

# Programme de colles

## du 5 au 9/10/2026

- Cette semaine : 1 question par étudiant(e) à choisir dans la liste.
- Cette semaine, on ajoute le début des complexes (le début uniquement étant donnés les récents évènements que vous connaissez). Ne sont pas encore au programme : les équations du second degré, les racines de l'unité et  $n$ -ièmes, les applications en trigo, les sommes trigonométriques ainsi que la géométrie.

### 1 CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS



- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de BERNOULLI «  $a^{n+1} - b^{n+1}$  ». Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, PASCAL. Triangle de PASCAL, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.
- **Sommes doubles.** Sommes doubles libres, cas des indices séparables : définition et calcul. Sommes doubles sous contrainte  $i \leq j$  et contrainte  $i < j$  : définition, théorème de permutation et calculs.

### 2 NOMBRES COMPLEXES



- **Définition de  $\mathbb{C}$  et forme algébrique.** Définition de  $\mathbb{C}$  comme un sur-ensemble de  $\mathbb{R}$  contenant un élément  $i$  vérifiant  $i^2 = -1$ . Unicité de la forme algébrique.

Notation pour le complexe  $j$ . Identité remarquable  $a^2 + b^2$ . Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés (dont l'inégalité triangulaire avec cas d'égalité). Complexes de module 1.

- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de MOIVRE. Expression exponentielle de  $j$ , et propriétés de  $j$ . Formule d'EULER, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moyen pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle.

### QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner une formule en fonction de  $n$  pour  $S_n = \sum_{k=0}^n k$ ,  $n \geq 0$ . La démontrer à l'aide d'un changement d'indice par retournement.
2. Donner une formule en fonction de  $n$  pour  $T_n = \sum_{k=0}^n k^2$ ,  $n \geq 0$ . La démontrer par récurrence.
3. Soient  $n, p$  deux entiers tels que  $n \geq p$ . Déterminer une expression simplifiée de  $\sum_{k=p}^n (a_{k+2} - a_k)$  à l'aide d'un changement d'indice.
4. Énoncer et démontrer l'identité de BERNOULLI  $a^{n+1} - b^{n+1}$ .
5. Énoncer la formule du binôme et expliquer les valeurs de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .
6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$ .
7. Définir le module d'un complexe, puis rappeler l'expression à l'aide du conjugué. Démontrer que :  $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \overline{z'}) + |z'|^2$  si  $z, z' \in \mathbb{C}$ .
8. Définir le module d'un complexe, puis citer l'inégalité triangulaire (majorant, minorant et cas d'égalité). Démontrer le majorant.
9. Définir le module d'un complexe, et rappeler la définition de l'ensemble  $\mathbb{U}$ . Montrer que  $\mathbb{U}$  est stable par produit, inverse et expliciter l'inverse.
10. Définir l'exponentielle imaginaire  $e^{i\theta}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ . Énoncer et démontrer la formule de MOIVRE pour un exposant  $n \in \mathbb{N}$ .

11. Définir l'exponentielle imaginaire  $e^{i\theta}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , et citer/démontrer les formules d'EULER.

Rappeler la forme exponentielle du complexe  $j$ . En déduire : la forme algébrique de  $j$ , que  $j^3 = 1$ , et enfin que  $1 + j + j^2 = 0$ .

12. Définir  $e^z$  pour  $z \in \mathbb{C}$ . Puis :

- démontrer que :  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .
- Résoudre  $e^z = 1 + i$  sur  $\mathbb{C}$ .

*À venir (on espère) : les nombres complexes au complet, et le début des compléments sur les réels.*