nature de $f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z' = 1 - i - \frac{3}{4}(z - 1 + i). \end{cases}$

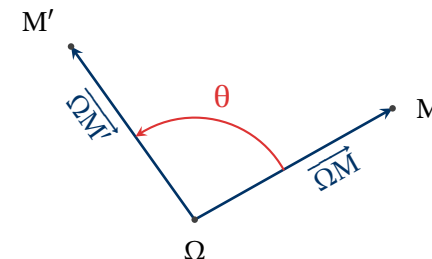


ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE ROTATION. Rappelons les caractéristiques d'une rotation.

Définition 14 | Rotation

Soit θ un nombre réel non nul et Ω un point du plan. On appelle *rotation de centre Ω et d'angle θ* l'application qui à tout point M du plan différent de Ω associe le point M' tel que :

$$\Omega M = \Omega M' \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi].$$



Proposition 26 | Écriture complexe d'une rotation

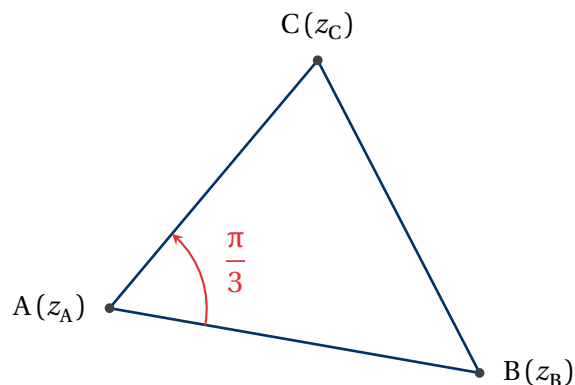
Soit Ω un point du plan d'affixe ω et θ un réel. Alors l'application associée à la rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega). \end{cases}$$

Preuve



Exemple 37 (Triangles équilatéraux) Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ trois points du plan, où $(z_A, z_B, z_C) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_A, z_B, z_C pour que ABC soit équilatéral.



Proposition 27 | Transformations linéaires du plan

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On considère la transformation du plan représentée par $f : z \longrightarrow az$.

- Si $a = 1$, alors f est l'application identité. (c'est l'application «qui ne fait rien»!)
- Si $a \neq 1$, en notant θ un argument de a et $k = |a|$, alors $f = r \circ h = h \circ r$ avec
 - ◊ r la rotation de centre O et d'angle θ ,
 - ◊ h l'homothétie de centre O et de rapport k .

Preuve



Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 5.1 (Quotient sous forme algébrique : expression conjuguée) Pour deux réels $x, y \in \mathbb{R}$, et $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} + i \left(\frac{-y}{|z|^2} \right).$$

Méthode (ALG) 5.2 (Développement d'une norme de somme au carré) Soit $|z + z'|^2$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Écrire la quantité en fonction du conjugué : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'})$.
2. Développer.

Méthode (ALG) 5.3 (Mettre sous forme exponentielle un nombre complexe)

- Soit $z \neq 0$.
 1. Calculer $|z|$, puis mettre $|z|$ en facteur dans z .
 2. Chercher $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, i.e. tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

La forme exponentielle est alors : $z = |z|e^{i\theta}$. Il arrive parfois que l'angle θ ne soit pas explicite.

- **[Produit/Quotient]** Pour les produits et quotients de deux complexes, il est inutile de commencer par le mettre sous forme algébrique avant de trouver la forme exponentielle. En effet, notons $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} \neq 0$ ($\theta_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2} \neq 0$ ($\theta_2 \in \mathbb{R}$). Alors :

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Méthode (ALG) 5.4 (Complexe sous forme « quasi-exponentielle ») Soit $z \neq 0$ tel que $z = Ke^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $K \in \mathbb{R}$ (puisque K n'est pas supposé positif, ce n'est a priori pas la forme exponentielle de

z) alors, pour mettre z sous forme exponentielle, on écrit :

$$z = \begin{cases} Ke^{i\theta} & \text{si } K \geq 0, \\ \underbrace{(-K)}_{>0} (-e^{i\theta}) = (-K)e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

- Si $K \in i\mathbb{R}$, on commence par écrire i sous la forme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis on retombe sur le cas précédent.

Méthode (ALG) 5.5 (Technique de l'angle moitié (forme exponentielle d'une somme d'exponentielles imaginaires)) Soient deux nombres complexes z, z' de module un donnés sous forme exponentielle : $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ avec $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors la forme exponentielle de $z + z'$ s'obtient par le calcul suivant :

$$z + z' = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).$$

La méthode s'adapte à $z - z'$ en faisant apparaître un sinus. Pour obtenir la forme exponentielle, on applique alors la méthode précédente.

Méthode (ALG) 5.6 (Calculs de racines carrées de complexes avec forme algébrique) Pour résoudre $z^2 = a + ib$ avec $a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Chercher z sous la forme $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
2. En remplaçant, on obtient : $x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$.
3. Pour résoudre ce système, on introduit une troisième équation provenant du module $|z|^2 = |a + ib|$, ce qui donne :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'où au total :

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2xy = b.$$

En faisant la somme et la différence des deux premières, on obtient des solutions (4 au plus). On en exclut certaines à l'aide de la condition $2xy = b$.

Méthode (ALG) 5.7 (Calculs de racines n -ième de complexes avec forme exponentielle) Pour résoudre $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ il n'y a que zéro comme solution).

1. Calculer la forme exponentielle de $\alpha = \rho e^{i\theta}$.
2. Chercher z sous la forme $z = \rho' e^{i\theta'}, \rho' > 0, \theta \in [0, 2\pi[$.
3. En remplaçant, on obtient comme conditions $(\rho')^n = \rho$ et $n\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Résoudre ces deux équations puis conclure, en regardant notamment les k qui donnent un argument dans $[0, 2\pi[$.

Méthode (ALG) 5.8 (Linéarisation & Antilinéarisation avec des complexes)

1. [Pour linéariser $\cos^k \theta, \sin^k \theta$] écrire

$$\cos^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k, \quad \sin^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^k,$$

puis développer avec le binôme, regrouper les termes avec leur conjugué, utiliser les formules d'EULER.

2. [Pour antilinéariser $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$] écrire

$$\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^k),$$

$$\sin(k\theta) = \operatorname{Im}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Im}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^k),$$

puis développer avec le binôme et calculer les parties réelles et imaginaires.

3. [Pour linéariser des produits] En utilisant les formules d'EULER, on peut linéariser des expressions de la forme $\cos x \cos y, \sin x \sin y, \cos x \sin y, \sin x \cos y$.
4. [Pour anti-linéariser des sommes] En utilisant des techniques d'angle moitié, on peut antilinéariser des expressions de la forme $\cos x \pm \cos y, \sin x \pm \sin y, \cos x \pm \sin y, \sin x \pm \cos y$.

Méthode (ALG) 5.9 (Calculs de sommes trigonométriques)

1. Écrire $\cos, \sin$ comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\dots)$, i.e. : $\operatorname{Re}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Im}(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant la forme algébrique :
 - savoir effectuer des calculs sur les formes algébriques (somme, produit, quotient, etc.) ☐
 - savoir traduire l'égalité de deux complexes donnés sous forme algébrique ☐
 - savoir calculer un module, un conjugué ☐
 - savoir représenter un complexe dans le plan ☐
2. Concernant la forme exponentielle :
 - savoir que $\frac{z}{|z|}$ est sur le cercle trigonométrique et la définition d'un l'argument ☐
 - savoir calculer une forme exponentielle ☐
 - savoir manipuler $e^{i\theta}$ ☐
 - savoir résoudre des équations dans $\mathbb{C}$ ☐
3. Concernant les applications des complexes :
 - savoir linéariser ☐
 - savoir anti-linéariser ☐
 - savoir calculer des sommes trigonométriques ☐
4. Concernant les applications en géométrie : connaître les différentes transformations et leur écriture complexe ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.
Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.



Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler

16, 17

Exercice 1 | ●○○ [Solution] Mettre les complexes suivants sous forme algébrique simple :

1. $z = (i - \sqrt{2})^3$, 2. $z = \frac{1+4i}{1-5i}$, 3. $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$,
4. $z = \frac{1}{\frac{1}{i+1} - 1}$, 5. $z = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$, 6. $z = (5-2i)^3$,
7. $z = \frac{1}{(4-i)(3+2i)}$, 8. $z = \frac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}$, 9. $z = (\sqrt{3}-2i)^4$.

Exercice 2 | ●○○ [Solution] Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{\bar{z}}{z}$ 2. $z_2 = \frac{iz}{\bar{z}}$

Exercice 3 | ●●● Nombres complexes et électricité

1. Dans un circuit RLC (composé d'une résistance R , d'un condensateur C et d'une bobine d'inductance L) en série, on définit l'*impédance complexe* Z du circuit par :

$$Z = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{où } \omega \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la forme algébrique de Z .

2. Dans un circuit RLC en parallèle, l'*impédance complexe* Z du circuit vérifie la relation :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega e^{i\frac{\pi}{2}}} + C\omega e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{où } \omega \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la forme algébrique de Z .

6.2 Forme exponentielle

Exercice 4 | ●○○ [Solution] Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle et trigonométrique :

1. $z = -18$
2. $z = -7i$
3. $z = 1 + i$
4. $z = (1 + i)^5$
5. $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$
6. $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
7. $z = -10e^{i\pi}\left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$
8. $z = -5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$
9. $z = \frac{1}{\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}$
10. $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$
11. $z = \frac{1}{1 + i\tan\theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
12. $z = \left(\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

ANGLE MOITIÉ

Exercice 5 | ●○○ [Maëlys IB - Ethan MO] [Solution] Montrer, pour tout réel θ de $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$, que :

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 6 | ●●● [Solution]

1. Soient a et b des réels tels que b ne soit pas de la forme : $(2k + 1)\pi$ avec k entier. Calculer le module et un argument de $\frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b}$.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]^2$. Déterminer la forme exponentielle de : $Z = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - \sin \beta + i \cos \beta}$.

6.3 Résolution d'équations

PREMIER DEGRÉ

Exercice 7 | ●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3i - 2z + 1 = i(iz + 4) - 2,$
2. $3(z + i) - 2z = i + z,$
3. $2z - 3i\bar{z} = -5 - i,$
4. $2z - i\bar{z} = i(3 + z) + \bar{z}.$

SECOND DEGRÉ

Exercice 8 | ●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 = 2026$
2. $z^2 = -2027$
3. $z^2 - 2z + 2 = 0$
4. $2z^2 - 3z + 1 = 0$
5. $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
6. $z^2 - 2z + 1 = 0$
7. $z = 2 - \frac{2}{z}$
8. $(z + 1)^2 + (2z + 3)^2 = 0.$

PUISSANCES & RACINES DE L'UNITÉ

Exercice 9 | ●○○ [Nassim AG - Tristan CA] **Complexe j** [Solution] On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Justifier rapidement que : $j^3 = 1, \quad 1 + j + j^2 = 0, \quad \bar{j} = j^2.$
2. Exprimer les complexes suivants sous la forme $\alpha + \beta j$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$z_1 = (1 + j)^5, \quad z_2 = \frac{1}{(1 + j)^4}, \quad z_3 = \frac{1}{1 - j^2}.$$

Indication : On pourra pour z_3 utiliser la technique de l'expression conjuguée.

Exercice 10 | ●○○ [Solution] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Pour l'ordre 2, on essaiera les deux méthodes (avec la forme algébrique et la forme exponentielle). Dans les autres cas, on fera appel à la forme exponentielle.

1. $z^2 = i$
2. $z^3 = i$
3. $z^4 + 4 = 0$
4. $z^2 = 24 + 10i$
5. $z^4 = j$.

Exercice 11 | ●●○ [Armand CA – Celia ET] [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et mettre les solutions sous forme exponentielle.

1. Rappeler sans justifier les solutions de $z^n = 1$.
2. En déduire les solutions de :

$$z^n = (z - 1)^n, \quad (z + 1)^n = (z - 1)^n.$$

AUTRES ÉQUATIONS

Exercice 12 | ●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.

Exercice 13 | ●●○ [Laly BE – Antoine LO] On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2z^3 + (4 - 3i)z^2 + (-3 + 8i)z + (5 + i) = 0. \quad (E)$$

1. Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure, que l'on déterminera.
2. En déduire toutes les solutions complexes de (E).

Exercice 14 | ●●● [Grégoire EL – Charles HE] **Un changement de variable.** [Solution] Soit $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ fixé. On veut résoudre l'équation :

$$(1 + iz)^3(1 - i \tan \varphi) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \varphi). \quad (E)$$

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $|1 - iz| = |1 + iz|$. En déduire que z est réel.
2. Posons $z = \tan \theta$. Justifier ce changement d'inconnue, puis résoudre (E).

6.4 Trigonométrie

FORMULES

Exercice 15 | ●○○ Linéarisation [Solution] Linéariser les expressions suivantes.

1. $\sin^5 x$,
2. $\sin^3 x \cos^2 x$,
3. $\cos^6 x, \sin^6 x$,
4. $\sin^4 x \cos^3 x$.

Exercice 16 | ●○○ Antilinéarisation [Solution]

1. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.
2. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$.
 En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

CALCULS DE SOMMES

Exercice 17 | ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 18 | ●●○ [Gabriel BE – Saleh SA] [Solution] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer :

1. $C = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta),$
2. $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta).$

6.5 Géométrie

ENSEMBLES DE POINTS VIA LES COMPLEXES

Exercice 19 | ●○○ Déterminer et représenter les ensembles de points suivants :

1. l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - 2i| = 2$,
2. l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - i| = |\bar{z} - 1|$,
3. l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} [\pi]$,
4. l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\frac{z-1}{z+2i}$ est réel,
5. l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $z + \bar{z} = |z|$.

Exercice 20 | ●○○ [Joshua BA – Camille DU] **Condition d'appartenance à un cercle** [Solution] Soient A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b . Montrer qu'un point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre [AB] si et seulement si :

$$2z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})z - (a + b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.$$

Exercice 21 | ●○○ **Triangles et cercles** On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé.
2. Calculer $\frac{c-a}{d-a}$ et en déduire la nature du triangle ACD.
3. Montrer que les points A, B, C, D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 22 | ●●○ **Triangles équilatéraux** [Solution] On considère les points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ d'affixes respectives $a = z$, $b = \bar{z}$, $c = \frac{z^2}{\bar{z}}$, où $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. On note ρ le module de z et θ un argument de z . Exprimer un argument de b et de c . Comment faut-il choisir z pour que les points A, B, C soient distincts deux à deux?

Dans la suite de cet exercice, on supposera cette condition réalisée.

2. Montrer que A, B, C appartiennent à un même cercle de centre O.
3. Montrer que : $AB = AC$.
4. Pour un point quelconque A, indiquer une construction géométrique du point B puis du point C. Réaliser cette construction.
5. On pose : $Z = \frac{a-c}{b-c}$.

5.1) Montrer que : $Z = \frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{\sin(2\theta)}$

5.2) Résoudre alors : $|Z| = 1$.

5.3) En déduire l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral.

TRANSFORMATIONS

Exercice 23 | ●○○ Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes :

1. l'homothétie de centre $\Omega(-1, -1)$ et de rapport 3,
2. la translation de vecteur $\vec{u}(1, 4)$,
3. la rotation de centre $A(1, 1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$,
4. la composée de la rotation de centre $\Omega(0, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre $A(1, 2)$ et de rapport $\frac{3}{2}$.

Exercice 24 | ●○○ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations ci-dessous :

1. $f_1 : z \mapsto \frac{1}{i}z$,
2. $f_2 : z \mapsto 2 + z + i$,
3. $f_3 : z \mapsto iz - 2 - 4i$,
4. $f_4 : z \mapsto 5z + 2i$.

Solution (exercice 1) [Énoncé] Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. $z = \sqrt{2} + 5i$. On utilise ici une identité remarquable.
2. $z = -\frac{19}{26} + i\frac{9}{26}$. On a un quotient de nombres complexes dont on vaut la forme algébrique : on multiplie par le conjugué du dénominateur.
3. $z = -1$. Là encore il y a plusieurs méthodes qui marchent bien. Une possibilité est de mettre sous forme exponentielle $1 + i$ d'un côté et $1 - i$ de l'autre côté puis de les passer au carré et enfin de faire le quotient.
4. $z = -1 + i$. On peut par exemple commencer par tout mettre sous le même dénominateur en bas et on obtient $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{-i} = i(1+i)$.
5. On peut par exemple mettre sous forme algébrique chaque terme de la somme de façon séparée en multipliant par le conjugué puis on les somme.
6. $z = 65 - 142i$. On utilise une identité remarquable.
7. $z = \frac{14}{221} - i\frac{5}{221}$. On peut multiplier par le conjugué du dénominateur à savoir $(4+i)(3-2i)$.
8. $z = \frac{69}{29} - i\frac{17}{29}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur.
9. $z = -47 + 8\sqrt{3}i$. On développe avec le binôme de NEWTON.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. On remplace z par $x + iy$ et $\bar{z}$ par $x - iy$, puis on mène le calcul comme d'habitude. On a donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x - iy}{x + iy} \\ &= \frac{(x - iy)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 2\frac{xy}{x^2 + y^2}i \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{i(x + iy)}{x - iy} \\ &= \frac{-y + ix}{x - iy} \\ &= \frac{(-y + ix)(x + iy)}{(x - iy)(x + iy)} \\ &= \frac{-2xy + i(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2xy}{x^2 + y^2} + i\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Solution (exercice 4) [Énoncé] Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. $z = 18e^{i\pi}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 18, puis on a mis en facteur le module et on a mis -1 sous forme exponentielle.
2. $z = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 7. Puis on a mis en facteur le module et on a mis $-i$ sous forme exponentielle.
3. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a calculé le module qui vaut $\sqrt{2}$ et on l'a mis en facteur.
4. On commence par mettre $1 + i$ sous forme exponentielle et on obtient que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi on obtient que $(1 + i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
5. $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Ici on peut par exemple mettre sous forme exponentielle d'un côté le numérateur et de l'autre côté le dénominateur. Puis on utilise les propriétés sur les quotients d'exponentielles.
6. Ici le calcul du module donne $|z| = 2$ car pour tout $\theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1$. On a donc : $z = 2\left(-1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$. Ainsi on a : $z = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$.
7. Même type de calcul qui utilise les propriétés de l'exponentielle. Ici le module vaut $10 \times 2^6 = 640$ et on obtient que $z = 640e^{i\frac{-27\pi}{4}}$. On simplifie alors $e^{i\frac{-27\pi}{4}}$ en remarquant par exemple que $\frac{-27\pi}{4} = \frac{-28\pi + \pi}{4} = -7\pi + \frac{\pi}{4}$. Ainsi on a : $e^{i\frac{-27\pi}{4}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $z = 640e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
8. $z = 5e^{i(\frac{2\pi}{3} + \pi)} = 5e^{i\frac{7\pi}{3}}$. En effet on a : $z = -5e^{i\frac{2\pi}{3}} = 5e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
9. Mettons tout d'abord sous forme exponentielle $Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$. On a $|Z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

ainsi,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} j.$$

Ainsi comme $z = \frac{1}{Z}$, on obtient : $z = \sqrt{3} e^{-i \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} j^2$.

10. On commence par mettre ce qui est à l'intérieur de la parenthèse sous forme exponentielle. Comme c'est un quotient, on met sous forme exponentielle de façon séparée le numérateur et le dénominateur et on obtient que : $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}} \right)^{20} \\ &= 2^{10} e^{i \frac{140\pi}{12}} = 2^{10} e^{i \frac{35\pi}{3}} \\ &= 2^{10} e^{i \pi (10 + \frac{5}{3})} = 2^{10} \times e^{10i\pi} \times e^{i \frac{5\pi}{3}} \\ &= 2^{10} e^{i \frac{5\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Ainsi on a : $z = 2^{10} e^{i \frac{5\pi}{3}}$.

11. Commençons par calculer le module. Le formulaire de trigonométrie donne $|z| = |\cos \theta|$. Il faut donc discuter selon le signe du cosinus.

- Si $\cos \theta \geq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors

$$z = \cos \theta \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta e^{-i\theta}.$$

- Si $\cos \theta \leq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors

$$z = -\cos \theta \times \frac{-1}{\cos \theta + i \sin \theta} = -\cos \theta e^{i\pi} e^{-i\theta} = -\cos \theta e^{i(\pi-\theta)}.$$

12. Ici plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple commencer par simplifier le quotient $\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)}$. On obtient en utilisant la définition de la tangente :

$$\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{\frac{\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos(\theta)-i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{\cos(\theta)-i \sin(\theta)}.$$

Il suffit alors de remarquer que : $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ et que $\cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$ en utilisant la définition de $e^{i\theta}$, la parité du cosinus et l'impairité du sinus. Ainsi on obtient que : $\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$. En passant à la puissance n , on obtient que : $z = e^{2i\theta}$.

Solution (exercice 5) [Énoncé] Soit $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$. En factorisant par $e^{i \frac{\theta}{2}}$

au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. On peut remarquer que :

$$\frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} = \frac{1 + e^{ia}}{1 + e^{ib}}.$$

On utilise donc la méthode de l'angle moitié pour le numérateur et le dénominateur. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} &= \frac{e^{i\frac{a}{2}} 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{i\frac{b}{2}} 2 \cos\left(\frac{b}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{i\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{i\frac{b}{2}} \cos\left(\frac{b}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce nombre est bien défini car le dénominateur est bien non nul car on a supposé que b n'est pas de la forme $2k\pi + \pi$ donc $\frac{b}{2}$ n'est pas de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\cos\left(\frac{b}{2}\right)$ ne s'annule pas. On obtient donc

$$Z = \frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i \frac{a-b}{2}}.$$

- Calcul du module : $|Z| = \left| \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \right|$. Ainsi, il faut étudier des cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur du module.
- Cas 1 : Si $\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} > 0$, à savoir s'ils sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs, on obtient alors :

$$|Z| = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i \frac{a-b}{2}}.$$

Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\frac{a-b}{2}$.

- Cas 2 : Si $\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} < 0$, à savoir si l'un est négatif et l'autre positif, on ob-

tient alors :

$$|Z| = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \left(-e^{i\frac{a-b}{2}}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a-b}{2}+\pi\right)}.$$

Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\frac{a-b}{2} + \pi$.

2. On utilise le même type de raisonnement, en remarquant que :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 - (\cos\alpha - i \sin\alpha)}{1 + i(\cos\beta - i \sin\beta)} \\ &= \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + i.e^{-i\beta}} \\ &= \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite la méthode de l'angle moitié, et on distingue 3 cas :

- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} > 0$, alors $Z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.
- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 0$, alors $Z = 0$ et n'admet pas de forme exponentielle.
- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} < 0$, alors $Z = -\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. Voir cours.

- $z_1 = (1+j)^5 = (-j^2)^5 = -j^{10} = -j^9 \times j = \boxed{-j} = -e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- $z_2 = \frac{1}{(1+j)^4} = \frac{1}{(-j^2)^4} = \frac{1}{j^8} = \frac{1}{j^2}$. Or $j^3 = j^2j = 1$ donc $\frac{1}{j^2} = j$. Donc $\boxed{z_2 = j}$.
- En remarquant que $\bar{j}^2 = j$ à l'aide de la première question, on obtient :

$$\frac{1}{1-j^2} = \frac{1-j^2}{(1-j^2)(1-\bar{j}^2)} = \frac{1-j}{1-j^2-j^2-|j|^2} = \frac{1-j}{1+1+1} = \boxed{\frac{1-j}{3}}.$$

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. • **[Méthode forme exponentielle]** Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = i \iff r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^2 = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff r = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

- **[Méthode forme algébrique]** On cherche les solutions sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z^2 = i \iff a^2 - b^2 + i(2ab) = i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ |z|^2 = a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

en effectuant la somme des lignes 1 et 3. D'après la deuxième équation, a, b sont de même signe. On retrouve bien le même ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

2. Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^3 = i \iff r^3 e^{3i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^3 = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff r = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i \right\}.$$

3. Comme 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$z^4 = -4 \iff r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\iff r^4 = 4, \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \pi + 2k\pi$$

$$\iff r = \sqrt{2}, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Ainsi, les solutions sont : $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \right\}.$

4. • **[Méthode forme algébrique]** Méthode avec la forme algébrique pour les racines carrées d'un nombre complexe. On cherche donc z

sous la forme $z = x + iy$. On obtient donc

$$z^2 = 24 + 10i \iff (x + iy)^2 = 24 + 10i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2xy = 10. \end{cases}$$

Calculons désormais le module de $24 + 10i$.

$$|24 + 10i| = 2 \times |12 + 5i| = 2 \times \sqrt{144 + 25} = 2\sqrt{169} = 2 \times 13 = 26.$$

Ainsi :

$$z^2 = 24 + 10i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$$

En additionnant les lignes (1) et (3), on déduit $2x^2 = 50$ soit $x = \pm 5$. En formant (3) – (1) on obtient $y^2 = 1$ soit $y = \pm 1$. En tenant compte de (2) on trouve $(x, y) = (5, 1)$ ou $(x, y) = (-5, -1)$. Inversement, ces deux couples sont bien solution du système initial.

Ainsi, les solutions sont $\mathcal{S} = \{-5 - i, 5 + i\}$.

- **[Méthode forme exponentielle]** On commence par essayer d'appliquer la méthode du cours et on cherche donc à mettre $24 + 10i$ sous forme exponentielle. On ne trouve pas de forme exponentielle simple, cette méthode n'est pas applicable.

5. 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient

$$z^4 = j \iff r^4 e^{4i\theta} = j$$

$$\iff \begin{cases} r^4 = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}} \right\}$.

Solution (exercice 11) [Énoncé]

1. D'après le cours, l'ensemble des solutions (cherchées sous forme trigonométrique) est : $\mathcal{S} = \bigcup_n \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.
2. On peut tout de suite remarquer que $z = 1$ n'est pas solution. On obtient alors pour tout $z \neq 1$, en utilisant la question précédente,

$$z^n = (z-1)^n \iff \left(\frac{z}{z-1} \right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1).$$

Si $k = 0$, $z = z-1$ n'a pas de solution. Ainsi, on peut prendre $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

On obtient alors

$$z^n = (z-1)^n \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = \frac{-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \times (-2i \sin(\frac{k\pi}{n}))}$$

$$\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{ik\pi}{n}} \frac{-i}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} = \frac{1}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} e^{i \frac{k\pi}{n} + \frac{3\pi}{2}}.$$

Donc on a : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} e^{i \frac{k\pi}{n} + \frac{3\pi}{2}} \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$

Comme dans la question précédente, on cherche à se ramener à la première question.

- Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z-1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(z+1)^n = (z-1)^n \iff \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 1.$$

D'après la première question, on a :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1.$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien non nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \iff e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$$

$$\iff \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi$$

$$\iff k = nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.

- ♦ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
- ♦ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -i \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$$

en utilisant la méthode de l'angle moitié.

- Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = -i \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right\}.$

Solution (exercice 14) [Énoncé]

- Soit z une solution, alors passons au module : $|1+iz|^3 \frac{1}{|\cos \varphi|} = |1-iz|^3 \frac{1}{|\cos \varphi|}$ puisque $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. Donc en multipliant par $|\cos \varphi|$ et en utilisant la positivité des modules, on obtient : $|1+iz| = |1-iz|$. Élevons ceci au carré, on a alors :

$$|1+iz| = |1-iz|$$

$$\iff |1+iz|^2 = |1-iz|^2$$

$$\iff (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z})$$

$$\iff 1-i\bar{z}+iz+|z|^2 = 1-iz+i\bar{z}+|z|^2$$

$$\iff z = \bar{z}.$$

Donc $z \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et nous avons montré que z est réel. Posons dès lors, puisque $z \in \mathbb{R}$, $z = \tan \theta$ et résolvons l'équation ci-dessous en $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$(1+i \tan \theta)^3 (1-i \tan \theta) = (1-i \tan \theta)^3 (1+i \tan \theta).$$

Elle est équivalente à

$$\left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^3 = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta},$$

ou encore, en multipliant par $\cos \theta$, $\cos \varphi$, au numérateur et dénominateur,

$$\left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \right)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} \right)^3 = e^{6i\theta}$$

$$= \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$$

Donc on est amené à résoudre en $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$e^{6i\theta} = e^{2i\varphi}.$$

D'où $6\theta = 2\varphi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $\theta = \frac{\varphi+k\pi}{3}$. On ne garde ensuite que les solutions dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \tan\left(\frac{\varphi+k\pi}{3}\right), \quad \frac{\varphi+k\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}.$$

Solution (exercice 15) [Énoncé]

- On utilise la formule d'EULER, puis on développe grâce à la formule du binôme de NEWTON. Il suffit ensuite de rassembler les exponentielles conjuguées, et d'appliquer à nouveau la formule d'EULER dans l'autre sens.

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{32i} (2i \sin(5x) - 5(2i \sin(3x)) + 10(2i \sin(x))) \end{aligned}$$

On obtient finalement : $\sin^5 x = \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin x$.

- Attention de ne pas linéariser séparément les deux termes ! Il faut ici développer toutes les exponentielles, avant de repasser aux cosinus et sinus.

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{-1}{8i} \times \frac{1}{4} \times (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{-1}{32i} (e^{5ix} + 2e^{3ix} + e^{ix} - 3e^{3ix} - 6e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} + 6e^{-ix} \\ &\quad + 3e^{-3ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{-1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{-1}{32i} (2i \sin(5x) - 2i \sin(3x) - 4i \sin x). \end{aligned}$$

On obtient : $\sin^3 x \cos^2 x = -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin x}{8}$.

- On obtient : $\cos^6 x = \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} + \frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{5}{8}$.

On obtient : $\sin^6(x) = -\frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3}{16} \cos(4x) - \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{5}{16}$.

- On obtient : $\sin^4(x) \cos^3(x) = \frac{1}{2^6} (\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x))$.

Solution (exercice 16) [Énoncé]

- Il s'agit ici d'utiliser la formule de MOIVRE pour exprimer le cosinus comme la partie réelle d'une exponentielle complexe, et le sinus comme sa partie

imaginaire. Puis on calcule l'exponentielle comme une puissance, en développant grâce à la formule du binôme de NEWTON, et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire.

- On a $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix})$. On a de plus :

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 \iff (\cos x + i \sin x)^3 \\ = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.$$

On a donc $\cos(3x) = \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$, soit, en utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

- De même, on remarque que $\sin(4x) = \operatorname{Im}(e^{4ix})$. La même méthode donne :
 $\sin(4x) = 4 \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \cos x \sin x (1 - 2 \sin^2 x).$

- On applique la même méthode, et on obtient :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x)$$

$$\sin(5x) = \sin^5(x) - 10 \cos^2(x) \sin^3(x) + 5 \cos^4(x) \sin(x).$$

- On commence par exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ uniquement :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10 \cos^3(x)(1 - \cos^2(x)) + 5 \cos(x)(1 - \cos^2(x))^2 \\ = 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5.$$

En prenant $x = \frac{\pi}{10}$ dans la relation précédente, on a alors :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 16 \cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5.$$

En remarquant que $\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on obtient que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation :

$$16X^5 - 20X^3 + 5 = 0 \iff X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0.$$

Ainsi c'est équivalent à : $X = 0$ ou à $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$, on doit donc résoudre : $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. On pose encore $Y = X^2$ afin de se ramener à une équation du second degré en Y et on obtient : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Les solutions sont alors $Y = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $Y = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Ainsi, comme $Y = X^2$, on a

$$X = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $\frac{\pi}{10} \in [0, \frac{\pi}{6}]$, on sait, le cosinus étant décroissant sur cet intervalle que : $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) < 1$. En particulier, il ne peut pas être né-

gatif, donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ vaut $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Or on a :

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \iff 2 < 5 - \sqrt{5} < 3$$

$$\iff \frac{1}{4} < \frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8}$$

$$\iff \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

En particulier, on a : $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, et donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Solution (exercice 18) [Énoncé] Commençons par calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)},$$

il suffira ensuite de calculer la partie réelle et imaginaire.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} = e^{i\alpha} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\beta})^k \\ = e^{i\alpha} (1 + e^{i\beta})^n \\ = e^{i\alpha} \left(e^{i\frac{\beta}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \right)^n, \\ = e^{i\alpha + ni\frac{\beta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

On déduit alors les parties réelles et imaginaires,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} \right) \\ = 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right), \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} \right) \\ = 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right).$$

Solution (exercice 20) [Énoncé] L'appartenance au cercle en question s'exprime à l'aide de l'abscisse du centre et d'un module. L'abscisse du centre du cercle est $\frac{a+b}{2}$, et la distance d'un point $M(z)$ au centre est

$$\left| z - \frac{a+b}{2} \right|.$$

Ainsi, la condition d'appartenance au cercle est la suivante :

$$\begin{aligned} M(z) \in \Gamma &\iff \left| z - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2} \\ &\iff \left| z - \frac{a+b}{2} \right|^2 = \frac{|b-a|^2}{4} \quad \text{élévation au carré} \\ &\iff \left(z - \frac{a+b}{2} \right) \overline{\left(z - \frac{a+b}{2} \right)} = \frac{1}{4} (b-a) \overline{(b-a)} \\ &\iff (2z - a + b) \overline{(2z - a + b)} = (b-a) \overline{(b-a)} \\ &\iff (2z - a - b)(2\bar{z} - \bar{a} - \bar{b}) = (b-a)(\bar{b} - \bar{a}) \\ &\iff 4|z|^2 - 2z\bar{a}b - 2z\bar{b}a - 2a\bar{z} + |a|^2 + a\bar{b} - 2b\bar{z} + b\bar{a} + |b|^2 \\ &\quad = |b|^2 + |a|^2 - b\bar{a} - \bar{b}a. \end{aligned}$$

En simplifiant et en divisant par deux, on trouve la condition de l'énoncé :

$$2z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})z - (a + b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.$$

Solution (exercice 22) [Énoncé]

1. Comme l'affixe c contient $\bar{z}$ au dénominateur, on suppose tout d'abord $z \neq 0$. On peut alors écrire

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0.$$

On obtient

$$b = \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad c = \frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{\rho^2 e^{2i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = \rho e^{3i\theta}.$$

Ainsi, un argument de b est $-\theta$, tandis qu'un argument de c est 3θ .

Étudions maintenant les éventuelles coïncidences :

$$A = B \iff \theta \equiv -\theta \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\pi},$$

$$A = C \iff \theta \equiv 3\theta \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\pi},$$

et

$$B = C \iff -\theta \equiv 3\theta \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Les points A, B et C sont donc deux à deux distincts si et seulement si

$$z \neq 0 \quad \text{et} \quad \theta \not\equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Autrement dit, z ne doit appartenir ni à l'axe réel ni à l'axe imaginaire.

2. On a

$$|a| = |b| = |c| = \rho.$$

Les points A, B et C appartiennent donc au cercle de centre O et de rayon ρ .

3. D'une part,

$$AB = |b - a| = \rho |e^{-i\theta} - e^{i\theta}|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} AC &= |c - a| = \rho |e^{3i\theta} - e^{i\theta}| \\ &= \rho |e^{2i\theta}| |e^{i\theta} - e^{-i\theta}| \\ &= \rho |e^{i\theta} - e^{-i\theta}|, \end{aligned}$$

car $|e^{2i\theta}| = 1$. Par conséquent,

$$AB = AC.$$

4. Le point B, d'affixe $\bar{z}$, est le symétrique de A par rapport à l'axe réel.

Pour construire C, on trace le cercle de centre O passant par A, puis le cercle de centre A passant par B. D'après les deux questions précédentes, B et C sont les deux points d'intersection de ces cercles. Le point C est donc leur point d'intersection autre que B.

5. On pose

$$Z = \frac{a - c}{b - c}.$$

Le dénominateur est non nul puisque les points sont supposés deux à deux distincts.

- 5.1) En utilisant les formes exponentielles obtenues à la première question, on trouve

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{i\theta} - e^{3i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{3i\theta}} \\ &= \frac{e^{2i\theta} (e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{e^{i\theta} (e^{-2i\theta} - e^{2i\theta})} \\ &= e^{i\theta} \frac{-2i \sin(\theta)}{-2i \sin(2\theta)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Z = \frac{\sin(\theta) e^{i\theta}}{\sin(2\theta)}.$$

- 5.2) Puisque θ n'est pas un multiple de $\pi/2$, on a notamment $\sin(\theta) \neq 0$ et $\sin(2\theta) \neq 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\iff |\sin(\theta)| = |\sin(2\theta)| \\ &\iff |\sin(\theta)| = 2 |\sin(\theta)| |\cos(\theta)| \\ &\iff |\cos(\theta)| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|Z| = 1 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ ou } -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

- 5.3) On sait déjà que $AB = AC$. Le triangle ABC est donc équilatéral si et

seulement si $AC = BC$. Or

$$AC = BC \iff \frac{|a - c|}{|b - c|} = 1 \iff |Z| = 1.$$

L'ensemble recherché est ainsi la réunion des quatre demi-droites ouvertes d'origine O et d'arguments

$$\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{2\pi}{3}.$$

De manière équivalente, il s'agit de la réunion des deux droites d'équations

$$y = \sqrt{3}x \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{3}x,$$

privées du point O .

Solution (exercice 1) [Énoncé] Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. $z = \sqrt{2} + 5i$. On utilise ici une identité remarquable.
2. $z = -\frac{19}{26} + i\frac{9}{26}$. On a un quotient de nombres complexes dont on veut la forme algébrique : on multiplie par le conjugué du dénominateur.
3. $z = -1$. Là encore il y a plusieurs méthodes qui marchent bien. Une possibilité est de mettre sous forme exponentielle $1 + i$ d'un côté et $1 - i$ de l'autre côté puis de les passer au carré et enfin de faire le quotient.
4. $z = -1 + i$. On peut par exemple commencer par tout mettre sous le même dénominateur en bas et on obtient $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{-i} = i(1+i)$.
5. On peut par exemple mettre sous forme algébrique chaque terme de la somme de façon séparée en multipliant par le conjugué puis on les somme.
6. $z = 65 - 142i$. On utilise une identité remarquable.
7. $z = \frac{14}{221} - i\frac{5}{221}$. On peut multiplier par le conjugué du dénominateur à savoir $(4+i)(3-2i)$.
8. $z = \frac{69}{29} - i\frac{17}{29}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur.
9. $z = -47 + 8\sqrt{3}i$. On développe avec le binôme de NEWTON.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. On remplace z par $x + iy$ et $\bar{z}$ par $x - iy$, puis on mène le calcul comme d'habitude. On a donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x - iy}{x + iy} \\ &= \frac{(x - iy)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 2\frac{xy}{x^2 + y^2}i \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{i(x + iy)}{x - iy} \\ &= \frac{-y + ix}{x - iy} \\ &= \frac{(-y + ix)(x + iy)}{(x - iy)(x + iy)} \\ &= \frac{-2xy + i(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2xy}{x^2 + y^2} + i\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Solution (exercice 4) [Énoncé] Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. $z = 18e^{i\pi}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 18, puis on a mis en facteur le module et on a mis -1 sous forme exponentielle.
2. $z = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 7. Puis on a mis en facteur le module et on a mis $-i$ sous forme exponentielle.
3. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a calculé le module qui vaut $\sqrt{2}$ et on l'a mis en facteur.
4. On commence par mettre $1 + i$ sous forme exponentielle et on obtient que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi on obtient que $(1 + i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
5. $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Ici on peut par exemple mettre sous forme exponentielle d'un côté le numérateur et de l'autre côté le dénominateur. Puis on utilise les propriétés sur les quotients d'exponentielles.
6. Ici le calcul du module donne $|z| = 2$ car pour tout $\theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1$. On a donc : $z = 2\left(-1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\pi\frac{1}{4}}\right) = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$. Ainsi on a : $z = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$.
7. Même type de calcul qui utilise les propriétés de l'exponentielle. Ici le module vaut $10 \times 2^6 = 640$ et on obtient que $z = 640e^{i\frac{-27\pi}{4}}$. On simplifie alors $e^{i\frac{-27\pi}{4}}$ en remarquant par exemple que $\frac{-27\pi}{4} = \frac{-28\pi + \pi}{4} = -7\pi + \frac{\pi}{4}$. Ainsi on a : $e^{i\frac{-27\pi}{4}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $z = 640e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
8. $z = 5e^{i(\frac{2\pi}{3} + \pi)} = 5e^{i\frac{7\pi}{3}}$. En effet on a : $z = -5e^{i\frac{2\pi}{3}} = 5e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
9. Mettons tout d'abord sous forme exponentielle $Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$. On a $|Z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

ainsi,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} j.$$

Ainsi comme $z = \frac{1}{Z}$, on obtient : $z = \sqrt{3} e^{-i \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} j^2$.

10. On commence par mettre ce qui est à l'intérieur de la parenthèse sous forme exponentielle. Comme c'est un quotient, on met sous forme exponentielle de façon séparée le numérateur et le dénominateur et on obtient que : $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}} \right)^{20} \\ &= 2^{10} e^{i\frac{140\pi}{12}} = 2^{10} e^{i\frac{35\pi}{3}} \\ &= 2^{10} e^{i\pi(10+\frac{5}{3})} = 2^{10} \times e^{10i\pi} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} \\ &= 2^{10} e^{i\frac{5\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Ainsi on a : $z = 2^{10} e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

11. Commençons par calculer le module. Le formulaire de trigonométrie donne $|z| = |\cos \theta|$. Il faut donc discuter selon le signe du cosinus.

- Si $\cos \theta \geq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors

$$z = \cos \theta \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta e^{-i\theta}.$$

- Si $\cos \theta \leq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors

$$z = -\cos \theta \times \frac{-1}{\cos \theta + i \sin \theta} = -\cos \theta e^{i\pi} e^{-i\theta} = -\cos \theta e^{i(\pi-\theta)}.$$

12. Ici plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple commencer par simplifier le quotient $\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)}$. On obtient en utilisant la définition de la tangente :

$$\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{\frac{\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos(\theta)-i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{\cos(\theta)-i \sin(\theta)}.$$

Il suffit alors de remarquer que : $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ et que $\cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$ en utilisant la définition de $e^{i\theta}$, la parité du cosinus et l'imparité du sinus. Ainsi on obtient que : $\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$. En passant à la puissance n , on obtient que : $z = e^{2i\theta}$.

Solution (exercice 5) [Énoncé] Soit $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$. En factorisant par $e^{i\frac{\theta}{2}}$

au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} &= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. On peut remarquer que :

$$\frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} = \frac{1 + e^{ia}}{1 + e^{ib}}.$$

On utilise donc la méthode de l'angle moitié pour le numérateur et le dénominateur. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} &= \frac{e^{i\frac{a}{2}} 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{i\frac{b}{2}} 2 \cos\left(\frac{b}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{i\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{i\frac{b}{2}} \cos\left(\frac{b}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce nombre est bien défini car le dénominateur est bien non nul car on a supposé que b n'est pas de la forme $2k\pi + \pi$ donc $\frac{b}{2}$ n'est pas de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\cos\left(\frac{b}{2}\right)$ ne s'annule pas. On obtient donc

$$Z = \frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{a-b}{2}}.$$

- Calcul du module : $|Z| = \left| \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \right|$. Ainsi, il faut étudier des cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur du module.
- Cas 1 : Si $\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} > 0$, à savoir s'ils sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs, on obtient alors :

$$|Z| = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{a-b}{2}}.$$

Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\frac{a-b}{2}$.

- Cas 2 : Si $\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} < 0$, à savoir si l'un est négatif et l'autre positif, on ob-

tient alors :

$$|Z| = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \left(-e^{i\frac{a-b}{2}}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a-b}{2}+\pi\right)}.$$

Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\frac{a-b}{2} + \pi$.

2. On utilise le même type de raisonnement, en remarquant que :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 - (\cos\alpha - i \sin\alpha)}{1 + i(\cos\beta - i \sin\beta)} \\ &= \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + i.e^{-i\beta}} \\ &= \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite la méthode de l'angle moitié, et on distingue 3 cas :

- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} > 0$, alors $Z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.
- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 0$, alors $Z = 0$ et n'admet pas de forme exponentielle.
- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} < 0$, alors $Z = -\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. Voir cours.

- $z_1 = (1+j)^5 = (-j^2)^5 = -j^{10} = -j^9 \times j = \boxed{-j} = -e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- $z_2 = \frac{1}{(1+j)^4} = \frac{1}{(-j^2)^4} = \frac{1}{j^8} = \frac{1}{j^2}$. Or $j^3 = j^2j = 1$ donc $\frac{1}{j^2} = j$. Donc $\boxed{z_2 = j}$.
- En remarquant que $\bar{j}^2 = j$ à l'aide de la première question, on obtient :

$$\frac{1}{1-j^2} = \frac{1-j^2}{(1-j^2)(1-\bar{j}^2)} = \frac{1-j}{1-j^2-j^2-|j|^2} = \frac{1-j}{1+1+1} = \boxed{\frac{1-j}{3}}.$$

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. • **[Méthode forme exponentielle]** Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = i \iff r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^2 = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff r = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

- **[Méthode forme algébrique]** On cherche les solutions sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z^2 = i \iff a^2 - b^2 + i(2ab) = i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ |z|^2 = a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

en effectuant la somme des lignes 1 et 3. D'après la deuxième équation, a, b sont de même signe. On retrouve bien le même ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

2. Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^3 = i \iff r^3 e^{3i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^3 = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff r = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i \right\}.$$

3. Comme 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$z^4 = -4 \iff r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\iff r^4 = 4, \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \pi + 2k\pi$$

$$\iff r = \sqrt{2}, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Ainsi, les solutions sont : $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \right\}.$

4. • **[Méthode forme algébrique]** Méthode avec la forme algébrique pour les racines carrées d'un nombre complexe. On cherche donc z

sous la forme $z = x + iy$. On obtient donc

$$z^2 = 24 + 10i \iff (x + iy)^2 = 24 + 10i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2xy = 10. \end{cases}$$

Calculons désormais le module de $24 + 10i$.

$$|24 + 10i| = 2 \times |12 + 5i| = 2 \times \sqrt{144 + 25} = 2\sqrt{169} = 2 \times 13 = 26.$$

Ainsi :

$$z^2 = 24 + 10i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$$

En additionnant les lignes (1) et (3), on déduit $2x^2 = 50$ soit $x = \pm 5$. En formant (3) - (1) on obtient $y^2 = 1$ soit $y = \pm 1$. En tenant compte de (2) on trouve $(x, y) = (5, 1)$ ou $(x, y) = (-5, -1)$. Inversement, ces deux couples sont bien solution du système initial.

Ainsi, les solutions sont $\mathcal{S} = \{-5 - i, 5 + i\}$.

- **[Méthode forme exponentielle]** On commence par essayer d'appliquer la méthode du cours et on cherche donc à mettre $24 + 10i$ sous forme exponentielle. On ne trouve pas de forme exponentielle simple, cette méthode n'est pas applicable.

5. 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient

$$z^4 = j \iff r^4 e^{4i\theta} = j$$

$$\iff \begin{cases} r^4 = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}} \right\}$.

Solution (exercice 11) [Énoncé]

1. D'après le cours, l'ensemble des solutions (cherchées sous forme trigonométrique) est : $\mathcal{S} = \bigcup_n \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.
2. On peut tout de suite remarquer que $z = 1$ n'est pas solution. On obtient alors pour tout $z \neq 1$, en utilisant la question précédente,

$$z^n = (z-1)^n \iff \left(\frac{z}{z-1} \right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1).$$

Si $k = 0$, $z = z-1$ n'a pas de solution. Ainsi, on peut prendre $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

On obtient alors

$$z^n = (z-1)^n \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = \frac{-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \times (-2i \sin(\frac{k\pi}{n}))}$$

$$\iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{ik\pi}{n}} \frac{-i}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} = \frac{1}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} e^{i \frac{k\pi}{n} + \frac{3\pi}{2}}.$$

Donc on a : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} e^{i \frac{k\pi}{n} + \frac{3\pi}{2}} \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$

Comme dans la question précédente, on cherche à se ramener à la première question.

- Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z-1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(z+1)^n = (z-1)^n \iff \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 1.$$

D'après la première question, on a :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1.$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien non nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \iff e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$$

$$\iff \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi$$

$$\iff k = nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.

- ♦ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
- ♦ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -i \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$$

en utilisant la méthode de l'angle moitié.

- Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = -i \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right\}.$

Solution (exercice 14) [Énoncé]

- Soit z une solution, alors passons au module : $|1+iz|^3 \frac{1}{|\cos \varphi|} = |1-iz|^3 \frac{1}{|\cos \varphi|}$ puisque $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. Donc en multipliant par $|\cos \varphi|$ et en utilisant la positivité des modules, on obtient : $|1+iz| = |1-iz|$. Élevons ceci au carré, on a alors :

$$\begin{aligned} |1+iz| &= |1-iz| \\ \Leftrightarrow |1+iz|^2 &= |1-iz|^2 \\ \Leftrightarrow (1+iz)(1-i\bar{z}) &= (1-iz)(1+i\bar{z}) \\ \Leftrightarrow 1-i\bar{z}+iz+|z|^2 &= 1-iz+i\bar{z}+|z|^2 \\ \Leftrightarrow z &= \bar{z}. \end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et nous avons montré que z est réel. Posons dès lors, puisque $z \in \mathbb{R}$, $z = \tan \theta$ et résolvons l'équation ci-dessous en $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$(1+i \tan \theta)^3 (1-i \tan \theta) = (1-i \tan \theta)^3 (1+i \tan \theta).$$

Elle est équivalente à

$$\left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^3 = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta},$$

ou encore, en multipliant par $\cos \theta$, $\cos \varphi$, au numérateur et dénominateur,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \right)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} \right)^3 = e^{6i\theta} \\ &= \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi} \end{aligned}$$

Donc on est amené à résoudre en $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$e^{6i\theta} = e^{2i\varphi}.$$

D'où $6\theta = 2\varphi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $\theta = \frac{\varphi+k\pi}{3}$. On ne garde ensuite que les solutions dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \tan\left(\frac{\varphi+k\pi}{3}\right), \quad \frac{\varphi+k\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}.$$

Solution (exercice 15) [Énoncé]

- On utilise la formule d'EULER, puis on développe grâce à la formule du binôme de NEWTON. Il suffit ensuite de rassembler les exponentielles conjuguées, et d'appliquer à nouveau la formule d'EULER dans l'autre sens.

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\ &= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{32i} (2i \sin(5x) - 5(2i \sin(3x)) + 10(2i \sin(x))) \end{aligned}$$

On obtient finalement : $\sin^5 x = \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin x$.

- Attention de ne pas linéariser séparément les deux termes ! Il faut ici développer toutes les exponentielles, avant de repasser aux cosinus et sinus.

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{-1}{8i} \times \frac{1}{4} \times (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{-1}{32i} (e^{5ix} + 2e^{3ix} + e^{ix} - 3e^{3ix} - 6e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} + 6e^{-ix} \\ &\quad + 3e^{-3ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{-1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{-1}{32i} (2i \sin(5x) - 2i \sin(3x) - 4i \sin x). \end{aligned}$$

On obtient : $\sin^3 x \cos^2 x = -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin x}{8}$.

- On obtient : $\cos^6 x = \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} + \frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{5}{8}$.

On obtient : $\sin^6(x) = -\frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3}{16} \cos(4x) - \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{5}{16}$.

- On obtient : $\sin^4(x) \cos^3(x) = \frac{1}{2^6} (\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x))$.

Solution (exercice 16) [Énoncé]

- Il s'agit ici d'utiliser la formule de MOIVRE pour exprimer le cosinus comme la partie réelle d'une exponentielle complexe, et le sinus comme sa partie

imaginaire. Puis on calcule l'exponentielle comme une puissance, en développant grâce à la formule du binôme de NEWTON, et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire.

- On a $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix})$. On a de plus :

$$e^{3ix} = (e^{ix})^3 \iff (\cos x + i \sin x)^3 \\ = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.$$

On a donc $\cos(3x) = \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$, soit, en utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

- De même, on remarque que $\sin(4x) = \operatorname{Im}(e^{4ix})$. La même méthode donne :

$$\sin(4x) = 4 \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \cos x \sin x (1 - 2 \sin^2 x).$$

2. • On applique la même méthode, et on obtient :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x)$$

$$\sin(5x) = \sin^5(x) - 10 \cos^2(x) \sin^3(x) + 5 \cos^4(x) \sin(x).$$

- On commence par exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ uniquement :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10 \cos^3(x)(1 - \cos^2(x)) + 5 \cos(x)(1 - \cos^2(x))^2 \\ = 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5.$$

En prenant $x = \frac{\pi}{10}$ dans la relation précédente, on a alors :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 16 \cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5.$$

En remarquant que $\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on obtient que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation :

$$16X^5 - 20X^3 + 5 = 0 \iff X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0.$$

Ainsi c'est équivalent à : $X = 0$ ou à $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$, on doit donc résoudre : $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. On pose encore $Y = X^2$ afin de se ramener à une équation du second degré en Y et on obtient : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Les solutions sont alors $Y = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $Y = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Ainsi, comme $Y = X^2$, on a

$$X = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $\frac{\pi}{10} \in [0, \frac{\pi}{6}]$, on sait, le cosinus étant décroissant sur cet intervalle que : $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) < 1$. En particulier, il ne peut pas être né-

gatif, donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ vaut $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Or on a :

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \iff 2 < 5 - \sqrt{5} < 3$$

$$\iff \frac{1}{4} < \frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8}$$

$$\iff \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

En particulier, on a : $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, et donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Solution (exercice 18) [Énoncé] Commençons par calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)},$$

il suffira ensuite de calculer la partie réelle et imaginaire.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} &= e^{i\alpha} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\beta})^k \\ &= e^{i\alpha} (1 + e^{i\beta})^n \\ &= e^{i\alpha} \left(e^{i\frac{\beta}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \right)^n, \\ &= e^{i\alpha + ni\frac{\beta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

On déduit alors les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} \right) \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right), \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} \right) \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Solution (exercice 20) [Énoncé] L'appartenance au cercle en question s'exprime à l'aide de l'abscisse du centre et d'un module. L'abscisse du centre du cercle est $\frac{a+b}{2}$, et la distance d'un point $M(z)$ au centre est

$$\left| z - \frac{a+b}{2} \right|.$$

Ainsi, la condition d'appartenance au cercle est la suivante :

$$\begin{aligned} M(z) \in \Gamma &\iff \left| z - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2} \\ &\iff \left| z - \frac{a+b}{2} \right|^2 = \frac{|b-a|^2}{4} \quad \text{élévation au carré} \\ &\iff \left(z - \frac{a+b}{2} \right) \overline{\left(z - \frac{a+b}{2} \right)} = \frac{1}{4} (b-a) \overline{(b-a)} \\ &\iff (2z - a + b) \overline{(2z - a + b)} = (b-a) \overline{(b-a)} \\ &\iff (2z - a - b)(2\bar{z} - \bar{a} - \bar{b}) = (b-a)(\bar{b} - \bar{a}) \\ &\iff 4|z|^2 - 2z\bar{a}b - 2z\bar{b}a - 2a\bar{z} + |a|^2 + a\bar{b} - 2b\bar{z} + b\bar{a} + |b|^2 \\ &\quad = |b|^2 + |a|^2 - b\bar{a} - \bar{b}a. \end{aligned}$$

En simplifiant et en divisant par deux, on trouve la condition de l'énoncé :

$$2z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})z - (a + b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.$$

Solution (exercice 22) [Énoncé]

1. Comme l'affixe c contient $\bar{z}$ au dénominateur, on suppose tout d'abord $z \neq 0$. On peut alors écrire

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0.$$

On obtient

$$b = \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad c = \frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{\rho^2 e^{2i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = \rho e^{3i\theta}.$$

Ainsi, un argument de b est $-\theta$, tandis qu'un argument de c est 3θ .

Étudions maintenant les éventuelles coïncidences :

$$A = B \iff \theta \equiv -\theta \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\pi},$$

$$A = C \iff \theta \equiv 3\theta \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\pi},$$

et

$$B = C \iff -\theta \equiv 3\theta \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Les points A, B et C sont donc deux à deux distincts si et seulement si

$$z \neq 0 \quad \text{et} \quad \theta \not\equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Autrement dit, z ne doit appartenir ni à l'axe réel ni à l'axe imaginaire.

2. On a

$$|a| = |b| = |c| = \rho.$$

Les points A, B et C appartiennent donc au cercle de centre O et de rayon ρ .

3. D'une part,

$$AB = |b - a| = \rho |e^{-i\theta} - e^{i\theta}|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} AC &= |c - a| = \rho |e^{3i\theta} - e^{i\theta}| \\ &= \rho |e^{2i\theta}| |e^{i\theta} - e^{-i\theta}| \\ &= \rho |e^{i\theta} - e^{-i\theta}|, \end{aligned}$$

car $|e^{2i\theta}| = 1$. Par conséquent,

$$AB = AC.$$

4. Le point B, d'affixe $\bar{z}$, est le symétrique de A par rapport à l'axe réel.

Pour construire C, on trace le cercle de centre O passant par A, puis le cercle de centre A passant par B. D'après les deux questions précédentes, B et C sont les deux points d'intersection de ces cercles. Le point C est donc leur point d'intersection autre que B.

5. On pose

$$Z = \frac{a - c}{b - c}.$$

Le dénominateur est non nul puisque les points sont supposés deux à deux distincts.

- 5.1) En utilisant les formes exponentielles obtenues à la première question, on trouve

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{i\theta} - e^{3i\theta}}{e^{-i\theta} - e^{3i\theta}} \\ &= \frac{e^{2i\theta} (e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{e^{i\theta} (e^{-2i\theta} - e^{2i\theta})} \\ &= e^{i\theta} \frac{-2i \sin(\theta)}{-2i \sin(2\theta)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Z = \frac{\sin(\theta) e^{i\theta}}{\sin(2\theta)}.$$

- 5.2) Puisque θ n'est pas un multiple de $\pi/2$, on a notamment $\sin(\theta) \neq 0$ et $\sin(2\theta) \neq 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\iff |\sin(\theta)| = |\sin(2\theta)| \\ &\iff |\sin(\theta)| = 2 |\sin(\theta)| |\cos(\theta)| \\ &\iff |\cos(\theta)| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|Z| = 1 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ ou } -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

- 5.3) On sait déjà que $AB = AC$. Le triangle ABC est donc équilatéral si et

seulement si $AC = BC$. Or

$$AC = BC \iff \frac{|a - c|}{|b - c|} = 1 \iff |Z| = 1.$$

L'ensemble recherché est ainsi la réunion des quatre demi-droites ouvertes d'origine O et d'arguments

$$\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{2\pi}{3}.$$

De manière équivalente, il s'agit de la réunion des deux droites d'équations

$$y = \sqrt{3}x \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{3}x,$$

privées du point O .