

Chapitre (ALG) 6 Compléments sur les Réels

- 1 Parties minorées et majorées de $\mathbb{R}$
- 2 Application : intervalles & Droite achevée
- 3 Application : partie entière
- 4 Exercices

Résumé & Plan

Ce chapitre vise à approfondir les nombres réels au travers de nouvelles notions comme les bornes supérieures / inférieures, la partie entière et des résultats de densité. C'est un cours court, mais les notions présentées sont fines, elles demanderont donc beaucoup de pratiques.

L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence.
— Charles Caleb COLTON (1777-1832), écrivain

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1 PARTIES MINORÉES ET MAJORÉES DE $\mathbb{R}$

1.1 Minorant, majorant, maximum, minimum

Définition 1 | Majorant, minorant

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est *majoré* si :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \leq M.$$

On dit alors que M est un *majorant* de l'ensemble A .
- On dit que A est *minoré* si :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \geq m.$$

On dit alors que m est un *minorant* de l'ensemble A .
- Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit *borné*, c'est-à-dire lorsque :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Exemple 1 (Négation) Écrire la négation de « A est minoré », puis « A est majoré par π ».



Attention Un ensemble majoré (*resp.* minoré) admet une infinité de majorant (*resp.* de minorants). En effet, si M est un majorant, alors par exemple $M + 1$ en est un aussi.

Exemple 2

- L'ensemble $\mathbb{N}$ est non majoré mais il est minoré par 0.
- L'ensemble $[0, 1[$ est minoré par 0 et majoré par 1 car :
 $\forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq x < 1 \leq 1.$

Exemple 3

- L'ensemble $]1, 3]$ est  borné.
- L'ensemble $] -\infty, 4]$ est  majoré mais n'est pas minoré.
- $\mathbb{Z}$  est non majoré non minoré
- $\mathbb{Q}$  n'est ni majoré, ni minoré

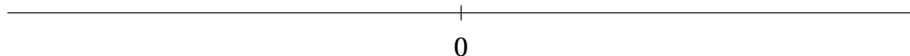
Proposition 1 | Partie bornée et valeur absolue

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Alors :

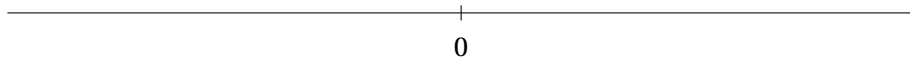
$$\begin{aligned} A \text{ est borné} &\iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in A, \quad |x| \leq M. \quad (\star) \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in A, \quad -M \leq x \leq M. \end{aligned}$$

Remarque 1 Avant de voir la démonstration ci-dessous, regardons le lien entre le caractère borné d'une partie et la valeur absolue.

- En supposant que : $\forall x \in A, \quad 1 \leq x \leq 2,$ montrer $(\star)$.



- En supposant que : $\forall x \in A, \quad -2 \leq x \leq 1,$ montrer $(\star)$.



On retient de cette remarque que : si on est borné, on se trouve dans un intervalle symétrique par rapport à zéro.

Preuve Seule la première équivalence est à justifier, la seconde ayant déjà été établie.
 Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$. Alors, pour $x \in A$ on a : $-M \leq x \leq M$. Le réel M est donc un majorant de A et $-M$ est un minorant de A , l'ensemble A est ainsi borné.

 Supposons que A est borné, soit alors M un majorant de A et m un minorant de A . On cherche $M \geq 0$ tel que : $\forall x \in A, \quad |x| \leq M$.

 Pour $x \in A$ on a :
 $x \leq M \leq |M|, \quad x \geq m \geq -|m|.$

Posons $M = \max\{|M|, |m|\}$, on a alors $|M| \leq M$ et $|m| \leq M$.
 Ainsi, pour tout $x \in A$ on a : $-M \leq -|m| \leq x \leq |M| \leq M$, c'est-à-dire : $|x| \leq M$.

Définition 2 | Minimum, maximum

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- **[Maximum]** On dit que A admet un maximum M si :

$$\begin{cases} \text{(i)} & A \text{ est majoré par } M, \\ \text{(ii)} & M \in A. \end{cases}$$
- **[Minimum]** On dit que A admet un minimum m si :

$$\begin{cases} \text{(i)} & A \text{ est minoré par } m, \\ \text{(ii)} & m \in A. \end{cases}$$
- Un minimum ou un maximum est appelé un *extremum*.

Proposition 2 | Unicité

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A possède un maximum, il est unique et on le note $\max(A)$.
- Si A possède un minimum, il est unique et on le note $\min(A)$.

Preuve Faisons par exemple la preuve pour le cas du maximum par exemple. Supposons qu'il existe M, M' deux maximum de A , et montrons que $M = M'$.



Exemple 4 Montrer que l'ensemble $A = [0, 2[$ admet un minimum et que 2 majore A . L'ensemble A possède-t-il un maximum?



Remarque 2 (Un peu d'orthographe) L'Académie Française recommande d'utiliser le pluriel « à la française » pour les mots latins finissant en « - um » comme « maximum », « minimum » ou « extremum ». En revanche, en Mathématiques, nous utiliserons des pluriels latins c'est-à-dire : « maxima », « minima » et « extrema ».

Enfin on termine avec une propriété admise sur $\mathbb{Z}$; il est impossible de la démontrer puisque la construction de $\mathbb{Z}$ est hors-programme.

Proposition 3 | Propriété fondamentale admise de $\mathbb{Z}$

Soit A une partie non-vide de $\mathbb{Z}$.

- Si A est majoré, alors A admet un maximum.
- Si A est minoré, alors A admet un minimum.

1.2 Borne supérieure & inférieure

Considérons l'intervalle $A = [0, 2[$. Nous avons déjà vu que :

- A est minorée par 0 puisque : $\forall a \in A, 0 \leq a$.
- A est majorée par 2 puisque : $\forall a \in A, a < 2 \leq 2$.

Ici, les réels 0 et 2 jouent un rôle particulier.

- 0 est un minorant, et il ne semble pas y en avoir de plus grand, et il **est dans** A . On dira que 0 est la « borne inférieure de A », et même un « minimum de A » car c'est un minorant qui appartient à l'ensemble.
- 2 est un majorant, et il ne semble pas y en avoir de plus petit, on dira que 2 est la « borne supérieure de A ». Comme il **n'est pas** dans A , on ne le qualifie pas de maximum.

Formalisons cela dans la définition/proposition qui suit.

Définition/Proposition 1 | Borne supérieure/inférieure

Soit A une partie **non-vide** de $\mathbb{R}$.

- **[Borne supérieure]** Si A est **majoré**, alors A admet un plus petit majorant, et on appelle *borne supérieure de A* le plus petit de ces majorants, noté $\sup A$.

Note

En résumé : Toute partie non-vide et majorée possède une borne supérieure

- **[Borne inférieure]** Si A est **minoré**, alors A admet un plus grand minorant, et on appelle *borne inférieure de A* le plus grand de ces minorants, noté $\inf A$.

Note

En résumé : « Toute partie non-vide et minorée possède une borne inférieure »

Nous admettons l'existence d'un plus petit/grand majorant/minorant sous les hypothèses mentionnées (toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure).

Proposition 4 | Lien avec le maximum / minimum

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée **et** $\sup A \in A$, alors A possède un maximum et : $\max A = \sup A$.
- Si A est minorée **et** $\inf A \in A$, alors A possède un minimum et : $\min A = \inf A$.

Preuve

- $\sup A$ est un majorant de A , et de plus $\sup A \in A$, donc A possède un maximum et $\max A = \sup A$ par unicité du maximum.
- Même chose.

Exemple 5 Si $A = [0, 2[$, montrons que :

$$\inf A = \min A = 0 \quad \text{et} \quad \sup A = 2.$$





Attention

Un ensemble n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Mais le plus souvent une borne supérieure ou inférieure dès qu'on travaille avec des parties non vides et majorées ou minorées.

Exemple 6 On considère les ensembles suivants

$$A = [1, 2], \quad B =]-\infty, 3], \quad C =]0, 4[, \quad D =]1, +\infty[, \quad E = \mathbb{N}, \quad F = \mathbb{R}^{+*}.$$

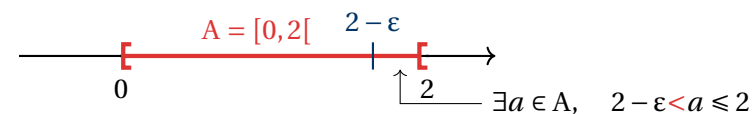
Préciser le cas échéant, sans justifier, leur max/min, sup/inf le cas échéant.



CARACTÉRISATION DE LA BORNE SUPÉRIEURE / INFÉRIEURE. Pour terminer, on souhaite traduire mathématiquement (à l'aide de quantificateurs) les portions d'assertions « plus petit majorant » et « plus grand minorant » apparaissant dans la **Définition/Proposition 1**. Reprenons l'exemple de $A = [0, 2[$. On a $2 = \sup A$, mais comment traduire que c'est le plus petit majorant? Tout simplement que toutes les réels inférieurs strictement (donc de la forme $2 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ ne seront pas un majorant).

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2 = \sup A &\iff \begin{cases} \text{(i)} & 2 \text{ est un majorant,} \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad 2 - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant,} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{(i)} & 2 \text{ est un majorant,} \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad \textbf{non} \ (\forall a \in A, \quad a \leq 2 - \varepsilon) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{(i)} & \forall a \in A, \quad a \leq 2 \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad 2 - \varepsilon < a (\leq 2). \end{cases} \end{aligned}$$



Plus généralement, on arrive alors à la proposition qui suit.

Proposition 5 | Caractérisation de la borne supérieure

soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$, alors

- **[Borne supérieure]** Si A est majoré, alors :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{(i)} & M \text{ est un majorant,} \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad M - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant,} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{(i)} & \forall a \in A, \quad a \leq M, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad M - \varepsilon < a (\leq M). \end{cases}$$
- **[Borne inférieure]** Si A est minoré, alors :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \text{(i)} & m \text{ est un minorant,} \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad m + \varepsilon \text{ n'est pas un minorant,} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{(i)} & \forall a \in A, \quad m \leq a, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad (m \leq) a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Pour montrer des propriétés sur les bornes sup/inf, il faut garder en tête la définition au maximum. On peut néanmoins énoncer une méthode plutôt classique en pratique.

Méthode (ALG) 6.1 (sup / inf) Soit A une partie non vide, et $(m, v, M) \in \mathbb{R}^3$.

- Pour montrer que $\sup A$ existe et que $\boxed{\sup A \leq M}$, on montre que :
 A est majorée, et que : M est un majorant de A .
- Pour montrer que $\inf A$ existe et que $\boxed{m \leq \inf A}$, on montre que :
 A est minorée, et que : m est un minorant de A .
- Pour montrer que $\sup A = v$ si A est majorée (ou que $\inf A = v$ si A est minorée) on justifie leur existence, puis on applique la caractérisation de la borne sup/inf.

Exercice 1

1. Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent, et que : $\inf(A) \leq \sup(A)$.
2. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$, $A \subset B$, et B majorée. Montrer que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent, avec : $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 2 On considère : $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

L'ensemble B admet-il une borne supérieure? une borne inférieure? un plus

grand élément? un plus petit élément?

2

APPLICATION : INTERVALLES & DROITE ACHEVÉE

Nous avons défini dans le **Chapitre (ALG) 2** les différentes notations $[a, b]$, $[a, b[$ etc.. Voici maintenant la définition générale d'un intervalle.

Définition 3 | Intervalle

On appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (u, v) \in I^2, \quad u < v \implies [u, v] \subset I.$$

Note | Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de « trou » dans I .

Exemple 7 (Négation) Écrire la négation de « I est un intervalle ».



Exemple 8 Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas des intervalles, alors que $\mathbb{R}_+$ et $\emptyset$ sont des intervalles.



Proposition 6 | Stabilité par intersection

Soit K un ensemble et $(I_k)_{k \in K}$ une famille d'intervalles. Alors :

$\bigcap_{k \in K} I_k$ est un intervalle.

Preuve Notons : $I = \bigcap_{k \in K} I_k$, et soit $(u, v) \in I^2$.

**Attention**

L'union d'intervalles n'est pas forcément un intervalle. Même pour deux intervalles, cela ne fonctionne pas.

**Proposition 7 | Classification des intervalles de $\mathbb{R}$**

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une des formes suivantes, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $[a, b]$ • $[a, b[$ • $[a, +\infty[$ • $] -\infty, b]$ • $\emptyset$
- $]a, b[$ • $]a, b]$ • $]a, +\infty[$ • $] -\infty, b[$ • $\mathbb{R}$.

Remarque 3 Dans l'énoncé précédent, réécrire les intervalles bornés :

**Lemme 1**

Soient A, B deux parties d'un ensemble E , et $c \in E$ telles que :

$A \subset B \subset A \cup \{c\}$, alors : $B = A$ ou $B = A \cup \{c\}$.

Preuve (du lemme)

- [Cas 1 : $c \in A$]



- [Cas 2 : $c \notin A, c \in B$]



- [Cas 3 : $c \notin A, c \notin B$]



Preuve

- Il est facile de montrer que chacun de ces ensembles est bien un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple, $[a, b]$.



- Réciproquement, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On discute selon que I est vide ou non, minoré ou non, majoré ou non.
 - ◇ Si I est vide, $I = \emptyset$ et il est bien de la forme voulue.
 - ◇ Si I est non vide.
 - Si I est minoré et que I n'est pas majoré. Par la propriété de la borne inférieure, I admet une borne inférieure. Soit $a = \inf I \in \mathbb{R}$. Puisque a minore I , on a $I \subset [a, +\infty[$. Montrons que l'on a aussi : $]a, +\infty[\subset I$.

En effet, soit $x \in]a, +\infty[$. On essaie de montrer que :

$$x \in [u, v] \text{ avec } u, v \in I \text{ à trouver.}$$

Puisque x ne minore pas I (en effet $x > a = \inf I$), il existe $u \in I$ tel que $u < x$. Puisque x ne majore pas I (en effet I n'est pas majoré), il existe aussi $v \in I$ tel que $x < v$. Or I est un intervalle, donc $x \in [u, v] \subset I$. On a donc montré que :

$$]a, +\infty[\subset I \subset [a, +\infty[=]a, +\infty[\cup \{a\},$$

donc : $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$ d'après le **Lemme 1**.

— On procède de la même manière dans les autres cas.

Définition 4 | Vocabulaire de topologie

- On appelle *intervalle non trivial* tout intervalle non vide et différent d'un singleton.
- Un intervalle est dit *fermé* s'il contient ses bornes finies. C'est donc un intervalle de l'un des types suivants : $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b]$, $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$.
- Un intervalle est dit *ouvert* s'il ne contient pas ses bornes finies. C'est donc un intervalle de l'un des types suivants : $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $] -\infty, b[$, $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$.
- On appelle *segment* tout intervalle fermé borné. C'est donc un intervalle du type $[a, b]$.

Remarque 4 Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles à la fois fermés et ouverts !

Définition 5 | Droite achevée

On appelle *droite numérique achevée*, et on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation $\leq$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

Exemple 9

- $2 \leq 3$
- $-\infty \leq 2$
- $-\infty \leq +\infty$
- $2 \leq +\infty$.

Remarque 5 Ainsi, $\overline{\mathbb{R}}$ admet un plus grand élément, $+\infty$, et un plus petit élément, $-\infty$.

On étend partiellement les lois de composition usuelles à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}, & +\infty + x = +\infty & \text{et} \quad -\infty + x = -\infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, & \pm \infty \times x = \pm \infty & \text{(avec la règle des signes),} \\ & -(+\infty) = -\infty & \text{et} \quad -(-\infty) = +\infty, \\ & (+\infty) + (+\infty) = +\infty & \text{et} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\ & (\pm \infty) \times (\pm \infty) = \pm \infty & \text{(avec la règle des signes).} \end{array}$$

Remarque 6 Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ peut se mettre sous la forme $]a, b[$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3 APPLICATION : PARTIE ENTIÈRE

3.1 Généralités

On souhaite définir mathématiquement l'action d'ôter la partie décimale d'un nombre réel, c'est-à-dire transformer par exemple 1.1 en 1. Comment définir mathématiquement une telle transformation? Eh bien, par exemple, $1.1 \in [1, 2[$, et la partie entière 1 correspond à la borne de gauche de l'intervalle.

Définition/Proposition 2 | Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière de x* l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \text{c'est-à-dire : } x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[.$$

Ainsi,

- tout réel x est « coincé » entre deux entiers consécutifs.
- La partie entière de x est l'unique entier relatif k tel que $x \in [k, k + 1[$.

Attention

Attention aux confusions entre $\leq, <$.

- Si vous confondez les deux symboles, alors on change complètement la notion. (par exemple, si on avait pris comme définition $\lfloor x \rfloor < x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, alors on aurait $\lfloor 5 \rfloor = 4$... curieux non?)
- Si vous oubliez une inégalité stricte, c'est pire, il n'y a plus unicité.

Exemple 10 Calculer les parties entières ci-après.

- $\lfloor 3.1 \rfloor$  $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ car $3 \leq 3.1 < 4$,
- $\lfloor 12 \rfloor$  $\lfloor 12 \rfloor = 12$, car $12 \leq 12 < 13$,
- $\lfloor -4.5 \rfloor$  $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$, car $-5 \leq -4.5 < -4$,
- $\lfloor \frac{7}{3} \rfloor$  $\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$, car $2 \leq \frac{7}{3} < 3$.

Exemple 11 (Équations avec parties entières) Résoudre les équations ci-dessous.

1. $\lfloor 2x \rfloor = 1$



2. $5 < \lfloor 3x \rfloor \leq 7$



3. $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \right\rfloor = 3$



Preuve (Existence et unicité de la partie entière) Nous devons maintenant justifier l'existence et l'unicité de la partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence. Traitons deux cas.

- **[Cas 1 – Si $x \geq 0$]** Considérons : $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x . L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $0 \in A$) et majorée (par x) donc A admet une borne supérieure $M \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on sait que le réel $M - \frac{1}{2}$ ne majore pas A de sorte qu'il existe $n_0 \in A$ tel que $n_0 \in]M - \frac{1}{2}, M]$.

Montrons que n_0 convient pour la partie entière.



En effet,

- ◇ Comme $n_0 \in A$, on a $n_0 \leq x$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

◇ Par ailleurs :

$$n_0 \in \left] M - \frac{1}{2}, M \right] \iff M - \frac{1}{2} < n_0 \leq M \iff M + \frac{1}{2} < n_0 + 1 \leq M + 1.$$

En particulier, on a $n_0 + 1 > M = \sup A$ donc $n_0 + 1 \notin A$. D'après la définition de l'ensemble A , on a alors $n_0 + 1 > x$.

En résumé, on a bien montré l'existence d'un entier n_0 de sorte que : $n_0 \leq x < n_0 + 1$.

- **[Cas 2 – Si $x < 0$]** On se ramène comme souvent au cas précédent. On a que $-x > 0$, et d'après le cas précédent, on sait alors qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $n_0 \leq -x < n_0 + 1$. Mais alors, on a l'encadrement :

$$-n_0 - 1 < x \leq -n_0 \iff m_0 - 1 < x \leq m_0 \text{ en notant } m_0 = -n_0. \quad (*)$$

- ◇ Si $x \in \mathbb{Z}$, alors comme les entiers $m_0 - 1$ et m_0 sont consécutifs, nécessairement on a $x = m_0$. Dès lors, $m_0 \leq x < m_0 + 1$.
- ◇ Si $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Z}$, alors $(*)$ se réécrit $m_0 - 1 < x < m_0$ ou encore $m_0 - 1 \leq x < (m_0 - 1) + 1$. Ainsi, $m_0 - 1$ convient pour la partie entière.

Unicité. Supposons que $m, n \in \mathbb{Z}$ conviennent pour la partie entière de x . Alors :

$$n \leq x < n + 1, \quad m \leq x < m + 1.$$

On peut supposer que $n < m$, sinon on inverse les rôles.



Alors en combinant les deux encadrements, on a :

$$n < m \leq x < n + 1 < m + 1.$$

En particulier, $n < m < n + 1$. On aurait donc qu'un entier m serait compris strictement entre deux entiers consécutifs $n, n + 1$ — Contradiction

Dans la preuve d'existence de la partie entière, nous avons également établi au passage le fait suivant.

Proposition 8 | Reformulation de la définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x , i.e. :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Au besoin (notamment en analyse, pour appliquer le théorème d'encadrement), on pourra utiliser l'encadrement ci-après, qui découle directement de la définition.

Proposition 9 | Encadrement et partie entière, seconde version

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

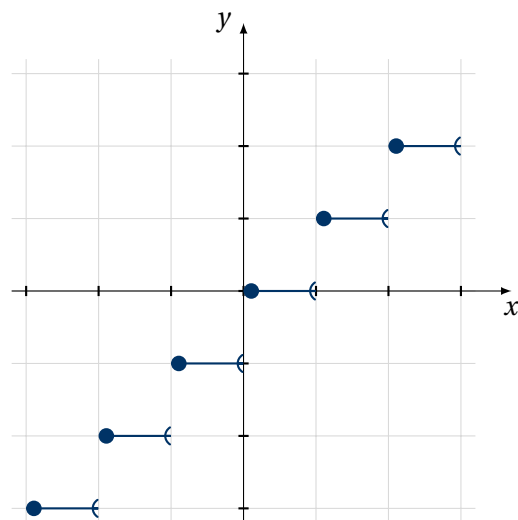
Preuve



Exemple 12 Déterminer : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor 2n \rfloor}{n}$.



La définition de la partie entière permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$.



Exercice 3 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que :

$$\lfloor x \rfloor \leq p \iff x < p + 1$$

$$\lfloor x \rfloor \geq n \iff x \geq n.$$

Exercice 4 Montrer que :

$$1. \quad \forall (x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha,$$

$$2. \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

$$3. \quad \text{A-t-on : } \forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor ?$$

Exercice 5 (Approximation décimale d'un réel) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

- $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est un nombre décimal ayant n chiffres après la virgule, on l'appelle *l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut*,
 - $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est un nombre décimal ayant n chiffres après la virgule, on l'appelle *l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès*.
1. Pour $x = 12,345$, calculer u_k, v_k pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Que valent $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$?

>_ (Partie entière d'un réel) Il s'agit ici de chercher le plus grand entier inférieur ou égal à un réel : c'est un cas typique d'utilisation d'un **while**. En effet, nous ne sommes pas capables de prédire à l'avance le nombre d'itérations. Il faut distinguer le cas positif ou négatif.

def part_entiere(x) :

"""

Calcule la partie entière de x positif

"""

n = 0

while n <= x :

 n += 1 # en sortie de boucle : n désigne le premier
 entier > x, on renvoie donc n-1

return n-1

>>> part_entiere(2)

2

>>> part_entiere(2.1)

2

3.2 Application – Ensembles denses dans $\mathbb{R}$ [H.P]

Définition 6 | Partie dense dans $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense dans* $\mathbb{R}$ si entre deux réels distincts quelconques, il existe toujours un élément de A , c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \implies (\exists a \in A, \quad x < a < y).$$

Remarque 7 Une reformulation équivalente (et probablement plus intuitive!) est que tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A . Nous la verrons dans le ?? sur les suites.

Remarque 8 (Négation) Écrire la définition de « A non dense dans $\mathbb{R}$ » :



Exemple 13 L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ puisqu'il n'existe aucun entier par exemple dans $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

En revanche, si les deux réels sont suffisamment espacés, on peut y coincer un entier strictement entre les deux.

Proposition 10 | Réels à distance > 1

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $d(x, y) > 1$. Alors :

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \quad x < n < y.$$

Preuve Rappelons que $d(x, y) = |x - y|$. Il s'agit de prouver l'existence d'un entier n tel que $x < n < y$ (si $x < y$) ou $y < n < x$ (si $y < x$). Supposons que $x < y$ (l'autre cas se traite de la même manière).

 On a tout d'abord : $d(x, y) = |y - x| = y - x > 1$. On déduit que $y > x + 1 \geq [x] + 1$. Mais comme $x < [x] + 1$, on a :

$$y > [x] + 1 > x. \quad \text{L'entier } n = [x] + 1 \text{ convient donc.}$$

Corollaire 1 | Densités

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$)
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$)

Preuve Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

- On cherche $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ de sorte que :

$$x < \frac{p}{q} < y \iff qx < p < qy.$$

On peut donc chercher à utiliser la **Proposition 10** aux réels qx, qy , avec q à trouver.

 Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$d(qx, qy) = |qy - qx| = q|y - x| \quad \text{car } q \text{ est positif.}$$

De plus $y - x > 0$, donc $d(qx, qy) = q(y - x)$. Par ailleurs :

$$q(y - x) > 1 \iff q > \frac{1}{y - x}.$$

On peut par exemple choisir : $q = \left\lfloor \frac{1}{y - x} \right\rfloor + 1$. Par définition de la partie entière, on a alors bien la condition souhaitée :

$$q = \left\lfloor \frac{1}{y - x} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{y - x}.$$

Avec ce choix, on a dès lors $d(qx, qy) > 1$ et il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qx < p < qy$ d'après la **Proposition 10**, ce qui fournit :

$$x < \frac{p}{q} < y, \quad \text{avec : } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

- On cherche $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de sorte que :

$$x < \xi < y.$$

On va essayer de former ξ à l'aide de $\sqrt{2}$ dont on connaît déjà l'irrationalité. Il existe

$r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tel que :

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}} \iff x < r\sqrt{2} < y.$$

Posons dès lors $\xi = r\sqrt{2}$ et vérifions que $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par l'absurde, si $r\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ en tant que quotient de rationnels — **Contradiction**

Remarque 9 À quoi peuvent bien servir ces résultats de densité ? à prolonger des résultats vraies sur $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ tout entier. Ils serviront plus tard dans l'année, notamment pour la résolution d'« équations fonctionnelles ».

Exercice 6 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \quad q \leq x \implies q \leq y.$$

Montrer que : $x \leq y$.

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (ALG) 6.1 (sup / inf) Soit A une partie non vide, et $(m, v, M) \in \mathbb{R}^3$.

- Pour montrer que $\sup A$ existe et que $\boxed{\sup A \leq M}$, on montre que :
A est majorée, et que : M est un majorant de A.
- Pour montrer que $\inf A$ existe et que $\boxed{m \leq \inf A}$, on montre que :
A est minorée, et que : m est un minorant de A.
- Pour montrer que $\sup A = v$ si A est majorée (ou que $\inf A = v$ si A est minorée) on justifie leur existence, puis on applique la caractérisation de la borne sup/inf.

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

- Sur les bornes d'ensembles :
 - connaître la définition d'un majorant et d'un minorant ☐
 - connaître la définition d'un maximum et d'un minimum ☐
 - savoir définir la borne supérieure et la borne inférieure ☐
 - savoir définir la partie entière, connaître les propriétés ☐
- Sur la partie entière :
 - connaître la définition avec encadrement ☐
 - savoir résoudre des équations la faisant intervenir ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.
Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.



4.1 Parties minorées et majorées de $\mathbb{R}$

Exercice 1 | ●○○ [Solution] Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Le nombre -7 est un majorant de A.
2. Le nombre 2 n'est pas un minorant de A.
3. La partie A est bornée.
4. Le nombre $\sqrt{\pi}$ est un minimum de A.

5. La partie A n'est pas majorée.
6. Le nombre 1 est la borne supérieure de A.

Exercice 2 | ●○○ [Aurélien IZ – Titouan GO] [Solution] Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et notons :

$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$

- Montrer que $-A$ est minoré si et seulement si A est majoré.
- En supposant A majoré, démontrer que $-A$ admet une borne inférieure et que : $\inf B = -\sup A$.

Exercice 3 | ●●○ [Nassim AG – Louis ME] [Solution] Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 4 | ●●○ [Emma RI – Younès GU] [Solution] Soient A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, on pose

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 5 | ●●○ [Solution] Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

- Montrer que $A \cup B$ est bornée et que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
- Énoncer et montrer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
- Qu'en est-il de $A \cap B$?

Exercice 6 | ●●● [Solution] Soient A, B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On dit que A et B sont *adjacentes* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a, b) \in A \times B, \quad |b - a| < \varepsilon.$$

- Donner un exemple de parties adjacentes.
- On suppose de plus que : $\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leq b$.
Montrer que : $\sup A = \inf B \iff A, B$ adjacentes.

4.2 Partie entière

Exercice 7 | ●○○ [Raphaël MA – Cyril PA] **Équations/Inéquations** [Solution] Résoudre :

- $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2,$
- $-1 \leq \lfloor 2x + 1 \rfloor < 1.$

Exercice 8 | ●●○ [Solution] Résoudre l'équation : $\lfloor 3x - 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2.$

Exercice 9 | ●●○ [Sylvain CL – Alice LA] [Solution] Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 10 | ●●○ [Oscar CO – Maxance FA] [Solution] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad \text{la partie décimale de } x.$$

- Calculer $\{1.1\}$ et $\{-1.1\}$.
- 2.1) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor.$
2.2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [0, 1[, \quad \{x + y\} = \{\{x\} + y\}.$

Exercice 11 | ●●○ On souhaite calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

- Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p$.
- Calculer S_n (on pourra regrouper les termes égaux).

Exercice 12 | ●●● Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

On introduit : $\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor$ et $p = \lfloor n\varepsilon \rfloor$.

- Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on a :

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\}.$$

2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \iff k < n - p.$$

3. Conclure.

Exercice 13 | ●●● [Solution] Soit $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}, \quad 3b_n^2 = a_n^2 - 1.$$

2. Montrer que $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

4.3 Densité

Exercice 14 | ●●○ Dyadiques Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.$$

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. $\forall x \in A, x \leq -7.$
2. $\exists x \in A, x < 2.$
3. $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \leq M.$
4. $\forall x \in A, x \geq \sqrt{\pi} \text{ et } \sqrt{\pi} \in A.$
5. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M.$
6. $\begin{cases} \forall x \in A, x \leq 1 \\ \forall M < 1, \exists x \in A, x > M. \end{cases}$ La seconde ligne signifiant que aucun $M < 1$ ne majore A .

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. Si B est minorée, il existe m tel que pour tout $x \in A, m \leq -x$, donc $-m$ devient un majorant de A et A est bien majoré. Si A est majoré, B est minoré et admet donc une borne inférieure.
2. Puisque $-\sup A$ est un minorant de B on a nécessairement $-\sup A \leq \inf B$, mais on peut faire mieux. De la même façon $-\inf B$ est un majorant de A puisque $A = -B$ donc $\sup A \leq -\inf B$.

Solution (exercice 3) [Énoncé] Les parties sont non vides, mais de plus A est majorée par n'importe quel élément de B , B est minorée par n'importe quel élément de A donc $\sup A$ et $\inf B$ existent bien. De plus d'après ce qui précède, un majorant de A est $b \in B$ pour tout b . Donc comme $\sup A$ est le plus petit des majorants, on a :

$$\sup A \leq b, \quad \forall b \in B.$$

Ensuite, même raisonnement, $\sup A$ est un minorant de B , donc comme $\inf B$ est le plus grand des minorants, on a nécessairement :

$$\sup A \leq \inf B.$$

Souvent cette étape se dit en Français **on passe à la borne inférieure** dans l'inégalité.

Solution (exercice 4) [Énoncé]

- Remarquons tout d'abord que $A + B$, A et B admettent une borne supérieure : elles sont majorées et non vides. Pour $A + B$, l'existence d'un majorant découle de l'inégalité

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a + b \leq \sup A + \sup B.$$

- De l'inégalité précédente, nous avons

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Montrons que $\sup A + \sup B$ est bien le plus petit majorant de $A + B$. Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $a \in A$ de sorte que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} \leq a,$$

de-même, choisissons $b \in B$ de sorte que

$$\sup B - \frac{\varepsilon}{2} \leq b,$$

donc en sommant, nous avons finalement montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a, b) \in A \times B, \quad \sup A + \sup B - \varepsilon \leq a + b.$$

Ce qui prouve, par caractérisation de la borne supérieure, que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Solution (exercice 5) [Énoncé] Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Remarquons tout d'abord que puisque A et B sont non vides bornées, alors elles admettent une borne inférieure et une borne supérieure. Posons $C = A \cup B$. Soit $c \in C$. On a alors $c \in A$ ou $c \in B$. Dans le premier cas, on a $c \leq \sup(A)$ et dans le second cas, on a $c \leq \sup(B)$. Dans les deux cas, on a $c \leq \max(\sup(A), \sup(B))$. On en déduit que $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de C .

C est donc non vide majoré, il admet une borne supérieure et cette borne supérieure est donc inférieure ou égale à $\max(\sup(A), \sup(B))$.

Montrons à présent que $\sup(C) = \max(\sup(A), \sup(B))$. On a déjà montré que $\max(\sup(A), \sup(B))$ majore C . On va montrer que c'est le plus petit des majorants de C .

Soit donc M un majorant de $C = A \cup B$. Puisque $A \subset C$, on a alors M qui majore A et donc $\sup(A) \leq M$ (car $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A). De même, M majore B et donc $\sup(B) \leq M$. On en déduit donc que $\max(\sup(A), \sup(B)) \leq M$. On a donc bien montré que $\max(\sup(A), \sup(B))$ est le plus petit majorant de C , c'est donc sa borne supérieure.

2. De même, montrons que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$. Pour le fait que C soit minoré par le minimum des deux bornes inférieures, ceci se montre de la même façon que dans la première question. On en déduit que $\inf(C)$ existe et qu'elle est supérieure ou égale à $\min(\inf(A), \inf(B))$.

Pour montrer que c'est la borne inférieure, considérons un autre minorant

m de C . On a alors m qui minore A et qui minore B donc m est plus petit que $\inf(A)$ et plus petit que $\inf(B)$ (car la borne inférieure est le plus grand des minorants). On a donc m inférieur à $\min(\inf(A), \inf(B))$, ce qui prouve bien que $\min(\inf(A), \inf(B))$ est le plus grand minorant de C (et donc sa borne inférieure).

3. Pour $A \cap B$, on ne peut cette fois plus rien dire. Déjà, rien ne garantit que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors, on peut montrer que $A \cap B$ est minoré par $\max(\inf(A), \inf(B))$ et majoré par $\min(\sup(A), \sup(B))$. On a cependant aucune égalité possible comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \{-1, 0, 1\} \text{ et } B = \{-2, 0, 2\}$$

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. Prendre par exemple $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2[$.
2. On procède par double implication.

$\Leftarrow$ Supposons A, B adjacentes, et montrons que $\sup A = \inf B$.

- Soit $b \in B$, alors comme $a \leq b$ pour tout $a \in A$, b majore A . Donc $\sup A \leq b$. Ainsi, ceci étant vrai pour tout $b \in B$, $\sup A$ minore B donc $\sup A \leq \inf B$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Alors choisissons $(a, b) \in A \times B$ de sorte que $|b - a| < \varepsilon$. Comme les éléments de B sont supérieurs à eux de A , on a donc :

$$0 \leq b - a < \varepsilon.$$

Donc : $b < a + \varepsilon \leq \sup A + \varepsilon$. Donc $\inf B \leq b < \sup A + \varepsilon$. On a ainsi montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \inf B \leq \sup A + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro de chaque côté, on déduit $\inf B \leq \sup A$

En conclusion : $\sup A = \inf B$.

$\Rightarrow$ Supposons que $\sup A = \inf B$, montrons que A, B sont adjacentes.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $(a, b) \in A \times B$, $b - a = |b - a| < \varepsilon$, ou encore :
 $b < a + \varepsilon.$

- Comme $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ ne majore pas A , on choisit $a \in A$ de sorte que :
 $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a.$
- Comme $\inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ ne minore pas B , on choisit $b \in B$ de sorte que : $b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ ou encore par hypothèse : $b < \sup A + \frac{\varepsilon}{2}.$

Ce couple convient alors :

$$b - a < \left(\sup A + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Conclusion : $\sup A = \inf B \iff A, B \text{ adjacentes.}$

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2$ si, et seulement si, $2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3$ par définition de la partie entière. Puisque les trois membres sont positifs, on a :

$$2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3 \iff 4 \leq x^2 + 1 < 9$$

$$\iff 3 \leq x^2 < 8,$$

$$\iff x \in]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{8}[.$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[}$.

Solution (exercice 8) [Énoncé]

Notons $k = \lfloor x \rfloor$, alors $3k - 2 \leq 3x - 2 < 3k + 1$.

Donc trois cas peuvent se présenter :

$$3k - 2 \leq 3x - 2 < 3k - 1, \quad 3k - 1 \leq 3x - 2 < 3k \text{ ou } 3k \leq 3x - 2 < 3k + 1.$$

Dans chaque cas, k est solution d'équations du second degré :

1. $k^2 - 3k + 2 = 0$ possède deux solutions entières 1 et 2,
2. $k^2 - 3k + 1 = 0$ ne possède aucune solution entière,
3. $k^2 - 3k = k(k - 3)$ possède deux solutions entières 0 et 3.

Les parties entières possibles des solutions sont donc les éléments de $\{0, 1, 2, 3\}$.

- Si $k = 0$, alors l'équation donne $\lfloor 3x - 2 \rfloor = 0$ soit $0 \leq 3x - 2 < 1$ ou encore $\frac{2}{3} \leq x < 1$.
- Si $k = 1$, alors l'équation donne $\lfloor 3x - 2 \rfloor = 1$ soit $1 \leq 3x - 2 < 2$ ou encore $1 \leq x < \frac{4}{3}$.
- Si $k = 2$, alors l'équation donne $\lfloor 3x - 2 \rfloor = 2^2$ soit $4 \leq 3x - 2 < 5$ ou encore $2 \leq x < \frac{7}{3}$.
- Si $k = 3$, alors l'équation donne $\lfloor 3x - 2 \rfloor = 3^2$ soit $9 \leq 3x - 2 < 10$ ou encore $\frac{11}{3} \leq x < 4$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}, 1[\cup \left[1, \frac{4}{3}[\cup \left[2, \frac{7}{3}[\cup \left[\frac{11}{3}, 4[\right]$.

Solution (exercice 9) [Énoncé]

Partons la encore de la définition.

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc en multipliant par n ,

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

Puisque $n\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à nx , on a $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Puisque $n\lfloor x \rfloor + n$ est un entier strictement supérieur à nx , on a $\lfloor nx \rfloor + 1 \leq n\lfloor x \rfloor + n$, donc finalement :

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq n\lfloor x \rfloor + n - 1.$$

Divisons à présent par n de chaque côté :

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Par unicité de la partie entière, on a donc immédiatement :

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. Puisque $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ et $\lfloor -1.1 \rfloor = -2$ (car $-2 \leq -1.1 < -1$), on déduit :
 $\{1.1\} = 1.1 - 1 = \boxed{0.1}, \quad \{-1.1\} = -1.1 - (-2) = \boxed{0.9}.$
2. **2.1)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Il s'agit de montrer que $n + \lfloor x \rfloor \leq n + x < n + \lfloor x \rfloor + 1$.
Cet encadrement est équivalent à $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ après simplification par n , ce qui est vérifié car c'est la définition de la partie entière de x .

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor}.$

- 2.2)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0, 1[$. Alors $\{x + y\} = x + y - \lfloor x + y \rfloor$. D'autre part,
 $\{\{x\} + y\} = \{x\} + y - \lfloor \{x\} + y \rfloor = x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor x - \lfloor x \rfloor + y \rfloor.$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \{\{x\} + y\} &= x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor x - \lfloor x \rfloor + y \rfloor \\ &= x - \lfloor x \rfloor + y - (\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} + \text{question précédente} \\ &= x + y - \lfloor x + y \rfloor = \{x + y\}. \end{aligned}$$

On a bien montré :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [0, 1[, \quad \{x + y\} = \{\{x\} + y\}}.$$

Solution (exercice 13) [Énoncé]