

Chapitre (AN) 1 Fonctions

- 1 Généralités
- 2 Calculs de limites & Continuité
- 3 Calculs de dérivées
- 4 Plan d'étude d'une fonction
- 5 Fonctions usuelles
- 6 Dérivation d'une fonction à valeurs complexes
- 7 Exercices

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ en 1673 dans un manuscrit inédit « La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions ».

— Le saviez-vous ?

Jeune, en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

— J. VON NEUMANN

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est la présentation de généralités sur les fonctions, déjà évoquées dans les classes de lycée (définition, monotonie, parité, *etc.*). Nous développerons la notion de limite de manière plus rigoureuse dans un futur chapitre. Ensuite, nous nous intéresserons aux principales fonctions usuelles à connaître. Des compléments sur la continuité et la dérivabilité seront faits dans le **Chapitre (AN) 6** : l'objectif de ce chapitre est pour le moment de savoir faire des études de fonctions de manière efficace, donc un aspect pratique.

comme un exercice important.

- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Remarque 1 Tous les exemples de ce chapitre font appel aux fonctions usuelles vues au lycée. En cas de besoin, vous pouvez consulter par anticipation la dernière section du chapitre : la **Section 5**.

1 GÉNÉRALITÉS

1.1 Définitions, opérations de base

Définition 1 | Fonction entre deux ensembles

Soient E, F deux ensembles non vides.

- Une *fonction de E dans F* est un processus qui associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F (donc soit 0 élément, soit 1 élément). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'*ensemble d'arrivée* de f .
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : E \rightarrow F$ est une *fonction numérique*. (on écrira simplement « fonction » dans ce chapitre)
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f : E \rightarrow F$ l'ensemble noté $\mathcal{D}_f \subset E$ pour lequel f associe une image, c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F, y = f(x)\}.$$

Lorsque $\mathcal{D}_f = E$, c'est-à-dire lorsque l'on peut associer à tout élément de E un élément dans F , alors on dit que f est une *application*.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés

Remarque 2

- La différence entre les fonctions et les applications est ténue, on ne vous en voudra pas de confondre les deux.
- Les applications seront plus généralement étudiées dans le **Chapitre (ALG) 7**.
- Pour définir une fonction, on écrira : « Soit $f : E \longrightarrow F$ la fonction définie par $f(x) = \dots$ ». C'est seulement ensuite que l'exercice vous demandera de déterminer $\mathcal{D}_f$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $f(x)$ existe.
- Pour les fonctions clairement numériques, on écrit parfois même de façon encore plus abusive : « soit la fonction $f : x \longmapsto \dots$ ». C'est le cas du prochain exemple.
- Si $f : E \longrightarrow F$, alors f est aussi une fonction de $\mathcal{D}_f$ dans F (dans ce cas, elle associe un élément à tous ceux de l'ensemble de départ).

Exemple 1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- $f : x \longmapsto x + \ln(e^x - 1)$



- $g : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$



- $h : x \longmapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$



Définition 2 | Égalité de fonctions

Soient f, g deux fonctions. Alors f, g sont dites *égales* si :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \\ \text{(ii)} & \forall x \in \mathcal{D}_f (= \mathcal{D}_g), \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

Exemple 2

- Les fonctions $f : x \longmapsto |x|$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x^2}$ sont égales. En effet, elles sont bien définies sur $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Les fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto e^{\ln x}$ ne sont pas égales. En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ alors que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$. En revanche, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = g(x)$, nous dirons dans le **Chapitre (ALG) 7** que la « restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ » est égale à g .



Cadre

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des fonctions numériques, même lorsque cela n'est pas précisé.

Définition 3 | Image d'un élément, Image d'une fonction

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $x \in \mathcal{D}_f$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On dit que y est *l'image* de x par f et que x est un *antécédent* de y par f .
- On appelle *image de f* l'ensemble $f(\mathcal{D}_f)$ défini par :

$$f(\mathcal{D}_f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$

C'est donc l'ensemble de toutes les images de $\mathcal{D}_f$.

- Si $A \subset \mathcal{D}_f$, on appelle *image de A par f* l'ensemble $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$
C'est donc l'ensemble des images des éléments de A.
- Soit $B \subset \mathbb{R}$. On dit que f est à valeurs dans B si $f(\mathcal{D}_f) \subset B$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \in B.$$

- Attention**
- Être « à valeurs dans B » ne signifie pas « prendre toutes les valeurs de B ». Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais n'atteint pas les éléments de $[0, 1[$ car $x^2 + 1 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - On prend garde à ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont des objets de natures très différentes.

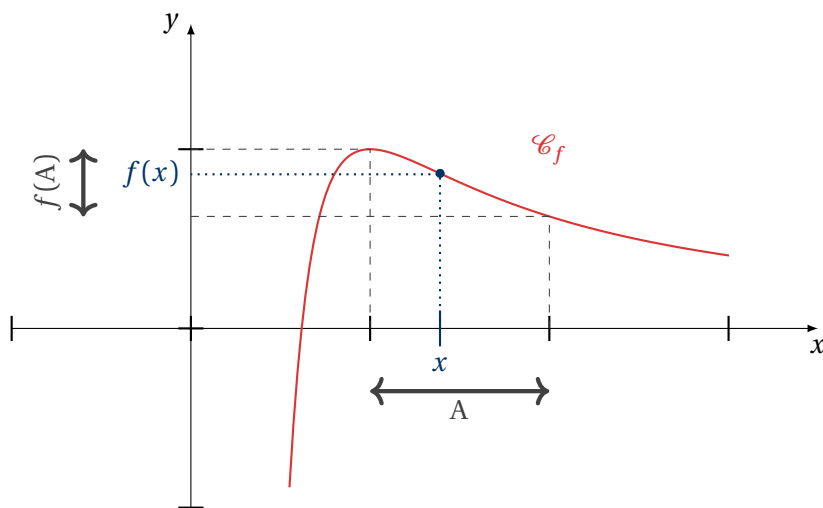
Définition 4 | Graphe

Soit f une fonction, on appelle *graphe de f* ou *courbe représentative de f* le sous-ensemble noté $\mathcal{C}_f$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$

De manière équivalente, on a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x).$$



COURBE REPRÉSENTATIVE ET IMAGE

Remarque 3 Un réel $x \in \mathcal{D}_f$ possède une unique image par f (qui s'appelle $f(x)$). En revanche, un réel y peut :

- avoir un unique antécédent par f ,
exemple : 0 a pour unique antécédent 0 par la fonction carré
- avoir plusieurs antécédents par f ,
exemple : 4 a deux antécédents, -2 et 2, par la fonction carré
- ne pas avoir d'antécédent par f .
exemple : -1 n'a pas d'antécédent par la fonction carré

Concrètement, pour calculer des images d'intervalles, nous utiliserons le théorème de la bijection, que nous verrons plus tard dans l'année. Dans l'exemple qui suit, nous nous contentons d'une conjecture sur $f(\mathcal{D}_f)$ à l'aide d'un graphique.

Exemple 3

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Préciser son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, $f(\mathcal{D}_f)$ sans justifier, et le(s) antécédent(s) de 2 par f .



2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x}$. Préciser son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, $f(\mathcal{D}_f)$ sans justifier, et le(s) antécédent(s) de 2 par f .



Maintenant que l'on connaît « l'objet fonction », on peut essayer de réaliser des opérations sur elles, on en définit alors plusieurs autres.

Définition 5 | Opérations

Soient f, g deux fonctions, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions $\lambda f, f + g, f \times g$ et $\frac{1}{f}$ par :

- **[Multiplication scalaire]** $\lambda f \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda \times f(x) \end{array} \right.$
- **[Somme]** $f + g \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{array} \right.$
- **[Produit]** $f \times g \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{array} \right.$
- **[Inverse]** $\frac{1}{f} \left| \begin{array}{l} \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{f(x)} \end{array} \right. \text{ si } \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \neq 0\} \neq \emptyset.$

Pour chacune des fonctions précédentes, on réalise l'opération « image par image », puisque « x par x » nous savons multiplier, additionner ... des nombres réels. Nous allons voir maintenant une opération un peu plus singulière. Par exemple, considérons la fonction $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$. On peut la voir comme

- le produit de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ avec elle-même, *i.e.* $h = f \times f$, puisque $x^4 = x^2 \times x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- mais aussi comme l'élévation au carré deux fois de suite, *i.e.* :

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2.$$

On note $h = f \circ f$ et on parle de « composée de f par f ».

Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 6 | Composition

Soient f et g deux fonctions.

- Alors on définit la composée de f par g notée $g \circ f$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On dira que g est la *fonction extérieure* de la composée $g \circ f$, f est la *fonction intérieure* de la composée $g \circ f$.
- Le domaine de définition de $g \circ f$ est alors :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}.$$
- Lorsque $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ (c'est-à-dire $f(x) \in \mathcal{D}_g$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$), alors :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathcal{D}_f.$$

Exemple 4 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, et les écrire comme une composée.

- $h_1 : x \mapsto \ln(x + 3).$



- $h_2 : x \mapsto \sqrt{x - \frac{1}{x}},$



- $h_3 : x \mapsto \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}}.$ Pour la composée, l'une des deux fonctions sera la fonction racine carrée.



Exemple 5 On considère les deux fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto \sin(x)$.

- Quels sont leurs ensembles de définition?



- Calculer, en précisant le domaine de définition, les composées $f \circ g$ et $g \circ f$.



Les propriétés algébriques de la composition (associativité par exemple) seront étudiées dans le **Chapitre (ALG) 7** sur les applications. En revanche, on peut déjà préciser un point de vigilance, mentionné dans l'exemple qui suit.

Exemple 6 On note $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^2 + 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en déduire?



On a donc en règle générale : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.2 Propriétés sur les fonctions

La plupart des fonctions usuelles apparaissant dans les prochains exemples sont connues depuis le lycée, mais elles seront revues en fin de chapitre.

Définition 7 | Périodicité

Soit f une fonction.

- Soit $T > 0$. La fonction f est dite *périodique de période* T ou T -*périodique* si :
 - (i) $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x + T \in \mathcal{D}_f$
 - (ii) $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x + T) = f(x)$.
- La fonction f est dite *périodique* s'il existe $T > 0$ tel que f soit T -périodique. Dans ce cas, on appelle *période fondamentale de* f la plus petite période de f .

Note

Nous justifierons en TD, lors d'un futur chapitre (**Chapitre (AN) 4**) qu'une telle période existe bien.

Remarque 4 (Non-unicité)

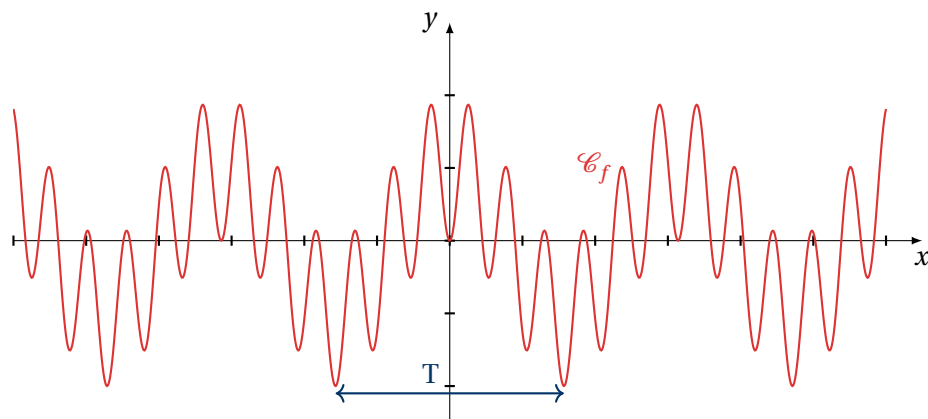
- Par récurrence évidente, on montre qu'alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x + nT) = f(x).$$
 Si f est T -périodique, elle est donc également $2T$ -périodique, $3T$ -périodique, etc. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT -périodique.
- Ainsi, on ne dit pas « la » période mais une période. En effet, si T convient dans la définition précédente, c'est le cas aussi de $2T, 3T$ etc.. Certaines fonctions possèdent une « plus petite période », mais pas toutes. Par exemple, pour les fonctions constantes tous les réels strictement positifs sont des périodes, et $\mathbb{R}^{++}$ ne possède pas de minimum.
- Cela dit, on vous demandera le plus souvent de montrer que des fonctions (possédant une plus petite période) sont périodiques, et de donner la plus petite. Souvent on ne justifie pas ce dernier point car cela n'a rien d'évident : voir par exemple l'**Exemple 8**.

Remarque 5 (Interprétation géométrique) Géométriquement, cela signifie que dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exemple 7 La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(3x) \end{cases}$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

- [Intuition]** la fonction f avance sur le graphe du cos mais 3 fois plus vite!



GRAPHE D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Elle risque donc d'avoir une période 3-fois plus petite que celle du cosinus....

• **[Justification]**

✎ En effet, si $x \in \mathbb{R}$ on a bien $x + \frac{2\pi}{3} \in \mathbb{R}$ et

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x).$$

Remarque 6 (Généralisation) Soit f une fonction $T > 0$ -périodique, ainsi que $(\omega, \varphi) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. De façon générale,

$$g : x \mapsto f(\omega x + \varphi) \text{ est } \frac{T}{\omega}\text{-périodique.}$$



Exemple 8 (Période fondamentale de sin) Le réel strictement positif 6π est une période de sin, mais la période fondamentale de sin est 2π .



- Soit $x \in \mathbb{R}$, notons que le point M sur le cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\vec{OM}$ soit x est égal au point N sur le cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\vec{ON}$ soit $x + 6\pi$, en particulier, ils ont la même ordonnée, donc $\sin(x + 6\pi) = \sin(x)$, ainsi la fonction sin est périodique et 6π en est une période.
- Par le même raisonnement, 2π est aussi une période de sin. Soit $T > 0$ une période de sin, alors en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + T) = \sin(x)$, pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient que $\sin(\frac{\pi}{2} + T) = 1$, ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc $T = 2k\pi$, comme $T > 0$, on en déduit que $k > 0$ donc que $k \geq 1$, ainsi $T \geq 2\pi$. Ainsi, la plus petite période possible est 2π . La période fondamentale de sin est 2π .

Définition 8 | Parité & Imparité

Soit f une fonction.

- La fonction f est dite *paire* si :

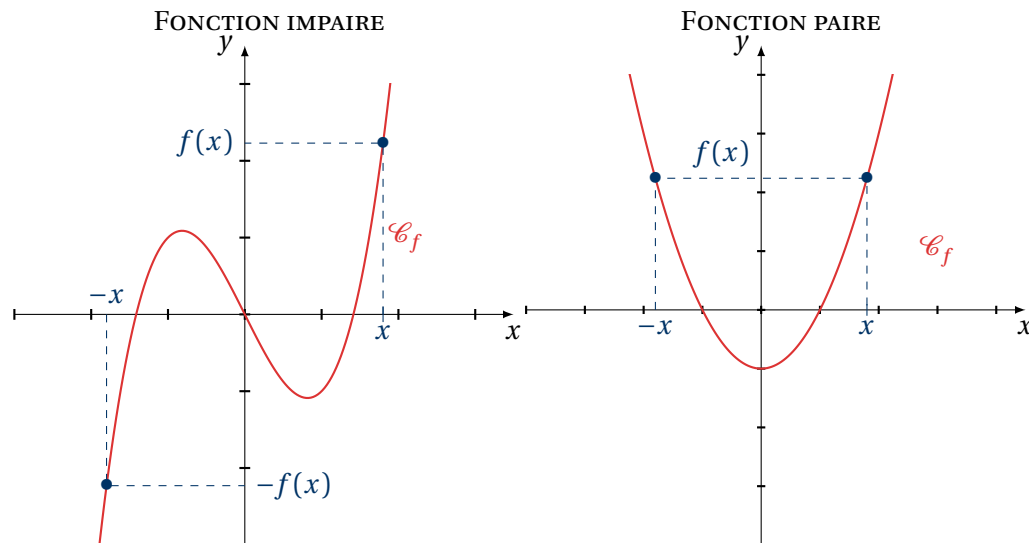
$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x). \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = -f(x). \end{array} \right.$
---	--
- La fonction f est dite *impaire* si :

Attention

Cela ne signifie pas **du tout** que f prend des valeurs paires ou impaires.

Remarque 7 (Interprétation géométrique) Géométriquement, la parité et l'impairité s'interprètent ainsi.

- Si f est paire alors, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, son graphe est invariant par la symétrie d'axe $(O, \vec{j})$.
- Si f est impaire alors, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, son graphe est invariant par la symétrie centrale par rapport au point O.



Exemple 9 Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer que f est impaire.



Exemple 10

- La fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 5x \end{array} \right.$ est impaire.

- La fonction $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est impaire.
- La fonction $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{array} \right.$ est paire.

Conséquence très importante de ces propriétés : on peut réduire le domaine d'étude!



Remarque 8 (Parité/Périodicité et réduction du domaine d'étude) Soit f une fonction. Alors les différentes interprétations géométriques permettent de se contenter d'étudier une fonction sur un domaine plus petit que $\mathcal{D}_f$: après cette étude « réduite », des transformations géométriques simples permettront de récupérer le reste du graphe!

- [Périodique]** Si f est T -périodique, on peut réduire l'étude à $\mathcal{D}_f \cap [0, T]$, l'intervalle $[0, T]$ pouvant être remplacé par n'importe quel autre intervalle de longueur T (par exemple, $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ souvent utile ...).
- [Paire/Impaire]** Si f est paire ou impaire, on peut réduire le domaine d'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$.
- [Périodique et Paire/Impaire]** Si f est T -périodique et possède en plus une parité, on peut réduire à : $\mathcal{D}_f \cap [0, \frac{T}{2}]$.
En effet, dans le détail, la périodicité permet de réduire à $\mathcal{D}_f \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, puis la parité à $\mathcal{D}_f \cap [0, \frac{T}{2}]$.

Exemple 11 Réduire le domaine d'étude de $f : x \mapsto \cos(\frac{x}{2}) - \cos(x)$. Préciser ensuite les transformations géométriques nécessaires afin d'obtenir tout le graphe.

- [Parité]**



- [Période]**



Exercice 1 Montrer que :

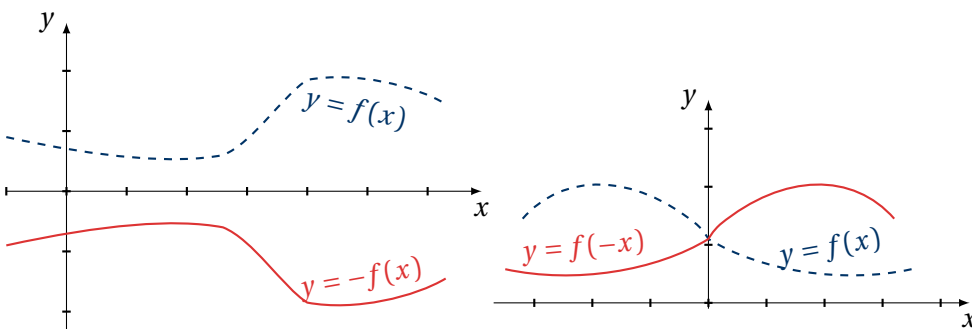
- l'on peut réduire le domaine d'étude de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x) + \sin(x) \cos(3x)$ à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- l'on peut réduire le domaine d'étude de la fonction $f : x \mapsto \cos^4(x) + \sin^4(x)$ à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

1.3 Transformations du graphe

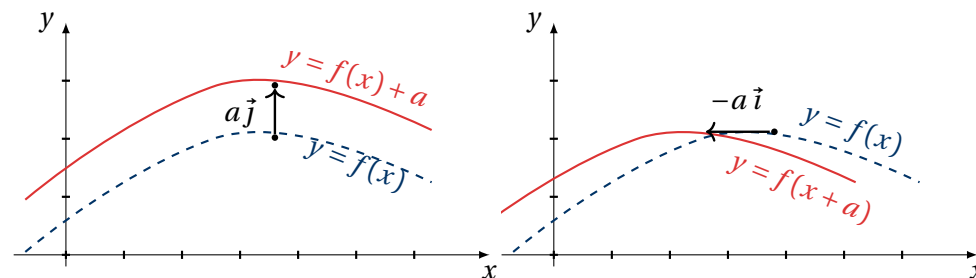
Soient $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 1 | Transformations du graphe : symétries, translations

- Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox) .
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Oy) .



- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.



Preuve

- Notons g la fonction définie par $g(x) = -f(x)$. Alors :



- Notons g la fonction définie par $g(x) = f(-x)$. Alors :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff y = g(x) \iff y = f(-x)$$

$$\iff (-x, y) \in \mathcal{C}_f.$$

Or, l'application $(x, y) \mapsto (-x, y)$ est la symétrie d'axe (Oy) . C'est terminé.

- Notons g la fonction définie par $g(x) = f(x) + a$. Alors :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff y = g(x) \iff y = f(x) + a \iff y - a = f(x)$$

$$\iff (x, y - a) \in \mathcal{C}_f.$$

Or, l'application $(x, y) \mapsto (x, y - a)$ est la translation de vecteur $-a\vec{j}$. C'est terminé.

- Notons g la fonction définie par $g(x) = f(x + a)$. Alors :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff y = g(x) \iff y = f(x + a)$$

$$\iff (x + a, y) \in \mathcal{C}_f.$$

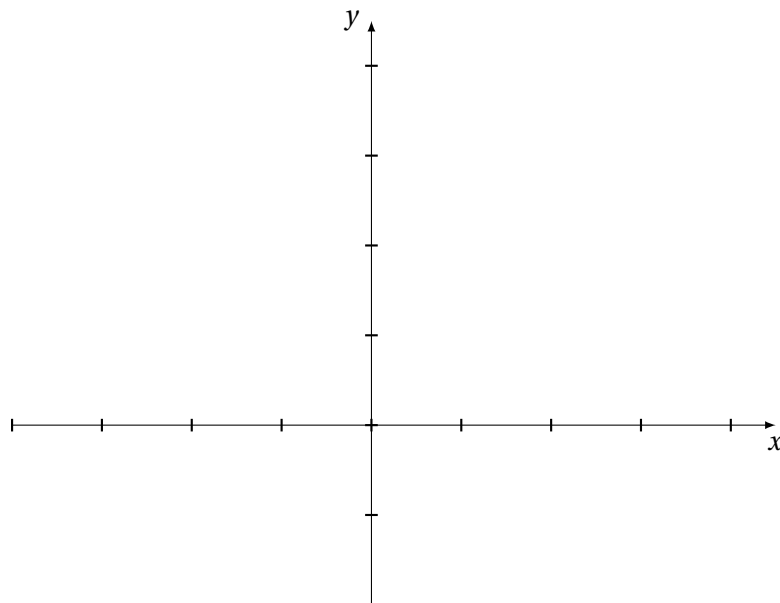
Or, l'application $(x, y) \mapsto (x + a, y)$ est la translation de vecteur $a\vec{i}$. C'est terminé.

Attention

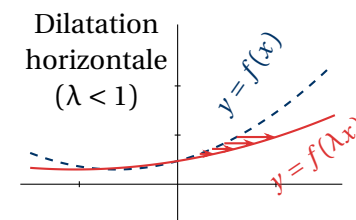
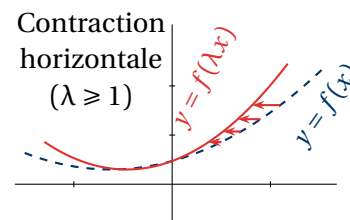
Dans le cas de la fonction $x \mapsto f(x+a)$, il y a un signe $-$ dans l'expression du vecteur de translation $-a\vec{i}$ et c'est normal. La fonction $x \mapsto f(x+a)$ atteint la valeur $f(0)$ en $-a$, puis la valeur $f(1)$ en $-a+1$, etc. En résumé, on peut dire que $x \mapsto f(x+a)$ est *en avance* de a sur $x \mapsto f(x)$.

Exemple 12 À main levée, à partir de la courbe représentative de la fonction racine carrée, tracer les courbes d'équation :

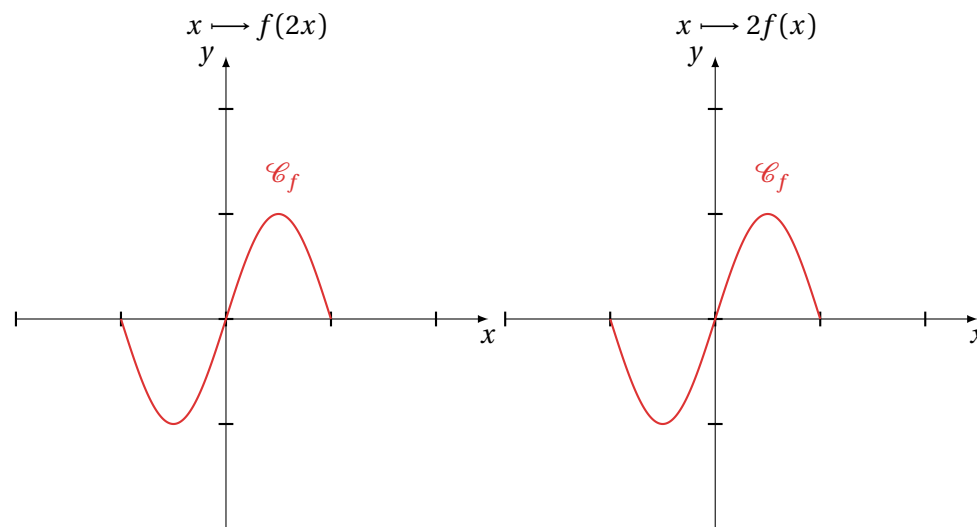
1. $y = \sqrt{1+x}$
2. $y = \sqrt{x}-2$
3. $y = \sqrt{-x}$
4. $y = \sqrt{1+x}+2$



contraction horizontale si $\lambda \geq 1$ et une dilatation horizontale si $\lambda < 1$.

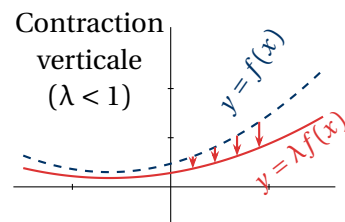
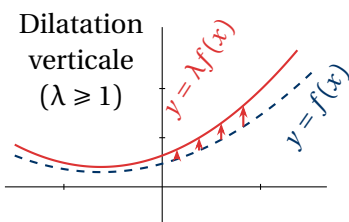


Exemple 13 Sur les graphes suivants, on a représenté la même fonction f définie sur $[-1; 1]$. Représenter les fonctions ci-dessous.



Proposition 2 | Transformations du graphe : dilatations, contractions

- Le graphe de la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale si $\lambda \geq 1$ et une contraction verticale si $\lambda < 1$.



- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ s'obtient à partir de celui de f par une

1.4 Monotonie

Définition 9 | Monotonie

Soit f une fonction.

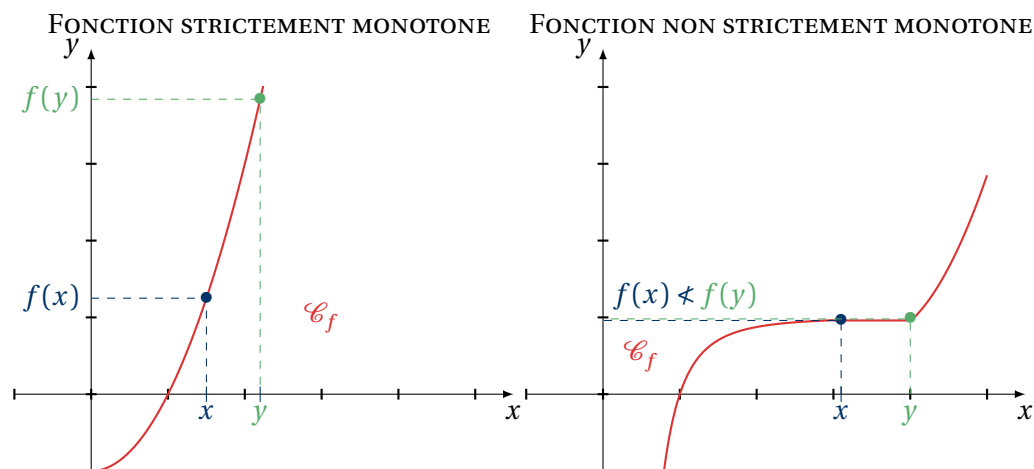
- On dit que f est *constante* sur $\mathcal{D}_f$ si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, f(x) = f(y)$.
- On dit que f est *croissante* (resp. *strictement*) sur $\mathcal{D}_f$ si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ (resp. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, x < y \implies f(x) < f(y)$).

- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur $\mathcal{D}_f$ si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
(resp. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$).
- On dit que f est monotone (*resp. strictement*) sur $\mathcal{D}_f$ si f est croissante ou décroissante (*resp. strictement*) sur $\mathcal{D}_f$.

Remarque 9

- On notera qu'une fonction strictement croissante (*resp. strictement décroissante*) est croissante (*resp. décroissante*).
- Une fonction croissante préserve les inégalités. Une fonction décroissante renverse les inégalités.
- Pour les fonctions strictement monotones, on peut remplacer le symbole « $\implies$ » par « $\iff$ » dans la définition, comme nous l'avons vu dans le **Chapitre (ALG) 2**.



Attention Il faut bien connaître la définition de fonction monotone, en plus de savoir l'établir éventuellement en dérivant (un des objectifs de la suite du chapitre).

Proposition 3 | Opérations sur les fonctions monotones

Soient f, g deux fonctions. Alors :

- [Addition]** si f, g ont même monotonie, $f + g$ aussi.
- [Produit par un scalaire]** Si f est monotone, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est :
 - monotone de même monotonie que f si $\lambda > 0$,

et de monotonie inversée à f si $\lambda < 0$.

[Produit]

- si f, g sont croissantes **positives**, alors fg est croissante,
- si f, g sont décroissantes **positives**, alors fg est décroissante.

[Composition]

- si f, g sont monotones de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante,
- si f, g sont monotones de monotonies opposées, alors $g \circ f$ est décroissante.

Attention

La fonction « identité » $x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais quand on la multiplie par elle-même, le résultat $x \mapsto x^2$ n'est **pas** une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Comme quoi la positivité compte !

Preuve Démontrons par exemple que $g \circ f$ est décroissante, lorsque g est décroissante et f est croissante.



Exemple 14 En utilisant la définition, établir les monotonies ci-après.

- La fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -3e^{-x^2} \end{array} \right.$ croissante sur $\mathbb{R}^+$.



2. La fonction $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est croissante mais n'est pas strictement croissante. (l'étude complète de la partie entière sera faite dans la [Section 5](#))



Nous reverrons plus tard dans le chapitre un moyen plus efficace de prouver que des fonctions sont monotones, autre que la définition.

1.5 Extrema

Définition 10 | Majoration, minoration, borne, sup, inf

Soit f une fonction.

- On dit que f est *majorée* sur $\mathcal{D}_f$ si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$ est majoré, c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \leq M.$$

Dans ce cas, la *borne supérieure* de f , notée $\sup f$, est définie par :

$$\sup f = \sup \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$

- On dit que f est *minorée* sur $\mathcal{D}_f$ si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$ est minoré, c'est-à-dire si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \geq m.$$

Dans ce cas, la *borne inférieure* de f , notée $\inf f$, est définie par :

$$\inf f = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$

- On dit que f est *bornée* sur $\mathcal{D}_f$ si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$ est borné ou encore que f est majorée et minorée, c'est-à-dire si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad m \leq f(x) \leq M.$$

La notion d'ensemble borné peut se réécrire à l'aide de la valeur absolue, c'est donc aussi le cas des fonctions bornées.

Proposition 4 | Fonction bornée et valeur absolue

Soit f une fonction. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est bornée sur } \mathcal{D}_f &\iff |f| \text{ est majorée sur } \mathcal{D}_f \\ &\iff \exists M \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |f(x)| \leq M. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on utilise plutôt cette proposition pour montrer qu'une fonction est bornée. La rédaction est souvent plus simple en exploitant les propriétés de la valeur absolue.

Preuve Utiliser le résultat déjà vu sur les ensembles bornés, appliqué à $A = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$.

Exemple 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) - 3\sin(5x) + 4\cos(7x).$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.



Définition 11 | Extrema global / local

Soit $\mathcal{D}_f$ un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

• [Global]

◇ On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \leq f(x_0).$$

On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$.

◇ On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, et :

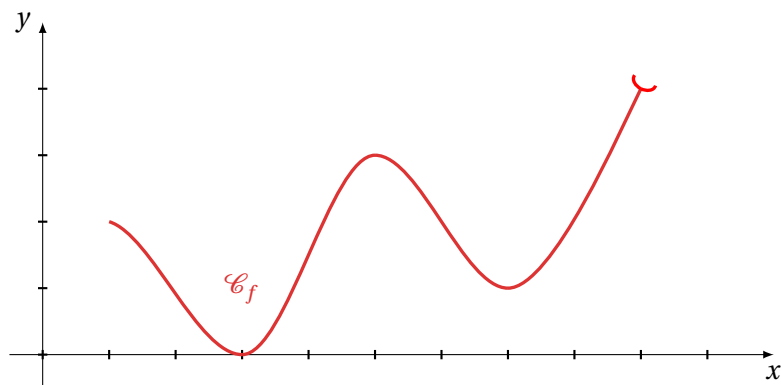
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \geq f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$.

• [Local] On dit que f admet en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ un *minimum local* (resp. *maximum local*) si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage de x_0 , c'est-à-dire un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.

• On dit que f admet en x_0 un *extremum* (resp. *extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (resp. un minimum local ou un maximum local).

Exemple 16



Ici, la fonction f est définie sur $A = [1; 9[$.

- f est bornée sur A car : $\forall x \in A, 0 \leq f(x) \leq 4$.
- 0 est un minorant de f sur A , c'est même le minimum global atteint en 1.
- En revanche 4 est un majorant non atteint de f sur A .
- Il n'y a pas de maximum global.
- Enfin, 1 est un minimum local atteint en 7 et 3 un maximum local atteint en 5.

2

CALCULS DE LIMITES & CONTINUITÉ

Pré-requis

- La notion de limite sera définie proprement dans un prochain chapitre ([Chapitre \(AN\) 6](#)). On supposera donc connue (voir vos cours de lycée) la notion de limite en un point fini ou infini pour une fonction, et leur version à droite ou à gauche.
- On revoie en revanche les règles d'opérations classiques afin de pouvoir effectuer des calculs. La définition de la continuité est rappelée, mais les propriétés complémentaires plus générales (convergence monotone, théorème des valeurs intermédiaires et de la bijection etc.) seront vues plus tard dans l'année.

2.1 Voisinage

Définition 12 | Voisinage

- On appelle *voisinage de $+\infty$* tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
- On appelle *voisinage de $-\infty$* tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
 - ◇ On appelle *voisinage de x_0* tout intervalle de la forme $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ où $\eta > 0$.
 - ◇ On appelle *voisinage de x_0^-* tout intervalle de la forme $]x_0 - \eta, x_0[$ où $\eta > 0$.
 - ◇ On appelle *voisinage de x_0^+* tout intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \eta[$ où $\eta > 0$.

Définition 13 | Propriété vraie sur un voisinage

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit qu'une propriété, dépendant d'une variable x , est vraie au voisinage de x_0 (resp. x_0^+, x_0^-) si elle est vraie pour tout $x \in V_{x_0}$ où V_{x_0} est un voisinage de x_0 (resp. x_0^+, x_0^-).

Exemple 17

1. Soit $f : x \mapsto 2x$. Alors f est positive au voisinage de 0^+ , négative au voisinage de 0^- ; mais son signe n'est pas déterminé au voisinage de 0 (c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$).
2. Soit $f : x \mapsto |x|$. Alors f est positive au voisinage de 0, strictement positive au voisinage de 0^+ et de 0^- ; mais elle n'est pas strictement positive au voisinage de 0.



3. Soit $f : x \mapsto x^2 + x \cos(x)$, alors f est strictement positive au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.



4. Soit $f : x \mapsto \ln(x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, définie au voisinage de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
5. Soit $f : x \mapsto \ln(-x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$, définie au voisinage de 0^- ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
6. Soit $f : x \mapsto \ln(|x|)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, définie au voisinage de 0^- et de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.

Notation Limite d'une fonction

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$. On dit que ℓ est la *limite* de f en x_0 , ce que l'on note :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \ell = \lim_{x_0} f.$$

Attention

Une fonction peut ne pas avoir de limite, nous verrons des exemples plus tard dans l'année.

Le théorème suivant sera démontré plus tard dans l'année, comme la plupart des résultats qui vont suivre.

Théorème 1 | Unicité de la limite

La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

ASYMPTOTES.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$.



- Soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* à la courbe représentative de f .



- La courbe représentative d'une fonction f admettant une limite infinie en $+\infty$ par exemple peut éventuellement dans certains cas admettre une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$. C'est le cas lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$



Exercice 2

- Montrer que le graphe de $f : x \mapsto \frac{3x+2}{4x+3}$ admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -\frac{3}{4}$ et $y = \frac{3}{4}$.
- Soit $g : x \mapsto \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1}$. Montrer que $g(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. En déduire les asymptotes du graphe de g .
- Montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{-3x^2+2x+5\ln(x)}{x}$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de 0^+ .

LIMITE À DROITE OU À GAUCHE. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite **et** à gauche, cela signifie que x se « rapproche par la droite ou la gauche » du point a . Comme annoncé plus haut, on supposera connue cette notion de limite. Rappelons simplement le lien avec la limite à droite et à gauche.

Proposition 5 | Lien limite et limite à droite / gauche

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point à l'intérieur de I (i.e. pas au bord de I).

- Si f est définie en x_0 , alors :
 f admet une limite en $x_0 \iff$

$$\begin{cases} \text{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \text{(ii)} & \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Dans ce cas : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si f n'est pas définie en x_0 , alors :
 f admet une limite en $x_0 \iff$

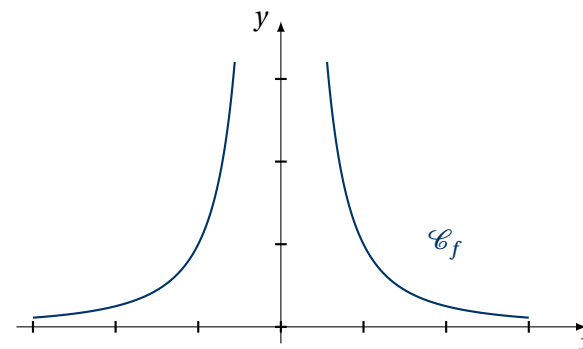
$$\begin{cases} \text{(i)} & f \text{ admet une limite à droite et à gauche,} \\ \text{(ii)} & \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x). \end{cases}$$

Dans ce cas : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Il faut savoir adapter ce résultat aussi au cas où une fonction est définie à droite ou à gauche de x_0 uniquement. Cette proposition est cruciale en pratique pour :

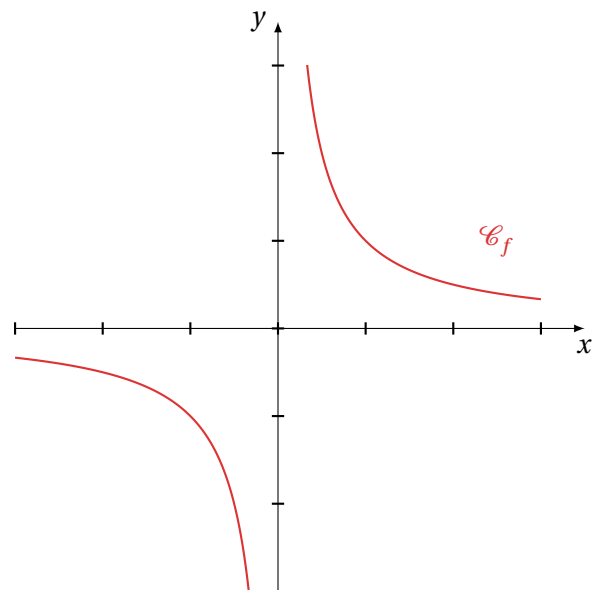
- montrer l'existence d'une limite en un point d'une fonction définie en deux morceaux (avec rupture de l'expression au point étudié),
- ou pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites en un point.

Exemple 18 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ admet une limite à droite et à gauche en 0, égale à $+\infty$. Donc admet une limite en zéro qui vaut $+\infty$.



Exemple 19 (Fonction inverse) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet donc pas de limite en zéro car :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}.$$



Exemple 20 Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0, \\ 1-x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



2.3 Opérations algébriques sur les limites

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire x_0 est soit un nombre réel, soit $\pm\infty$ et soient f et g deux fonctions admettant toutes les deux une limite en x_0 . Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

LIMITE DE $f + g$			
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$+\text{FI}$	$+\infty$	$+\infty$

LIMITE DE $f \times g$				
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$

LIMITE DE g/f				
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' = 0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention Pour retenir, mais sans l'écrire

- On pourra penser très fort, mais sans jamais l'écrire sur une copie, que :

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$



On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Tout cela avec des gros guillemets donc.



Attention Puissances variables $u(x)^{v(x)}$

- Dans le cas d'une limite de la forme $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)}$, on revient **toujours** à la définition de la puissance :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}.$$

On calcule alors la limite de $v(x) \ln(u(x))$, puis on en déduit la limite recherchée, par passage à l'exponentielle.
- En particulier, « 1^∞ » est une forme indéterminée !

Exemple 21 (Attention aux formes indéterminées!) Une forme indéterminée est, comme son nom l'indique, **indéterminée** ! Tout peut arriver :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = 1, \quad \frac{x(2 + \cos x)}{x} \text{ n'a pas de limite en } +\infty,$$

alors que le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

COMPOSITION. On ajoute un nouveau résultat : celui sur les limites de fonctions composées.

Théorème 2 | Compositions de limites (ou Changement de variable) 

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soient x_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de I , y_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de J . Alors :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) \text{ existe} \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y).$$

Remarque 10

- Cet énoncé confirme l'évidence : pour savoir vers quoi tend $g \circ f(x) = g(f(x))$, on regarde déjà vers quoi tend l'expression $f(x)$ à l'intérieur de la parenthèse puis on « applique g » à la limite trouvée, si elle existe.
- Ce théorème est parfois aussi appelé « théorème du changement de va-

riable pour les limites » : on peut penser formellement que l'on pose « $y = f(x)$ », avec $y \rightarrow b$ lorsque $x \rightarrow a$.

Exemple 22

- Déterminer la limite de $x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$.



- Déterminer la limite de $x \mapsto \ln\left(2 - \frac{x^2-1}{x-1}\right)$ en 1^- .



- Comparer, en cas d'existence, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{y} \ln(y).$$



4. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe. Justifier, en effectuant un changement de variable, que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$ existe aussi, et que :
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$



Comment retenir ce théorème ?



Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que :

- l'exponentielle diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de x , qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :

$$(\ln x)^a \ll_{+\infty} x^b \ll_{+\infty} e^{cx}.$$
- Toute puissance de x l'emporte en zéro sur toute puissance de logarithme :

$$x^b (\ln x)^a \ll_0 1.$$
- L'exponentielle tend très vite vers 0 en $-\infty$ et l'emporte sur toutes les puissances de x :

$$x^b \ll_{-\infty} e^{cx}.$$

CROISSANCES COMPARÉES. Il existe des méthodes afin de parfois lever des formes indéterminées sur les limites. Une des plus importantes est l'utilisation d'un résultat sur les « croissances comparées ». Dans cet énoncé apparaissent des puissances réelles, nous (re)verrons cela dans la **Section 5** sur les fonctions usuelles.¹

Théorème 3 | Croissances comparées

Soient a, b et c des réels strictement positifs.

- [En $+\infty$]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^{cx}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^a}{e^{cx}} = 0.$$

- [En 0^+]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b (\ln(x))^a = 0.$$

- [En $-\infty$]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^b e^{cx} = 0.$$



Remarque 11 Ce théorème s'utilise pour n'importe quels a, b, c strictement positifs, même non entiers. Par exemple si $b = \frac{1}{2}$, $x^b = \sqrt{x}$ pour tout $x > 0$.

1. Mais cela n'empêche pas la compréhension de l'énoncé, on peut même considérer pour le moment les puissances comme entières positives.

Méthode (AN) 1.1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparaît peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Exemple 23 Déterminer les limites ci-après.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}},$



2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}},$



3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^x - x^2),$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - \ln x}{x^2 + \ln x},$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \ln x}{x^2 + \ln x},$

THÉORÈMES D'ENCADREMENT (OU DES « GENDARMES ») Les théorèmes ci-après énoncent des faits intuitivement clairs :

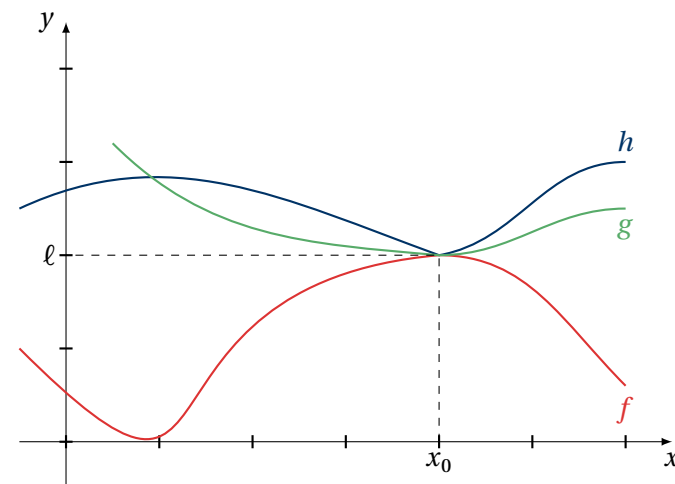
- si une fonction f est minorée par une autre qui diverge en un point vers $+\infty$, alors f diverge aussi vers $+\infty$ en ce point,
- de-même si une fonction f est majorée par une autre qui diverge en un point vers $-\infty$, alors f diverge aussi vers $-\infty$ en ce point.
- Enfin, si f est encadré par deux autres qui tendent vers la même limite en un point, alors f tend aussi vers cette limite en ce point. Ce cas-là est souvent appelé « théorème des gendarmes ».

Théorème 4 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)
Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère trois fonctions

$f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- $$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (\text{ou au moins sur un voisinage de } x_0), \\ \text{(ii)} & \text{les deux fonctions } f \text{ et } h \text{ admettent } \ell \text{ pour limite en } x_0. \end{cases}$$

Alors : $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell.$



Corollaire 1 | Version valeur absolue & Bornée « $\times \rightarrow 0$ »

- Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- $$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in I, |f(x)| \leq g(x) \quad (\text{ou au moins sur un voisinage de } x_0) \\ \text{(ii)} & g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \end{cases}$$

Alors : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$

- Le produit d'une fonction bornée au voisinage de x_0 et fonction tendant vers zéro en x_0 est une fonction tendant vers zéro en x_0 .

Preuve

- $\pencil$ L'hypothèse donne au voisinage de x_0 : $-g \leq f \leq g$. Donc puisque $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, $-g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ donc par théorème d'encadrement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.
- $\pencil$ Soit f une fonction bornée au voisinage de x_0 disons par $M \in \mathbb{R}^+$, et g fonction tendant vers zéro en x_0 . Alors au voisinage de x_0 , $0 \leq |f g| \leq M |g|$. Comme $|g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, on conclut à l'aide de la première partie de la preuve.



Théorème 5 | Théorème de minoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in I$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \quad (\text{ou au moins sur un voisinage de } x_0) \\ \text{(ii)} & f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty. \end{cases}$$

Alors : $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$.



Théorème 6 | Théorème de majoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in I$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \quad (\text{ou au moins sur un voisinage de } x_0) \\ \text{(ii)} & g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty. \end{cases}$$

Alors : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$.

Ces deux théorèmes se démontrent, comme celui des gendarmes, à l'aide de la définition rigoureuse de la limite que nous verrons plus tard.

Exemple 24 Calculer les limites ci-après, en justifiant l'existence. Rappelons que nous avons établi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq [x] \leq x.$$

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}.$



2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{\sqrt{x}}.$



On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq [x] \leq x.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on déduit alors :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}} < \frac{[x]}{\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \frac{[x]}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(1-\frac{1}{x}) = \infty$. Donc d'après le théorème de divergence par minoration, on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{\sqrt{x}} = \infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

- [Rédaction avec valeurs absolues (♥)]



- [Rédaction sans valeurs absolues]



4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^3}.$

- [Rédaction avec valeurs absolues (♥)]



- [Rédaction sans valeurs absolues]



2.4 Continuité

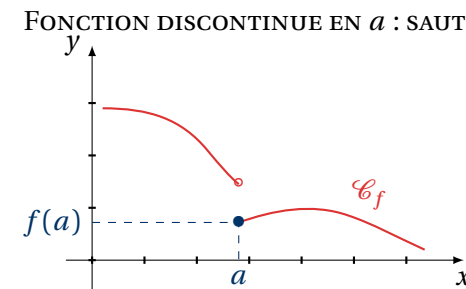
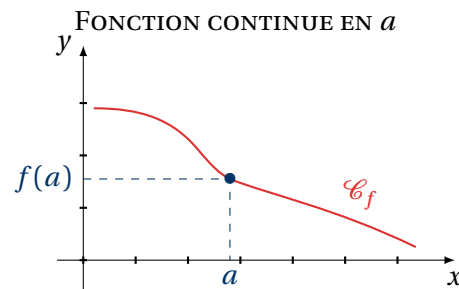
GÉNÉRALITÉS. Intuitivement, les fonctions continues sont des fonctions que l'on peut tracer « sans lever le crayon ».

Définition 14 | Continuité en un point

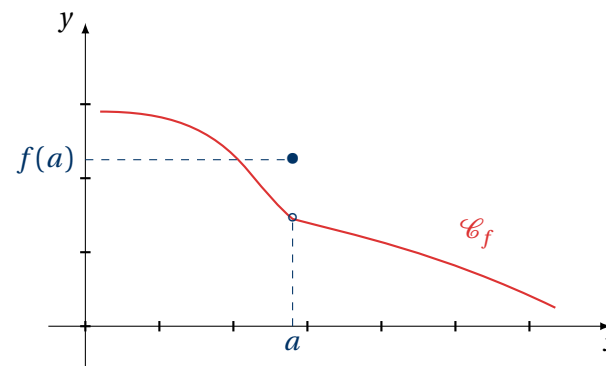
Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est *continue en x_0* si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

! Attention

On parle de continuité en un point de **l'ensemble de définition**, puisque $x_0 \in I$ dans la définition précédente. La question ne se pose donc même pas en les points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.



FONCTION DISCONTINUE EN a



Définition 15 | Continuité à droite, continuité à gauche

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que :

- f est *continue à gauche* en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est *continue à droite* en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 6 | Continuité, à gauche et à droite

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0 . Alors :

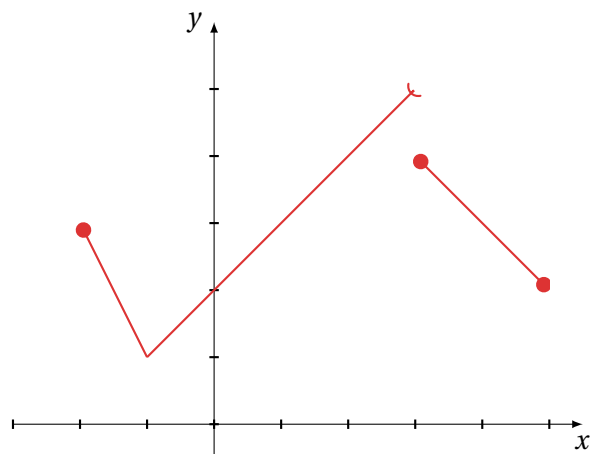
$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Note

Attention : puisqu'ici la fonction f est définie en x_0 , il ne faut pas oublier l'égalité à $f(x_0)$.

Exemple 25 Considérons le graphe suivant d'une fonction f :



Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.



Définition 16 | Continuité sur un intervalle

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *continue sur* I si : $\forall x_0 \in I, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si elle est continue en tout $x_0 \in I$.

Notation

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES. Passons maintenant aux propriétés qui vont nous permettre de montrer que des fonctions sont continues en pratique.

Proposition 7 | Opérations sur les fonctions continues en un point

Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in I$. Alors :

- les fonctions $|f|$, $f + g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues en x_0 .
- De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0 .

On déduit immédiatement de la définition d'une fonction continue, des versions locales des deux énoncés précédents leur version globale : « Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I . Alors les fonctions $|f|$, $f + g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues sur I . De plus, si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I . »

Théorème 7 | Composition de fonctions continues

Soient I et J deux intervalles, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

- [Version locale]** Soit $x_0 \in I$. Alors :
 - (i) f est continue en x_0
 - (ii) g est continue en $f(x_0)$ $\implies g \circ f$ est continue en x_0 .
- [Version globale]** Si f est continue sur I et g est continue sur J , alors $g \circ f$ est continue sur I .

Méthode (AN) 1.2 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition.

3

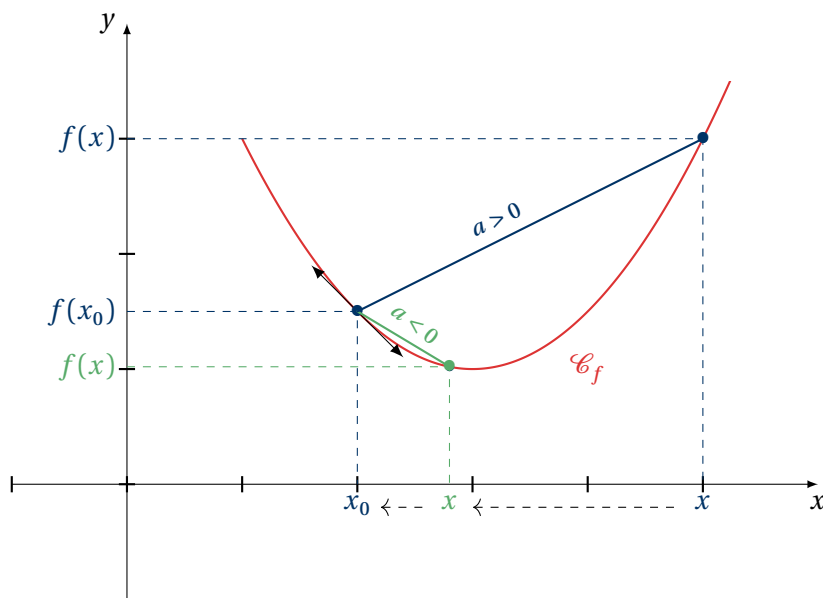
CALCULS DE DÉRIVÉES

L'objectif de cette section est de rappeler la définition du nombre dérivé, de fonction dérivable, les principales formules à connaître pour dériver une fonction et de savoir en déduire la monotonie. Les « grands théorèmes » sur les fonctions dérivables seront vus plus tard dans l'année, dans le [Chapitre \(AN\) 6](#).

3.1 Nombre dérivé, fonction dérivable

Une application principale de la dérivation sera pour nous l'obtention de la monotonie d'une fonction. Considérons $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comment savoir si f croît après x_0 ? Observons la corde reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ pour $x > x_0$.

- Sur la corde bleue (à droite au-dessus), on observe un coefficient directeur positif, alors que la courbe décroît juste après x_0 .



- Cela montre qu'il faut bien faire « se rapprocher x de x_0 » pour que le signe du coefficient directeur de la corde donne la monotonie localement autour de x_0 . Vous voyez l'objet mathématique qui répond à cette problématique : la limite quand x tend vers x_0 .

Définition 17 | Dérivabilité

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Taux d'accroissement de } f \text{ entre } x \text{ et } x_0} \end{array}$$

admet une limite finie en x_0 . La limite est alors appelée le *nombre dérivé* de f en x_0 .

- On dit que f est *dérivable à droite* en x_0 (*resp.* à gauche) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche.

Remarque 12 (Version « $x_0 + h$ ») La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ »), être écrite sous cette forme :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Notation

On note en général (sous réserve d'existence) :

- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ la dérivée de f en x_0 ,
- $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ la dérivée de f à gauche en x_0 ,
- $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ la dérivée de f à droite en x_0 .

On obtient directement des résultats sur les limites, la propriété suivante.

Proposition 8 | Dérivabilité, à gauche et à droite

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \text{(i)} & f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \text{(ii)} & f'_g(x_0) = f'_d(x_0). \end{cases}$$

Remarque 13

- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x . Lorsque f est dérivable en x_0 , le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

Définition 18 | Tangente

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en $x_0 \in I$, on appelle *tangente* à f d'abscisse a la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- Si f est dérivable à gauche (*resp.* droite) en $x_0 \in I$, on appelle *demi-tangente à gauche* (*resp.* droite) à f d'abscisse x_0 la droite d'équation :

$$y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \left(\text{resp.} \quad y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \right).$$

On dit que f admet une *tangente horizontale* en x_0 lorsque $f'(x_0) = 0$.

Exemple 26 Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.



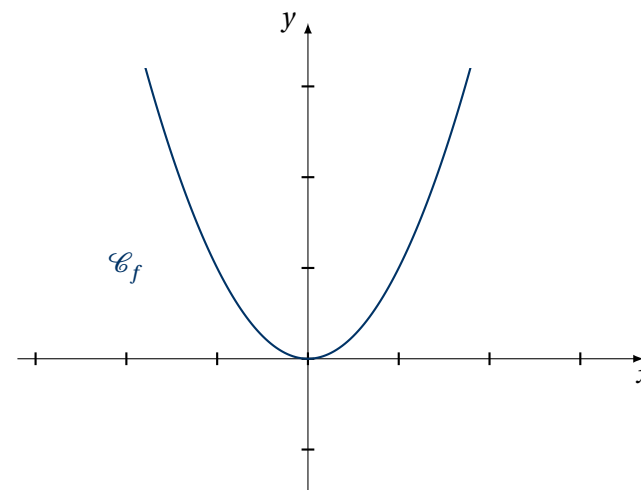
2. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.



3. Déterminer l'équation de la tangente à T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Même question pour T_1 au point d'abscisse 1.



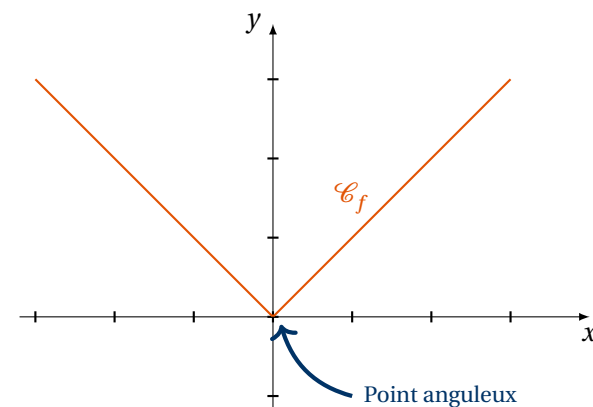
4. Représenter les tangentes sur le graphique ci-contre.



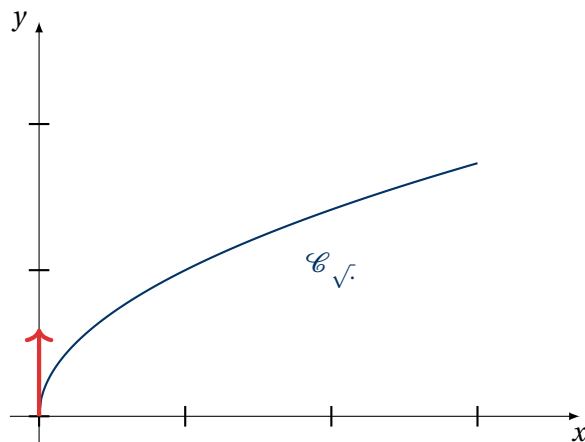
Exercice 3 Déterminer une équation de la tangente au graphe de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 7x + 5$ au point d'abscisse 2.

Exemple 27 (Deux causes de non-dérivabilité : *point anguleux* ou *tangente verticale*)

- La valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.



- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



Notation

On note le nombre dérivé en x_0 par $f'(x_0)$, ou encore en « notation physicien » $\frac{df}{dx}(x_0)$. Cette seconde a le mérite de ne faire pas perdre de vue la définition du taux d'accroissement.

Notation Dérivée d'une expression

Soit une expression $f(x)$ dépendant de $x \in \mathbb{R}$, avec f une fonction dérivable. On notera dans la suite indifféremment :

- $\frac{df}{dx}(x)$ la fonction f' évaluée en x ,
- $\frac{d}{dx}[f(x)]$ la dérivée de l'expression $f(x)$ par rapport à x .

En particulier, on n'écrira pas $f(x)'$.

Il y a un lien entre la continuité et la dérivabilité. En effet, toute fonction dérivable est continue.

Théorème 8 | Dérivabilité & Continuité

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Preuve On commence par récrire l'expression de la fonction, pour $x \neq x_0$ dans I , nous avons :

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$



Attention

La réciproque est, en général, fausse. La valeur absolue est continue en zéro, alors qu'elle n'y est pas dérivable comme nous l'avons déjà constaté.

Enfin, en faisant varier x_0 on crée ainsi une nouvelle fonction notée f' .

Définition 19 | Fonction dérivée, Fonction dérivable

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de* f .

3.2 Calculs de dérivées

Maintenant, comment calculer concrètement la dérivée d'une fonction ? Comment savoir si une fonction est dérivable ? Pour le second point, on établit une bonne fois pour toute que la plupart des fonctions usuelles le sont. Pour le premier point, nous aurons des formules. Commençons par un exemple.

Exemple 28 (Avec la définition, fonction racine) Considérons $f : x \mapsto \sqrt{x}$, et montrer que f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$.



En résumé, on a établi que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

On peut appliquer cela pour la plupart des fonctions usuelles connues, les résultats seront récapitulés dans la prochaine section, et aussi dans le tableau ci-après.

FORMULAIRE DE DÉRIVATION : POINT D'ÉTAPE. Vous trouverez ci-après le formulaire des dérivées des fonctions connues en fin de Terminale Spécialité (ce formulaire sera élargi en fin de cours).

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle, c une **constante** réelle et $n \in \mathbb{N}^*$

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Fonction f'	$\mathcal{D}_{f'} \subset \mathcal{D}_f$
$f(x) = c$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$(\text{ou } \mathbb{R}^*)$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{R}^*)$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

De plus, tout polynôme ou toute fraction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

Maintenant, comment dériver des sommes/produits/quotients *etc.* de fonctions dérivables? Nous avons également des formules, qui se démontrent toutes à l'aide de la définition.

Proposition 9 | Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables sur I .

- **[Linéarité]** pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I , et :
 $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

On dit que la dérivation est *linéaire*.

- **[Produit]** $f g$ est dérivable sur I et
 $(f g)' = f' g + f g'$.

- **[Quotient]** Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Preuve Provisoirement admis.

Remarque 14 En revanche, il n'existe pas de formule au programme pour la dérivée n -ième d'un produit ou quotient.

Exemple 29 (Dérivée de tan) Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Déterminer la dérivée de la fonction $\tan$ définie sur $\mathcal{D}$ par : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Exemple 30 Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions f suivantes et donner, lorsqu'elle existe, l'équation de la tangente à leur courbe au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ indiqué. On supposera que x appartient à l'ensemble de définition de f que l'on précisera.

1. $f(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad (a = 0)$



2. $f(x) = \cos x \sin x \quad (a = 0)$



3. $f(x) = \frac{x^2 \cos(x)}{3} + \ln(x) \quad (a = 1)$



4. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad (a = 1)$



5. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad (a = 1)$



Exercice 4 Déterminer le domaine de définition et la dérivée de $f : x \mapsto \frac{3x^2 - \sin x}{e^x + 2} - \frac{1}{\cos x}$.

DÉRIVER UNE COMPOSÉE.

Théorème 9 | Dérivation d'une composée



Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I , g est dérivable sur J , alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Preuve Provisoirement admis.

Résumé Dérivée d'une composée



Nous pouvons retenir cette formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (\text{extérieur} \circ \text{intérieur})' &= (\text{extérieur}(\text{intérieur}))' \\ &= \text{intérieur}' \times (\text{extérieur}'(\text{intérieur})). \end{aligned}$$

Exemple 31 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(|x|) \end{cases}$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.



Continuons avec des exemples usuels théoriquement à connaître, mais qui se retrouvent très rapidement à partir du théorème précédent, mieux vaut ne pas les apprendre par coeur inutilement.

Exemple 32 (Formules générales) Soit u une fonction numérique dérivable. Pour les dérivées ci-après, préciser sous quelle condition sur u la composition est possible, et justifier la dérivabilité, puis donner une formule pour la dérivée.

1. $u^n, n \in \mathbb{Z}^*.$

2. $e^u.$

3. $\ln |u|.$

4. $\cos(u), \sin(u).$

5. $\tan(u).$

6. $\sqrt{u}.$

POINT D'ÉTAPE : FORMULAIRE DE DÉRIVATION D'UNE COMPOSÉE. Pour u une fonction réelle à valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de la fonction par laquelle on compose, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$
$(\cos u)' = -u'\sin(u)$	$(\sin u)' = u'\cos u$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	

Notez le point important suivant :

pour la plupart des fonctions usuelles, le domaine de définition est le domaine de dérivabilité. En revanche, cela peut ne pas être le cas lorsque la fonction fait apparaître une racine ou une valeur absolue.

Exemple 33 (Exemples de dérivées de composées) Pour les fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes, et calculer leur dérivées.

1. $f(x) = \ln\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)$



2. $g(x) = \frac{x \ln(x)}{e^{x^2}}$



3. $h(x) = \sqrt{1+x^2}$



4. $i(x) = \sqrt{1-x^2}$.



3.3 Lien avec la monotonie

Théorème 10 | Monotonie et signe de la dérivée

Soit I un intervalle non-vidé de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

• [Monotonie]

f est croissante $\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$,

f est décroissante $\iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

• [Stricte monotonie]

- ◇ Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement décroissante.
- ◇ Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement croissante.

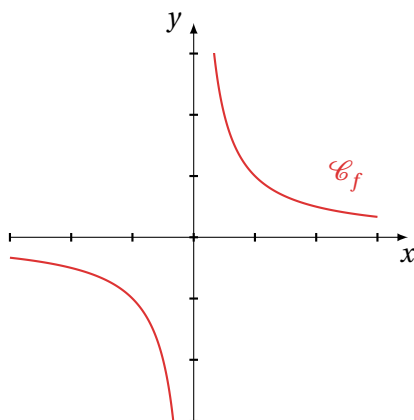


Remarque 15

- Pour la stricte monotonie, il n'est donc pas indispensable que le signe soit strict sur tout l'ensemble de définition. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, même si sa dérivée s'annule en zéro.
- Un intervalle comme ensemble de définition est cependant crucial : par exemple, pour $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

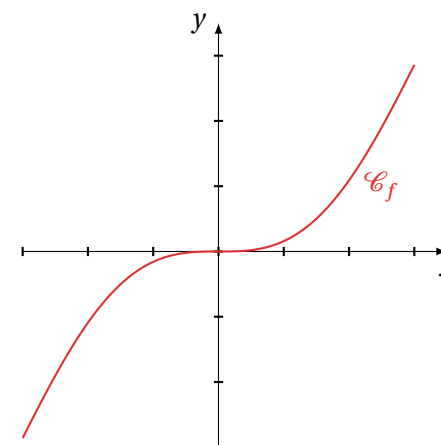
Et pourtant f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à cause du « saut » autour de 0 : $-1 < 1$ alors que $f(-1) < f(1)$.



Exemple 34 Par exemple, la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x - \sin(x) \end{cases}$$

est strictement croissante alors que sa dérivée s'annule un nombre infini de fois.



3.4 Application aux calculs de limites

Puisqu'un taux de variation est une limite, faisant apparaître en plus une forme indéterminée (le dénominateur tend vers zéro), le calcul d'une dérivée peut donc donner de précieux résultats sur la valeur cherchée de la limite.

Méthode (AN) 1.3 (Limite calculable par taux de variation) Si une expression est de la forme suivante, pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 , avec x_0 aux bords de I ou dans I , alors :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

En particulier, si f s'annule en x_0 , on a :

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

On commence par un exemple simple. Ceux faisant intervenir des fonctions usuelles seront faits dans la prochaine section.

Exemple 35 Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ selon deux méthodes.



Exemple 36 Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.



4

PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

L'objectif majeur de ce chapitre est de savoir étudier complètement une fonction. Rappelons l'exercice typique sur le sujet.

Étapes d'une étude de fonction

- Étudier si nécessaire l'ensemble de définition.
- Rechercher les propriétés géométriques de la courbe : si la fonction est paire ou impaire, on se contente de l'étudier sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$; si la fonction est T-périodique, on peut se contenter d'une étude sur une période.
- Justifier le caractère dérivable de la fonction sur un certain intervalle. (*à ce stade de l'année, en invoquant les résultats sur les opérations de fonctions dérivables*)
- Calculer la dérivée de la fonction sur cet intervalle, et étudier son signe. Le calcul de la dérivée donne aussi les tangentes remarquables (horizontales en particulier).
- Déterminer les limites et les éventuelles asymptotes aux bornes de l'ensemble d'étude.
- Dresser le tableau des variations de la fonction. Calculer la valeur des éventuels *extrema* et quelques valeurs remarquables si nécessaire.
- Étudier éventuellement la position relative de la courbe représentant la fonction par rapport à certaines de ces tangentes ou asymptotes.
- Tracer une représentation graphique de la fonction.

Afin d'illustrer cela, traitons deux exemples complets.

Exemple 37 Soit la fonction : $f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f .



2. La fonction f est-elle paire/impair ? Réduire le domaine d'étude.



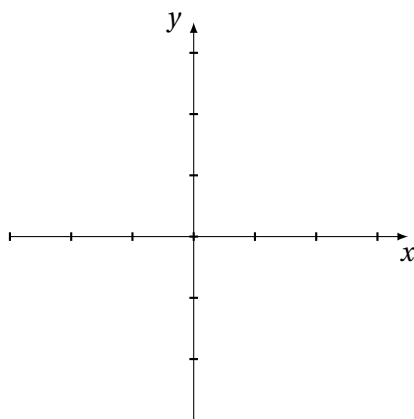
3. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.



4. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur le domaine d'étude. La fonction f admet-elle des *extrema* locaux?



5. Tracer le graphe complet de la fonction f .



5 FONCTIONS USUELLES

Pour chaque fonction, nous donnons :

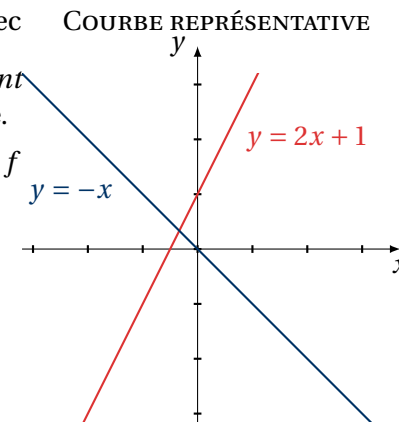
- la forme de son expression, quelques propriétés, la dérivée et le domaine de dérivabilité,
- sa représentation graphique.
- certaines limites remarquables,
- Et un contexte (mathématique, physique, ...) où intervient ladite fonction.

Tous ces points doivent être maîtrisés car ils sont susceptibles d'intervenir dans les exercices.

5.1 Fonctions polynomiales

Définition/Proposition 1 | Fonctions affines

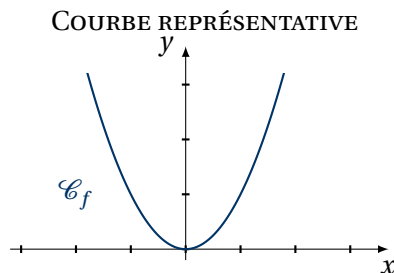
- [Définition]** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x \mapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le réel a est appelé le *coefficient directeur* de f , b son ordonnée à l'origine.
- Si $b = 0$, on dit que f est *linéaire*. Si $a = 0$, f est constante.
- [Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a$.
- [Limites]**
 - $\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = -\infty$, si $a > 0$,
 - $\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b) = +\infty$, si $a > 0$,
 - $\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = +\infty$, si $a < 0$,
 - $\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b) = -\infty$, si $a < 0$.



Exemple 38 D'après la loi d'Ohm, la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle à l'intensité : $U(I) = RI$ avec les notations du cours de physique. La tension est donc une fonction linéaire de l'intensité.

Définition/Proposition 2 | Fonction carré, cas $n = 2$

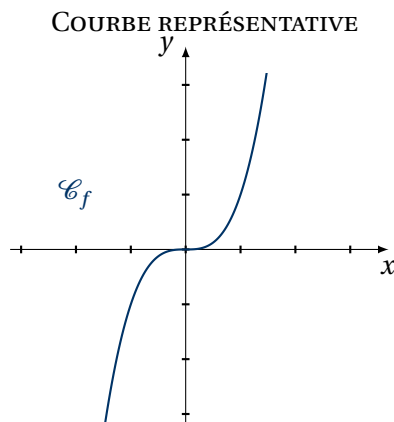
- [Définition] $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2. \end{array} \right.$
- [Propriété(s)] f est paire.
- [Dérivée] $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x.$
- [Limites]
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty,$
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty.$



Exemple 39 L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse du corps : $E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 3 | Fonction cube, cas $n = 3$

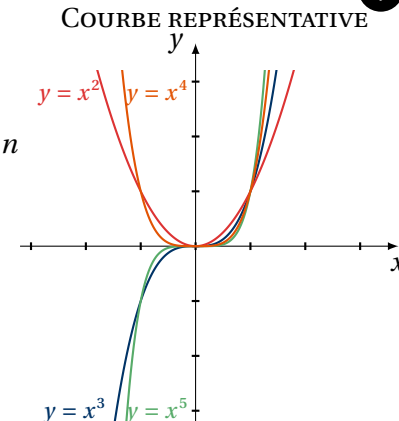
- [Définition] $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3. \end{array} \right.$
- [Propriété(s)] f est impaire.
- [Dérivée] $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2.$
- [Limites]
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty,$
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = +\infty.$



Définition/Proposition 4 | Fonction monôme $x \mapsto x^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- [Définition] $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n. \end{array} \right.$
- [Principales propriétés] f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- [Dérivée] f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1}.$
- [Limites]
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair,
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair,
 - ◇ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$



Définition/Proposition 5 | Fonction polynomiale de degré n

- [Définition] $P \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{array} \right.$ avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels appelés les *coefficients* du polynôme.
- [Dérivée] P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,
 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$
- [Limites] $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)$, c'est-à-dire celle donnée par la plus grand puissance.

Preuve Démontrons la propriété sur la limite en $\pm\infty$.



Méthode (AN) 1.4 (Limite d'un quotient de polynômes) Pour déterminer la limite en $\pm\infty$ de :

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

on factorise au numérateur par $a_n x^n$ et au dénominateur par $b_m x^m$ et on sim-

plifie le quotient de ces deux termes en $\frac{a_n x^{n-m}}{b_m}$, avant de passer à la limite. On dit que l'on « met en facteur les monômes de plus haut degré ».

Attention
Cette méthode ne fonctionne que pour les limites en $\pm\infty$.

Exemple 40 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$.



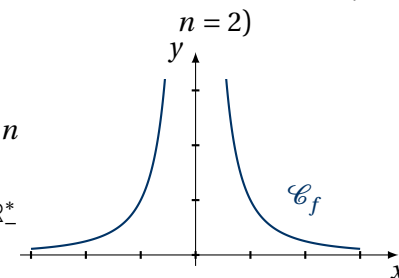
Définition/Proposition 7 | Fonction carrée inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.²

COURBE REPRÉSENTATIVE (cas

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^n} \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.



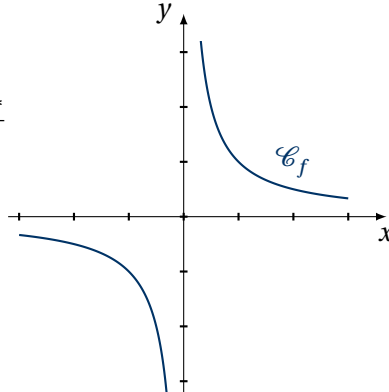
Exemple 42 Si un corps A et un corps B de masses m_A et m_B sont séparés par une distance d , alors la valeur F de la force de gravitation qui s'exerce entre eux est : $F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$ avec les notations du cours de physique.

5.2 Fonction monôme inverse

Définition/Proposition 6 | Fonction inverse, cas $n = 1$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est impaire.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- **[Limites]**
 - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



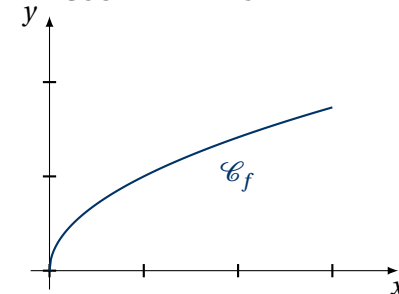
Exemple 41 D'après la loi des gaz parfaits, la pression est inversement proportionnelle au volume : $P(V) = \frac{nRT}{V}$ avec les notations du cours de physique.

5.3 Fonction racine carrée

Définition/Proposition 8 | Fonction racine carrée

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Elle n'est pas dérivable en zéro.
- **[Limites]** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 43 Le principe de TORRICELLI est un principe de mécanique des fluides qui établit que le carré de la vitesse d'écoulement d'un fluide sous l'effet de la pesanteur est proportionnel à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture

2. Pour $n = 0$, on retrouve une fonction affine, donc déjà étudiée.

par laquelle il s'échappe du cylindre qui le contient.

$$v^2 = 2gh, \quad v = \sqrt{2gh},$$

avec les notations du cours de physique.

Méthode (AN) 1.5 (Expression conjuguée pour les F.I. avec racines) Pour calculer des limites d'expressions de la forme $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$ le plus souvent polynomiale, on a souvent recours à la technique de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)} = \frac{(\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)})(\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)})}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}} = \frac{u(x) - v(x)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}}.$$

Sous cette forme, la limite n'est souvent plus indéterminée après avoir mis dans la racine les monômes les plus importants en facteur.

Exemple 44 Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1})$.



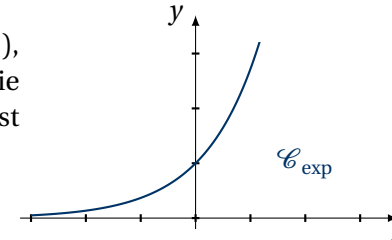
5.4.1 Exponentielle et logarithme

Définition/Proposition 9 | Fonction exponentielle



- **[Définition]** $\exp \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{++} \\ x \mapsto \exp(x), \end{array} \right.$ ou COURBE REPRÉSENTATIVE encore e^x comme notation pour $\exp(x)$, avec e la constante de NÉPER, et définie comme $e = \exp(1)$. La fonction $\exp$ est l'unique fonction f dérivable, vérifiant :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$



- **[Principales propriétés]**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^x > 0, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^x)^n = e^{nx}.$$

- **[Dérivée]** $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

- **[Limites]**

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0,$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty,$$

$$\diamond \text{[Taux]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Preuve

- L'existence d'une unique fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est admise. La stricte positivité sera prouvée dans le point suivant.
- $\diamond$ Soit $y \in \mathbb{R}$. Introduisons la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{x+y}}{e^x}$.



- $\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x = e^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$. L'inégalité est même stricte puisque l'exponentielle ne peut s'annuler (conséquence de $e^x e^{-x} = 1$).
 - $\diamond$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $e^x = e^{x-y+y} = e^{x-y} e^y$. Le résultat se déduit alors en divisant par $e^y \neq 0$ de chaque côté.
 - $\diamond$ Par récurrence.
- Conséquence immédiate de la définition.

5.4 Fonctions exponentielles, logarithme et puissances

- ♦ Nous avons déjà établi (voir le **Chapitre (ALG) 2**) que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
- ♦ Le théorème de divergence par minoration permet ensuite de conclure quant à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- ♦ En effectuant le changement de variable $y = -x$, on déduit l'autre limite : 

- ♦ **[Taux]** 

Exemple 45

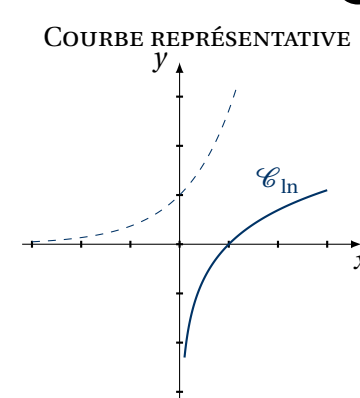
- La loi de décroissance radioactive affirme que le nombre de noyaux désintégrés au bout d'une durée t s'exprime comme $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où N_0 est le nombre de noyau à $t = 0$ et λ est la constante radioactive, caractéristique du noyau radioactif considéré.
- Le modèle de dynamique des populations de MALTHUS affirme que le nombre d'individus $N(t)$ au temps $t \geq 0$ s'exprime comme : $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ où N_0 est le nombre d'individus au temps initial et λ est le taux de croissance de la population.

5.4.2 Fonction logarithme népérien $\ln$ et décimal $\log$ Pour le logarithme, nous admettons l'ensemble des propriétés.

Définition/Proposition 10 | Logarithme népérien



- **[Définition]** $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$, où $\ln(x)$ est l'unique réel tel que : $\forall x > 0, \exp(\ln(x)) = x$.
- **[Principales propriétés]** $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$
 $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- **[Dérivée]** $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$
- **[Limites]** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$
- **[Taux]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- **[Réciproque de l'exponentielle]** $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp \circ \ln(x) = e^{\ln(x)} = x,$
 $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = \ln(e^x) = x.$



La dernière propriété signifie que $\exp, \ln$ sont réciproques l'une de l'autre, nous étudierons plus en détail cela dans le **Chapitre (ALG) 7**.

Exemple 46 En physique statistique, la formule de BOLTZMANN (1877) définit l'entropie microcanonique d'un système physique à l'équilibre macroscopique, libre d'évoluer à l'échelle microscopique entre Ω micro-états différents. Elle s'écrit : $S = k_B \ln(\Omega)$ où k_B est la constante de BOLTZMANN.

Dans certaines disciplines, notamment en Physique-Chimie pour des grandeurs variant sur des puissances de 10, par exemple entre 10^{-10} et 10^{10} , il peut être plus pratique de manipuler des « logarithmes décimaux » plutôt que le logarithme népérien. Par exemple, si $k \in \mathbb{N}, \ln(10^k) = \ln(e^{k \ln 10}) = k \ln 10$ (★). Plutôt que de manipuler des $\ln 10$ dans certains calculs, on préfère considérer la fonction $\log = \frac{\ln}{\ln 10}$, de sorte qu' (★) se simplifie en $\log(10^k) = k$.

Mathématiquement, cette fonction ne représente que peu d'intérêts puisqu'elle est égale à une constante près à une fonction déjà connue (le logarithme népérien).

Définition/Proposition 11 | Fonction logarithme décimal

● [Définition]

$$\log \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}. \end{array} \right.$$

● [Principales propriétés]

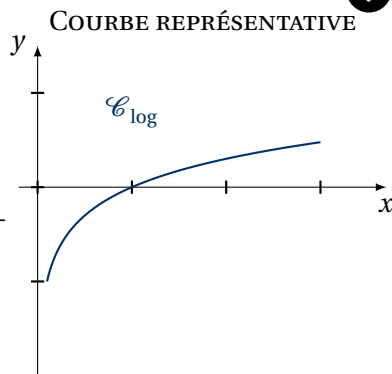
- ◇ $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y),$
- ◇ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 10^{\log(x)} = x,$
- ◇ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \log(10^a) = a.$

● [Dérivée] $\log$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln'(x) = \frac{1}{\ln(10)x}.$$

● [Limites]

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty.$



par :

$$10^{n-1} \leq x < 10^n \iff n-1 \leq \log_{10}(x) < n \iff n = 1 + \lfloor \log_{10}(x) \rfloor.$$

5.4.3 Puissances générales & Exponentielle en base a Rappelons les puissances que nous connaissons déjà.

- a^n avec $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}$. Nous l'avons vu dans le **Chapitre (ALG) 2** sur les nombres réels.
- Nous avons également défini $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ lorsque $a \geq 0$, et $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Nous allons à présent définir a^b pour tout $b \in \mathbb{R}$, lorsque $a > 0$. Réécrivons notre définition du **Chapitre (ALG) 2** à l'aide de l'exponentielle et du logarithme. On a d'après les propriétés de l'exponentielle :

$$a^n = (e^{\ln a})^n = e^{n \ln a}.$$

Il apparaît que cette écriture de la puissance peut être étendue à n'importe quelle autre puissance réelle (pas seulement un entier n). On aboutit donc à la définition ci-après.

Définition 21 | Puissances généralisées

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit le réel a^b par : $a^b = e^{b \ln a}$.

Note

Cette définition a le bpm goût de généraliser l'exposant (autorisé à être réel cette fois). Cependant, puisque $\ln$ est défini uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle est moins générale vis-à-vis de a que la définition $a^n = a \times \dots \times a$. On ne peut pas tout avoir.

Exemple 47

- En milieu dilué, on définit le pH par la relation $pH = -\log([H_3O^+])$, où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en H_3O^+ .
- La magnitude locale d'un séisme se calcule comme

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

De façon plus générale, on définit le logarithme en base b de la façon suivante :

Définition 20 | Logarithme en base b

Soit $b \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. On appelle fonction logarithme de base b la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

Ainsi, le logarithme décimal coïncide avec le logarithme en base 10.

Exercice 5 Soit $x \geq 1$. Montrer que le nombre de chiffres avant la virgule de l'écriture de x en base 10 est : $n = 1 + \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. En effet, n est caractérisé

Exemple 48 Écrire sous forme exponentielle $(2)^{\frac{1}{3}}$ et $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$.

**Exemple 49**

1. Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad x^n \geq 10.$$

(Vous pourrez noter que, après le cours sur les suites, cela sera une conséquence directe du fait que $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ (car $x > 1$, résultat classique sur les suites géométriques))



2. Montrer en revanche que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad x^n \geq 10 \quad \text{est fausse.}$$



Exercice 6 Soient I un intervalle et $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$. On définit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}.$$

Montrer que si u et v sont dérivables sur I , alors f est dérivable sur I , et calculer f' .

Constatons que pour différentes valeurs de b , on retrouve diverses quantités usuelles déjà définies dans le [Chapitre \(ALG\) 2](#).

Proposition 10 | Puissances particulières

Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet [b = 1/2] \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad \bullet [b = 1/3] \quad x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}.$$

Attention

La racine cubique d'un réel strictement positif s'écrit donc sous forme d'une puissance $\frac{1}{3}$. En revanche, nous n'avons rien dit des réels négatifs (dont la racine cubique existe).

Preuve D'après la définition du [Chapitre \(ALG\) 2](#), il s'agit de montrer que : $x^{\frac{1}{2}} \geq 0$, et que $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$.



On vérifie sans peine que toutes les propriétés classiques sur les puissances restent valables.

Proposition 11 | Règles sur les puissances

Soit $(a, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ et $(b, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

- $a^{b_1+b_2} = a^{b_1} \times a^{b_2} \quad (a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 \times b_2} \quad (a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b.$
- $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}, \quad \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2} = \frac{1}{a^{b_2-b_1}}.$

Remarque 16 (On peut faire encore mieux) Nous pouvons faire encore mieux dans le cas des puissances $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec q un **entier impair**. Nous verrons cela dans le [Chapitre \(ALG\) 7](#) une fois le théorème de la bijection revu.

Remarque 17 (Constante de NÉPER) En début de section, nous avons écrit $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $e = \exp(1)$. Afin de pouvoir utiliser cette notation, il faudrait alors justifier que :

$$\exp(x) = (\exp(1))^x.$$

En effet c'est le cas puisque $(\exp(1))^x = \exp(x \ln \exp(1)) = \exp(x)$.

FAIRE VARIER b : EXPONENTIELLE EN BASE. On peut aussi à présent faire varier la puissance b et étudier la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ pour tout $a > 0$. C'est une fonction qui aura donc des propriétés similaires à la fonction exponentielle. On la note en général $\exp_a$.

Définition/Proposition 12 | Fonction exponentielle en base a

[Définition]

$$\exp_a \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a^x = e^{x \ln(a)}. \end{array} \right.$$

[Principales propriétés]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

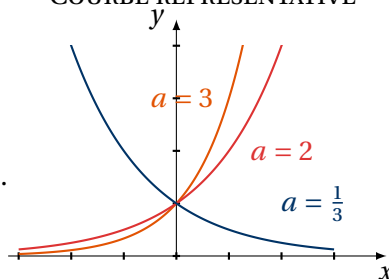
[Dérivée]

$$\exp_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'_a(x) = \frac{d(e^{x \ln a})}{dx} = \ln(a) a^x.$$

[Limites]

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ si $a < 1$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ si $a > 1$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ si $a < 1$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Remarque 18 Pour $a = e$, étant donné que $\ln(e) = 1$, on retrouve l'exponentielle. En d'autres termes : $\exp_e = \exp$. Pour savoir si $\exp_a$ est croissante ou décroissante, on analyse simplement le signe de $\ln a$, cela revient à comparer a à 1.

Preuve

[Principales propriétés]



[Dérivée]



- [Limites] par exemple celles en $+\infty$.



FAIRE VARIER a . On peut aussi à présent faire varier a dans $\mathbb{R}^{++}$ et étudier la fonction $x \in \mathbb{R}^{++} \rightarrow x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. C'est une fonction qui unifie à la fois la racine carrée $\alpha = \frac{1}{2}$, la racine cubique $\alpha = \frac{1}{3}$, mais aussi la fonction carré $\alpha = 2$, cube $\alpha = 3$, etc. et même l'identité avec $\alpha = 0$.

Définition/Proposition 13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Définition]

$$p_\alpha \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{++} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}. \end{array} \right.$$

[Principales propriétés]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

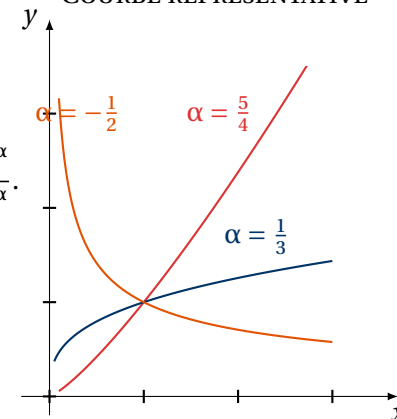
[Dérivée]

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \quad p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

[Limites]

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Preuve

[Principales propriétés]



- [Dérivée]



- [Limites] par exemple celles en $+\infty$.



5.5 Fonction valeur absolue

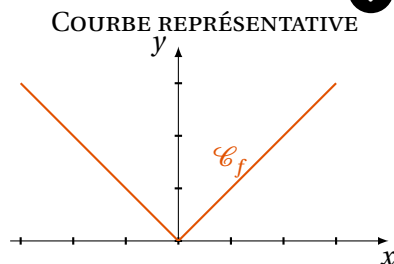
La valeur absolue avait étudiée dans le **Chapitre (ALG) 2**, mais nous ne l'avions pas vue encore comme une fonction. C'est ce que nous analysons ici.

Définition/Proposition 14 | Valeur absolue

- [Définition]

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- [Principales propriétés] f est paire.



- [Dérivée] f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une part, $\mathbb{R}_-^*$ d'autre part et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Elle n'est pas dérivable en zéro.

- [Limites]

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$

Exemple 50 Un modèle très simple d'évolution de la température lors d'une journée consiste à supposer qu'elle augmente régulièrement de 6h à 16h puis diminue régulièrement jusqu'à minuit. La température $T(t)$ s'exprime alors en fonction du temps écoulé t depuis 6h comme suit :

$$T(t) = a|t - 10| + b.$$

5.6 Fonction partie entière

Définition/Proposition 15 | Fonction partie entière

- [Définition] $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto [x] \end{array} \right.$

- [Continuité]

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = n \quad \text{si } x \in [n, n+1[.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue à droite en chaque $n \in \mathbb{Z}$.

- [Dérivée]

f est dérivable sur chaque intervalle $]n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et

$$\forall x \in]n, n+1[, \quad f'(x) = 0.$$

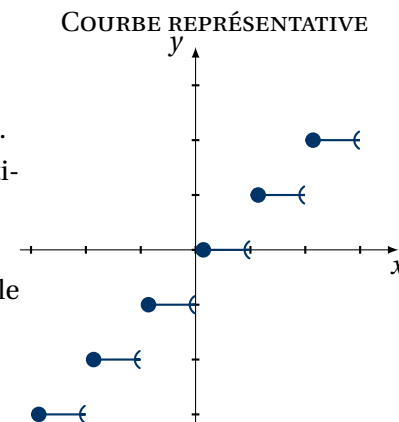
f n'est pas dérivable en tout $n \in \mathbb{Z}$.

- [Limites]

- ◇ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty,$

- ◇ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty,$

- ◇ $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{x \rightarrow k^-} [x] = k - 1, \quad \lim_{x \rightarrow k^+} [x] = k.$



Preuve

- [Limites]



- [Continuité & Dérivabilité]



- [Limites]

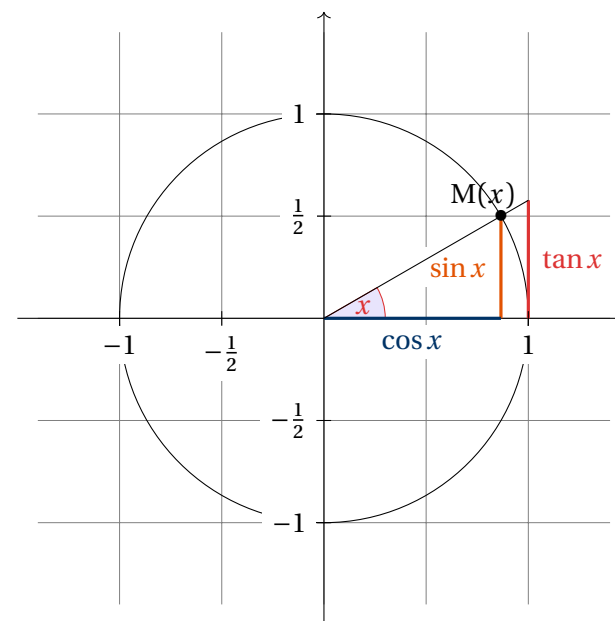


Exemple 51 Un ingénieur facture 20 euros pour chaque période complète de 15 minutes. Les frais facturés $f(x)$ en fonction du temps facturé $x \geq 0$ se calculent comme $f(x) = 20[4x]$. Justifions cette interprétation en traçant la courbe.



5.7 Fonctions trigonométriques

Rappelons que pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus, sinus et tangente de x peuvent être visualisés avec la figure ci-après.

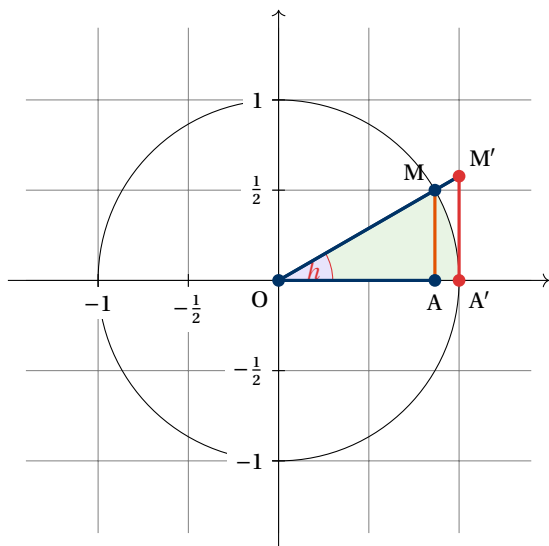


On voit qu'en faisant varier x dans $\mathbb{R}$, le cosinus et le sinus semblent « osciller » entre -1 et 1 , et semblent revenir sur les anciennes valeurs après un intervalle de longueur 2π .

Lemme 1 | Deux limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0.$$

Preuve Soit $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Considérons les points suivants.



- Rappelons que $M'A' = \frac{\sin(h)}{\cos(h)} = \tan(h)$ d'après le théorème de THALÈS. De plus :
 - ◇ l'aire du triangle OAM vaut : $\frac{OA \times MA}{2} = \frac{\cos(h) \sin(h)}{2}$.
 - ◇ L'aire du triangle OA'M' vaut : $\frac{OA' \times M'A'}{2} = \frac{1 \times \frac{\sin(h)}{\cos(h)}}{2} = \frac{\sin(h)}{2\cos(h)}$,
 - ◇ l'aire du secteur angulaire vert vaut : $\pi \times \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$.
- ✎ Comme le triangle OAM est inclus dans le secteur angulaire vert, lui-même inclus dans le triangle OA'M', on en déduit :

$$\frac{\cos(h) \sin(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\sin(h)}{2\cos(h)}.$$
- Pour $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(h) > 0$. En divisant l'encadrement précédent par $\frac{\sin(h)}{2}$, il vient :

$$\cos(h) \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}.$$
- Tous les termes étant strictement positifs, le passage à l'inverse donne :

$$\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq \frac{1}{\cos(h)}.$$
- Or : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \cos(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos(h)} = 1$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$
- Enfin, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ étant paire sur $\mathbb{R}^*$, on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

- Il est possible de démontrer la seconde avec la première à l'aide de formules de duplication. En effet, on sait que pour tout $h \in \mathbb{R}$:

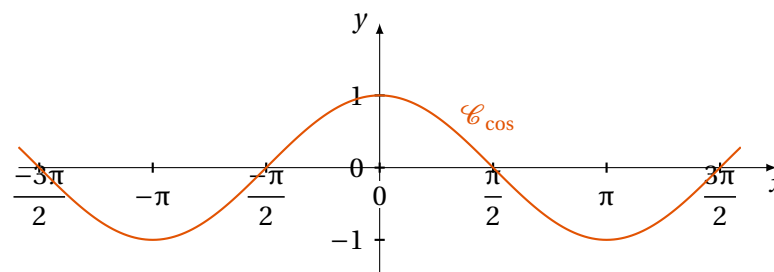
$$\begin{aligned} \cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right) &\Rightarrow \frac{1 - \cos(h)}{h} = \frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \\ &= \underbrace{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \times \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

par composition des limites (puisque $h/2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$).

Commençons à présent l'étude des fonctions trigonométriques par le cosinus.

Définition/Proposition 16 | Fonction cosinus

- **[Définition]** $\cos : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{matrix}$
- **[Principales propriétés]** $\cos$ est 2π -périodique et paire.
- **[Dérivée]** $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.
- **[Limites]** La fonction cosinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

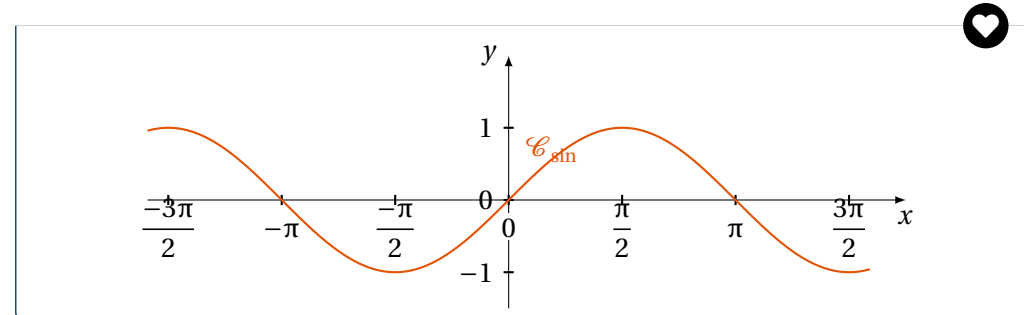


Preuve

- **[Dérivabilité]** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.



- **[Limites]** On admet pour le moment que $\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$



Preuve

- **[Dérivabilité]** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.



Exemple 52 Lorsqu'un pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), il se met à osciller. La position d'un pendule simple est repérée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante. En l'absence de frottements et pour des petites oscillations, on a

$$\forall t \geq 0, \quad \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$$

où θ_0 repère la position initiale du pendule et ω_0 est la pulsation.

- **[Limites]** On admet pour le moment que $\sin$ n'a pas de limite en $\pm\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a déjà été prouvée.

Exercice 7 Montrer, *via* des études de fonctions, que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$.
2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$. Interpréter géométriquement avec le graphe du sinus que l'on tracera sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour la tangente, on voit que le point semble être « envoyé vers $+\infty$ » lorsque x tend vers $+\frac{\pi}{2}$. Mathématiquement, cela sera traduit avec la notion de limite.

Définition/Proposition 17 | Fonction sinus

- **[Définition]** $\sin \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** $\sin$ est 2π -périodique et impaire.
- **[Dérivée]** $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x)$.
- **[Limites]** La fonction sinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Définition/Proposition 18 | Fonction tangente

- **[Définition]** $\tan \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_{\tan} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \right.$



avec

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- **[Principales propriétés]** $\tan$ est π -périodique et impaire.

- **[Dérivée]** $\tan$ est dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$ et

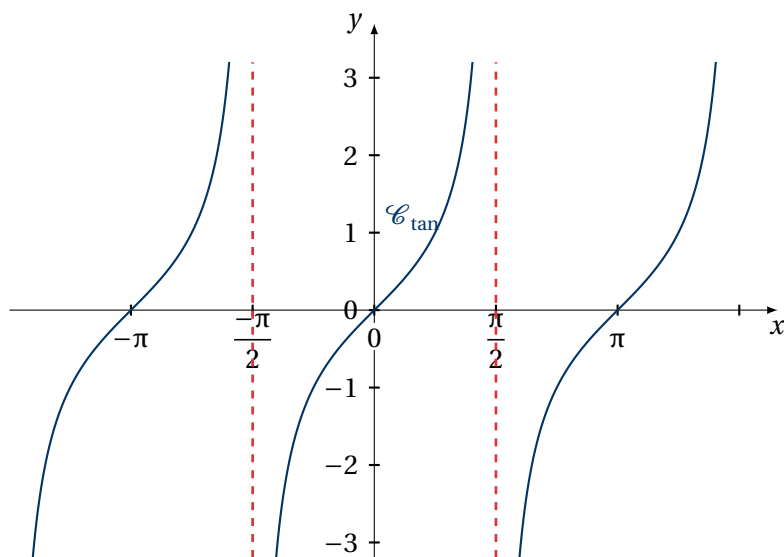
$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- **[Limites]**

- $\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \tan(x) = -\infty,$

- $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x) = +\infty,$

- **[Taux]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$



Preuve Soit $x \in \mathcal{D}_{\tan}$.

- **[Imparité et périodicité]** Déjà fait dans le chapitre [Chapitre \(ALG\) 3](#).
- **[Dérivée]** Déjà établie dans ce chapitre (formule de dérivée d'un quotient).
- **[Limites]**



- **[Taux]**



5.8 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Nous allons introduire deux nouvelles fonctions dites « hyperboliques », à savoir le cosinus et le sinus hyperbolique (la tangente hyperbolique ne figure pas au programme officiel, mais peut faire l'objet d'exercices intéressants...)

Remarque 19 (Partie paire/impaire de l'exponentielle) Rappelons que : « *que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire i* »

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une telle fonction. Rappelons alors (en réeffectuant l'analyse du raisonnement) l'expression des fonctions de p et i . Que valent-elles lorsque $f = \exp$?



Définition 22 | Fonctions hyperboliques

- La fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch , est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- La fonction *sinus hyperbolique*, notée sh , est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Remarque 20 Notons que l'on pourrait étendre naturellement ces définitions à $\mathbb{C}$, en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

On aurait dès lors, d'après les formules d'EULER :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(ix) = \cos(x), \quad \text{sh}(ix) = i \sin(x).$$

Proposition 12 | Propriétés du cosinus hyperbolique

- [Définition]**

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

- [Principales propriétés]** ch est paire.

- [Dérivée]** ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

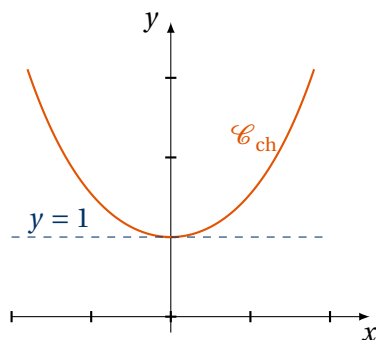
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x).$$

- Limites**

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

COURBE REPRÉSENTATIVE



Proposition 13 | Propriétés du sinus hyperbolique

- [Définition]**

$$\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

- [Principales propriétés]** sh est impaire.

- [Dérivée]** sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

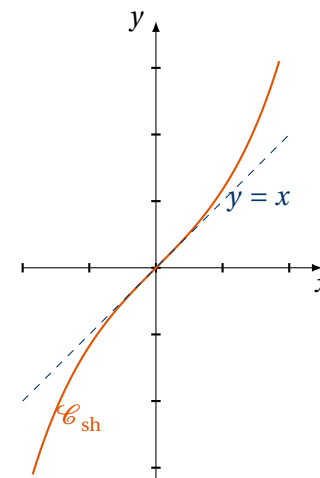
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x).$$

- [Limites]**

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$$

COURBE REPRÉSENTATIVE



Preuve (Étude des fonctions ch , sh)



Proposition 14 | Formule fondamentale de trigonométrie hyperbolique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Preuve

Remarque 21 (Formulaire de trigonométrie hyperbolique [H.P]) Pour tous réels a et b , on a les égalités :

- $\text{ch}(a + b) = \text{ch}(a) \text{ch}(b) + \text{sh}(a) \text{sh}(b)$.
- $\text{ch}(a - b) = \text{ch}(a) \text{ch}(b) - \text{sh}(a) \text{sh}(b)$.
- $\text{sh}(a + b) = \text{sh}(a) \text{ch}(b) + \text{ch}(a) \text{sh}(b)$.
- $\text{sh}(a - b) = \text{sh}(a) \text{ch}(b) - \text{ch}(a) \text{sh}(b)$.

En particulier pour tout réel a , on a les égalités :

- $\text{ch}(2a) = \text{ch}^2(a) + \text{sh}^2(a) = 2 \text{ch}^2(a) - 1 = 1 + 2 \text{sh}^2(a)$.
- $\text{sh}(2a) = 2 \text{ch}(a) \text{sh}(a)$.

Conformément au programme officiel, ces formules ne sont pas exigibles. En revanche, notons que la preuve est plus simple que celles pour $\cos / \sin$, puisqu'ici nous partons d'une définition non géométrique. Montrons par exemple :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ch}(a + b) = \text{ch}(a) \text{ch}(b) + \text{sh}(a) \text{sh}(b).$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.



6 DÉRIVATION D'UNE FONCTION À VALEURS COMPLEXES

On présente ici une très brève extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 23 | Fonction complexe

Soit E un ensemble non vide.

- On appelle *fonction complexe* (sur E) toute fonction de E dans $\mathbb{C}$.
- Soit f une telle fonction. On appelle :
 - ◇ *partie réelle de f* la fonction $\text{Re } f$ définie par :
 $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (\text{Re } f)(x) = \text{Re}(f(x)).$
 - ◇ *Partie imaginaire de f* la fonction $\text{Im } f$ définie par :
 $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (\text{Im } f)(x) = \text{Im}(f(x)).$
 - ◇ *Module de f* la fonction $|f|$ définie par :
 $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |f|(x) = |f(x)|.$
 - ◇ *Conjuguée de f* la fonction $\bar{f}$ définie par :
 $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}.$

On a dès lors : $f = \text{Re}(f) + i \text{Im } f$ et $|f|^2 = f \bar{f}$.

Définition 24 | Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe sur I . On dit que f est *dérivable sur I* si :

$\text{Re}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $\text{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables sur I .

La dérivée de f est alors définie par : $f' = (\text{Re } f)' + i (\text{Im } f)'$.

Exemple 53 Justifier que f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer sa dérivée.



part. Ainsi, $\lambda f + \mu g$ est dérivable et :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, (\lambda f + \mu g)'(x) &= (\lambda f_1 + \mu g_1)'(x) + i(\lambda f_2 + \mu g_2)'(x) \\ &= (\lambda f_1'(x) + \mu g_1'(x)) + i(\lambda f_2'(x) + \mu g_2'(x)) \\ &= \lambda f'(x) + \mu g'(x). \end{aligned}$$

Théorème 11 | Dérivée de $\exp(\varphi)$

Soit I un intervalle et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes dérivable. Alors la fonction e^φ est une fonction dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (e^\varphi)'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.$$

Attention

Le résultat précédent n'a *a priori* rien d'évident (puisque φ est à valeurs complexes); cela n'est pas une conséquence directe de la dérivée d'une composée vue plus haut.

Preuve



Exercice 8 Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Montrer que :

$$\exists!(p, q) \in f : I \rightarrow \mathbb{C}^2, f = p + iq.$$

Que valent p, q lorsque $f : x \mapsto e^{ix}$?

Les règles de calcul (dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient) restent valables pour des fonctions à valeurs complexes. Nous les prouverons

Proposition 15 | Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées

Soit I un intervalle. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{C}$ dérivables sur I .

- **[Linéarité]** pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I , et :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

On dit que la dérivation est *linéaire*.

- **[Produit]** fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

- **[Quotient]** Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Preuve Prouvons par exemple la première. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Notons $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$ et $g_1 = \operatorname{Re} g$, $g_2 = \operatorname{Im} g$ pour simplifier. On a $\lambda f + \mu g = (\lambda f_1 + \mu g_1) + i(\lambda f_2 + \mu g_2)$. Comme f_1, g_1, f_2, g_2 sont dérivables sur I , il en est de même de $\lambda f_1 + \mu g_1$ d'une part, et $\lambda f_2 + \mu g_2$ d'autre

Exemple 54 Justifier que f définie par : $f(x) = e^{i(x^2+1)} \sin(e^{2x})$ est dérivable sur un domaine que l'on précisera, déterminer sa dérivée.





Exercice 9 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Montrer que $|f| : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas et déterminer une expression de sa dérivée.

FORMULAIRE DE DÉRIVÉES

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle et a une **constante** réelle. Ce tableau est encore partiel, il nous manque une fonction usuelle (arctan, que nous allons étudier dans le [Chapitre \(ALG\) 7](#)).

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Fonction f'	$\mathcal{D}_{f'} \subset \mathcal{D}_f$
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{++}$ si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (AN) 1.1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparaît peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Méthode (AN) 1.2 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition.

Méthode (AN) 1.3 (Limite calculable par taux de variation) Si une expression est de la forme suivante, pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 , avec x_0 aux bords de I ou dans I , alors :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

En particulier, si f s'annule en x_0 , on a :

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

Méthode (AN) 1.4 (Limite d'un quotient de polynômes) Pour déterminer la limite en $\pm\infty$ de :

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

on factorise au numérateur par $a^n x^n$ et au dénominateur par $b_m x^m$ et on simplifie le quotient de ces deux termes en $\frac{a_n x^{n-m}}{b_m}$, avant de passer à la limite. On dit que l'on « met en facteur les monômes de plus haut degré ».

Méthode (AN) 1.5 (Expression conjuguée pour les F.I. avec racines) Pour calculer des limites d'expressions de la forme $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$ le plus souvent polynomiale, on a souvent recours à la tech-

nique de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)} = \frac{(\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)})(\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)})}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}} = \frac{u(x) - v(x)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}}.$$

Sous cette forme, la limite n'est souvent plus indéterminée après avoir mis dans la racine les monômes les plus importants en facteur.

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.
Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.



Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler

7, 9

Exercice 1 | Vrai ou Faux? Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
- Toute fonction bornée sur $[0, 1]$ est continue sur $[0, 1]$.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en x_0 .
- Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable :
 - si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$;
 - si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$;
 - si f est périodique de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est aussi T -périodique.
- Pour toutes fonctions f et g définies sur $[0, 1]$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \leq g(x) \implies \forall x \in [0, 1], \quad f'(x) \leq g'(x).$$

Exercice 2 | ●○○ Logique et fonctions Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

- L'application f est croissante.
- Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.
- La fonction f est paire.
- La fonction f ne s'annule jamais.
- La fonction f est inférieure à la fonction g .
- La fonction f est périodique.

7.1 Ensembles de définition

Exercice 3 | ●○○ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

- $f(x) = \sqrt{x^3}$
- $f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x - 3} + \frac{\sqrt{5+x}}{x}$
- $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
- $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$.

Exercice 4 | ●●○ Avec paramètre Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Exercice 5 | ●○○ Composée Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir calculé leur domaine de définition.

- $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ et $g : x \mapsto 2\sqrt{x-3}$.
- $f : x \mapsto \frac{2x^2-8}{x}$ et $g : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

7.2 Transformation de graphes

Exercice 6 | ●○○ À main levée, à partir de la courbe représentative de la fonction carrée, tracer les courbes d'équation :

- $y = (x-1)^2$
- $y = -x^2 + 3$
- $y = (4-x)^2$
- $y = (2x)^2$

Exercice 7 | ●○○ Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f . Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $f(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$
3. $f(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$
5. $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+|x|}$
6. $f(x) = |x+1| - |x-1|$
7. $f(x) = \sin x + \cos x$
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Exercice 8 | ●●○ Propriétés générales Montrer les résultats suivants.

1. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

Exercice 9 | ●●○ [Raphaël NA – Antoine DE] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 3, \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice 10 | ●●○ [Abderahmene AB – Ritâa SA] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde*

Exercice 11 | ●●○ Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x-2}{x-2}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2) \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - \ln x)$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$

Exercice 12 | ●●○ Soit $f : x \mapsto \frac{|x-3|-2x}{4x-6-|x+3|}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier l'existence d'une limite en 3, d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.

Exercice 13 | ●○○ Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{e^x}$
4. $f(x) = e^{x \cos(x)}$
5. $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
6. $f(x) = \frac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}$
7. $f(x) = \sin(\ln x)$
8. $f(x) = \ln(e^x + x^2)$
9. $f(x) = \frac{x-e^x}{e^x+1}$
10. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
11. $f(x) = \frac{1}{(\cos(x))^4}$
12. $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$
13. $f(x) = (e^{2x} - 1)^\pi$
14. $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$
15. $f(x) = 2^{\ln x}$
16. $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)$
19. $f(x) = \frac{3^{x-1} \cos x}{x^x}$

Exercice 14 | ●○○ Avec valeurs absolues Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivée.

1. $f(x) = \frac{\ln(|x^2-1|)}{x}$

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|e^x-1|+1}}$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

7.5 Fonctions usuelles & Études de fonctions

AUTOUR DES PUISSANCES

Exercice 15 | ●○○ Simplifier a^b dans les cas suivants :

1. $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x} \ln(x^{1/x})$.

2. $a = x$ et $b = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.

Exercice 16 | ●●○ Résoudre les équations suivantes :

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

2. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

3. $3^n = \left(\frac{1}{2^n}\right)^x$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ une constante fixée)

Exercice 17 | ●●○ Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

2. $\begin{cases} e^x e^{2y} = e^2 \\ 2xy = 1. \end{cases}$

Exercice 18 | ●●○ [Oihan LE – Ethan MO]

1. Montrer :

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x), \quad \forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 19 | ●○○ Démontrer les formules d'addition pour sh.

Exercice 20 | ●●○ [Armand CA – Timothee SE] Résoudre l'équation $5 \operatorname{ch}(x) - 4 \operatorname{sh}(x) = 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 21 | ●●○ Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = \lambda$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ selon les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 22 | ●●○

1. Déterminer une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(e^x) = \operatorname{ch}(x)$.

2. Existe-t-il une fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?

Exercice 23 | ●●○ Pour $a \in \mathbb{R}$, donner le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{sh}(x) - 2x - a$. Pour quelles valeurs de a la fonction f admet-elle un maximum strictement positif?

Exercice 24 | ●○○ [Jean PL – Ander MA] Étudier la fonction $x \mapsto \frac{1}{2 + \operatorname{ch} x}$.

Exercice 25 | ●○○ **Somme de ch** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$.

Exercice 26 | ●●○ **Simplification de $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$** Soient a et b deux réels non tous deux nuls.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour qu'il existe $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{ch}(x + \varphi).$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour qu'il existe $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{sh}(x + \varphi).$$

FONCTIONS POLYNÔMES, VALEUR ABSOLUE, EXPONENTIELLE, LOGARITHME

Exercice 27 | ●●○ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto |2x - 3| + |x - 5|$, $g : x \mapsto |2x^2 - 5| - |x^2 - 1|$.

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x . En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Exercice 28 | ●○○ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

- Déterminer trois réels a, b, c tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$
- Dresser le tableau des variations de f . On précisera ses limites aux bornes du domaine.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (x+1))$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1))$.
- Tracer la courbe représentant f et placer sur le même graphique la droite d'équation $y = x + 1$.
- Montrer que la courbe représentant f admet le point de coordonnées $(1, 2)$ comme centre de symétrie.

Exercice 29 | ●○○ [Edgar PO – Louis DU] Étude complète de la fonction : $f : x \mapsto \frac{e^{x^2}}{x}$.

Exercice 30 | ●○○ Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = x \exp |\ln |x||.$$

- Donner l'ensemble de définition de h .
- Représenter graphiquement la fonction h .

Exercice 31 | ●○○ [Benjamin JA – Celia ET] On définit la fonction f par :

$$f : x \in \mathcal{D}_f \mapsto \frac{x}{e^x - x},$$

où $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ désigne le domaine de définition de f qui sera à déterminer.

- Montrer que $e^x - x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le domaine de définition de f .

- Donner les limites aux bornes du domaine de définition et interpréter graphiquement les deux résultats.
- Étudier les variations de f .
- Donner l'équation de la tangente notée T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.
- Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et T (on fera apparaître les tangentes horizontales et les asymptotes trouvées dans les questions précédentes).

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 32 | ●○○ [Mathéo CA – Emma MA]

- Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sqrt{\tan x}$.
- Étudier la parité et la périodicité de f .
- Déterminer les variations de f , puis esquissez son graphe.

Exercice 33 | ●●○ [Julie RA – Tristan CA] Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 3 \cos x - \cos(3x).$$

- Étudier la parité et la périodicité de f .
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6 \cos(2x) \sin(x).$$
- Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
- Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
- Représenter f sur l'intervalle $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Exercice 34 | ●●● On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{6} \cos(6x).$$

- Montrer que f est périodique de période π , puis étudier sa parité. En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.
- Calculer f' et montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin(4x)(1 + 2 \cos(2x)).$$
- Étudier les variations de f sur l'intervalle réduit. On précisera bien les valeurs d'annulation de f' ainsi que l'étude de son signe.
- Calculer les valeurs de f pour $x \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$.
- Tracer la courbe sur l'intervalle $[0, \pi]$.