

Programme de colles

du 2 au 6/11/2026

- Cette semaine : **1** question par étudiant(e) à choisir dans la liste.
- On se concentre plutôt sur la fin des complexes (racines de l'unité, applications en trigonométrie et géométrie).
- Sur sup / inf : je ferai des calculs de borne sup/inf de fonctions au moment du chapitre sur les limites. On évite donc pour l'instant les études de fonctions.

1 NOMBRES COMPLEXES



- **Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique.** Définition de $\mathbb{C}$ comme un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un élément i vérifiant $i^2 = -1$. Unicité de la forme algébrique. Notation pour le complexe j . Identité remarquable $a^2 + b^2$. Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés (dont l'inégalité triangulaire avec cas d'égalité). Complexes de module 1.
- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de MOIVRE. Expression exponentielle de j , et propriétés de j . Formule d'EULER, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moyen pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle. Exponentielle d'un complexe. Équations polynomiales à coefficients complexes : affine, second degré, racines n -ièmes (et cas spécifique de la racine carrée à l'aide de la forme algébrique), cas des racines de l'unité
- **Applications en trigonométrie.** Linéarisation, anti-linéarisation (MOIVRE et angle moitié), sommes trigonométriques en « complexifiant » les sommes.
- **Applications en géométrie.** Affixe, interprétations : longueurs, angles, écriture complexe de transformations géométriques (translation, homothétie, rotation), écriture d'une application $\mathbb{C}$ -linéaire ($z \mapsto az$) en tant que composée d'une homothétie et d'une translation.

! Attention

Les similitudes $z \mapsto az + b$ ne sont pas au programme de PCSI, seulement le cas $b = 0$.

2 COMPLÉMENTS SUR LES RÉELS



- **Parties majorées / minorées de $\mathbb{R}$** Définition de partie majorée / minorée / bornée, notion de borne supérieure / inférieure, maximum / minimum. Caractérisation de la borne supérieure et inférieure.
- **Application : intervalles & droite achevée** détermination des intervalles de $\mathbb{R}$ en partant de la définition en tant que partie convexe de $\mathbb{R}$.
- **Application : partie entière** Partie entière : définition et caractérisation comme plus grand entier inférieur à un réel. Parties denses de $\mathbb{R}$: définition, densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la définition de $\mathbb{U}_n$, puis déterminer ses éléments.
2. Calculer les racines carrées de $3 + 4i$ à l'aide de la forme algébrique.
3. Résoudre, selon deux méthodes (identité remarquable et développement puis second degré), l'équation : $(2z + 1)^2 + z^2 = 0$.
4. Donner les formules d'EULER. Linéariser, en utilisant des nombres complexes, $\cos x \cos y$.
5. Donner les formules d'EULER. Linéariser, en utilisant des nombres complexes, $\sin^3 x$.
6. Rappeler la définition de $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant des nombres complexes, que : $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
7. Rappeler le développement de $(a + b)^4$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Anti-linéariser $\cos(4x)$ (i.e. l'exprimer en fonction $\cos x$ et $\sin x$) pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant des nombres complexes.
8. Donner et démontrer l'écriture complexe d'un angle orienté :
 - $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$ où $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points distincts du plan,

- puis $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ où $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$ quatre points quelconques du plan avec $A \neq B, C \neq D$.

9. Définition de partie minorée et de la inférieure, en précisant notamment sous quelle condition suffisante ces notions existent.

[Exercice de cours] Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent, et que : $\inf(A) \leq \sup(A)$.

10. Définition de partie majorée et de la borne supérieure, en précisant notamment sous quelle condition suffisante ces notions existent.

[Exercice de cours] Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset, A \subset B$, et B majorée. Montrer que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent, avec : $\sup(A) \leq \sup(B)$.

11. Définir la partie entière puis justifier un encadrement où la partie entière apparaît au milieu.

[Exercice de cours] Montrer que : $\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

À venir : études de fonctions (sans usuelles réciproques).