

Chapitre (ALG) 7

Injections, surjections, bijections. Compléments sur les fonctions usuelles.

1 Fonctions & Applications

2 Injection, Surjection, Bijection ..

3 Applications aux fonctions numériques

4 Exercices

*Du paradis créé pour nous
par CANTOR personne ne
nous chassera.*

— David HILBERT

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est l'introduction du vocabulaire élémentaire des applications & fonctions. On s'intéresse aux différentes notions afférentes au nombre d'antécédents d'un élément de l'espace d'arrivée. On termine par la construction de nouvelles fonctions usuelles définies comme bijection réciproque d'autres.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

 **Cadre**
Dans tout ce chapitre, on se fixe des ensembles non vides $E, F, G, \dots$

1 FONCTIONS & APPLICATIONS

Rappelons la définition d'application et fonction rencontrées rapidement dans le Chapitre (ALG) 1.

1.1 Généralités

Définition 1 | Fonction entre deux ensembles

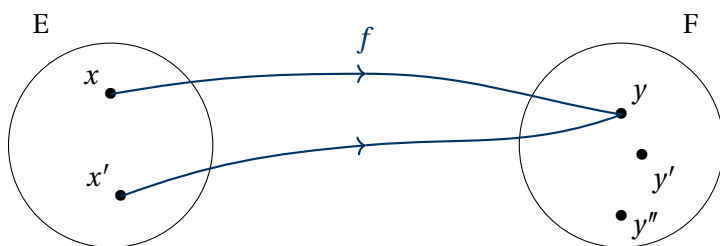
- Une *fonction de E dans F* est un procédé qui associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F (donc soit 0 élément, soit 1 élément). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'*ensemble d'arrivée* de f .
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : E \rightarrow F$ est une *fonction numérique*.
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f : E \rightarrow F$ l'ensemble noté $\mathcal{D}_f \subset E$ des éléments $x \in E$ pour lesquels l'image $f(x)$ existe, c'est-à-dire :
$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F, y = f(x)\}.$$
- Si $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x) \in F$, alors on dit que y est l'**I** *image de x par f* , et que x est **un** antécédent de y par f .

Lorsque le domaine de définition d'une fonction est tout l'espace de départ, on parle plutôt d'application.

Définition 2 | Application entre deux ensembles

- Une *application de E dans F* est un processus qui associe à chaque élément x de E exactement un élément y de F (donc 1 élément). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'*ensemble d'arrivée* de f .
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : E \rightarrow F$ est une *application numérique*.
- Si $x \in E$ et $y = f(x) \in F$, alors on dit que y est l'**I** *image de x par f* , et que x est **un** antécédent de y par f .

Ainsi, pour une application, on ne parle pas d'« ensemble de définition », puisqu'une application est définie sur E tout entier. On pourra parfois représenter une application $f : E \longrightarrow F$ au moyen d'une *représentation sagittale* (Le mot latin *Sagitta* signifie *flèche*.) Ci-dessous une application f définie sur un ensemble à deux éléments, à valeurs dans un ensemble à 3 éléments.



Σ Notation Application

- On note une application comme ceci : $f \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x). \end{array} \right.$
- L'ensemble des applications de E dans F sera noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou bien F^E (cette dernière notation peut paraître un peu curieuse pour l'instant, mais elle sera expliquée dans le chapitre de dénombrement) .

⚙️ Cadre

- Dans toute la suite, tous les énoncés seront précisés pour des applications, c'est-à-dire que quand on écrit $f : E \longrightarrow F$, cela signifie que f est définie sur E tout entier.
- Les notions s'étendent automatiquement aux fonctions en considérant l'« application associée » $f \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x). \end{array} \right.$

On peut également généraliser la notion de courbe représentative rencontrée dans le cadre des fonctions numériques (voir **Chapitre (AN) 1**) aux applications.

Définition 3 | Graphe

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- On appelle *graphe de f* le sous-ensemble noté $\mathcal{C}_f$ de $E \times F$ défini par : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.
- De manière équivalente, on a, pour $(x, y) \in E \times F$: $(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)$.

APPLICATIONS USUELLES. Voyons deux applications classiques.

Définition 4 | Identité

On appelle *identité de E* l'application notée Id_E définie par $\text{Id}_E \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x. \end{array} \right.$

C'est donc une application « qui ne fait rien ».

Exemple 1 Les applications $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ et $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} \end{array} \right.$ ne sont pas égales.



Définition 5 | Indicatrice

On appelle *indicatrice de A* avec $A \subset E$ l'application notée $\mathbb{1}_A$ par :

$$\mathbb{1}_A \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases} \end{array} \right.$$

C'est donc une application qui dépend de si un élément est dans un ensemble A ou non. Ainsi, on reconstitue l'ensemble en observant là où sa fonction indicatrice vaut 1, et le complémentaire là où elle vaut zéro.

Exemple 2

$$\mathbb{1}_{[3,5]}(2) = \quad , \quad \mathbb{1}_{[3,5]}(4) =$$

Représenter le graphe de l'application $\mathbb{1}_{[3,5]}$.



Proposition 1 | Ligne de niveau 1 de l'indicatrice

Soit $A \subset E$. Alors :

$$A = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\}, \quad \bar{A} = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 0\}.$$

Exemple 3

- Préciser $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_\emptyset$.



- Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes, en les exprimant sous la forme $\mathbb{1}_A(x)$ où A est un ensemble à préciser.

1. $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{++}}(e^x),$



2. $\mathbb{1}_{[2, \infty[}(e^x).$



Proposition 2 | Indicatrice d'une réunion et d'une intersection

Soient $A, B \subset E$. Alors :

1. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B,$

2. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B},$

3. Par conséquent : $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A.$

Preuve

1. On peut établir l'égalité en effectuant des sous-cas, mais il y'a mieux. Soit $x \in E$, alors :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 1 &\iff \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(x) = 1 \quad \text{produit d'entiers valant 0 et 1} \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in B \iff x \in A \cap B \iff \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1. \end{aligned}$$

Et c'est terminé : du calcul précédent, les applications $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ valent 1 sur le même sous-ensemble $A \cap B$ de E , elles valent donc 0 sur le même sous-ensemble $\bar{A \cap B}$ de E . Ainsi, elles sont égales.

2. Soit $x \in E$, alors on montre que $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$ en distinguant les cas $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$ puis $x \in A \cap B$.
3. Prendre $B = \bar{A}$ dans la propriété précédente, et utiliser que $\mathbb{1}_{A \cup \bar{A}} = \mathbb{1}_E = 1$.

Nous utiliserons assez largement cette application plus tard dans l'année, en probabilités.

1.2 Restriction & Prolongement

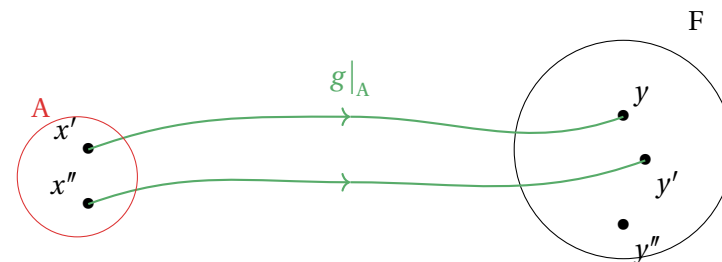
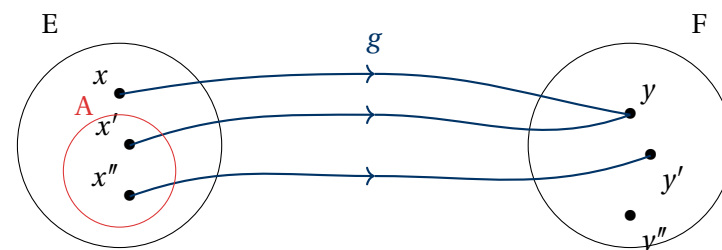
Définition 6 | Restriction & Prolongement

Soient A et E deux ensembles tels que $A \subset E$, et F un ensemble. On considère $g : E \rightarrow F$.

- On appelle *restriction de g à A* l'application :
$$g|_A \begin{cases} A & \rightarrow F \\ x & \mapsto g(x). \end{cases}$$
- Soit $f : A \rightarrow F$. On dit que g est un *prolongement de f à E* si $g|_A = f$, c'est-à-dire si : $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Remarque 1

- Autrement dit, $g|_A$ réalise la même association « $\mapsto$ » que g mais on a juste modifié son ensemble de départ. En tant qu'applications, on a donc $g|_A \neq g$ (dès que $A \neq E$) puisqu'elles ont des ensembles de départ différents.
- Si $f : E \rightarrow F$ est une **fonction**, alors par définition $f|_{\mathcal{D}_f}$ devient une **application** de $\mathcal{D}_f$ dans F .



Exemple 4 Soient

$$f \left| \begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto n, \end{array} \quad g_1 \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x, \end{array} \quad g_2 \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|. \end{array} \right.$$

Préciser les éventuels liens de prolongement et restriction entre ces trois applications.



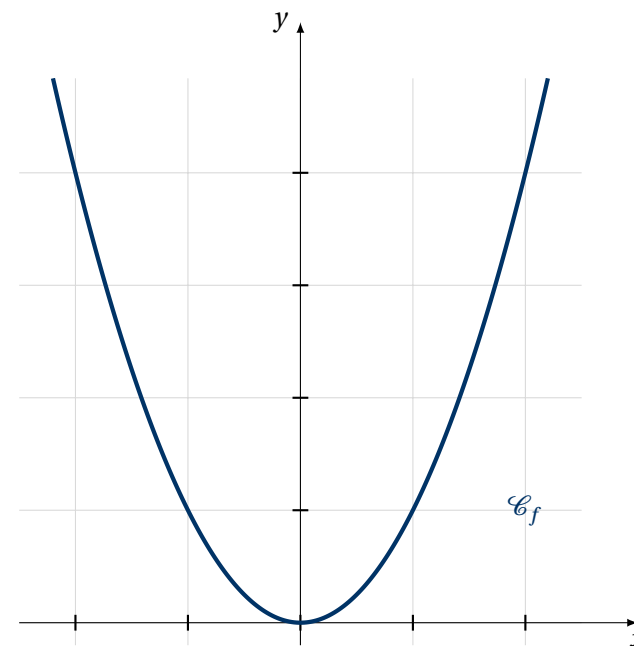
Remarque 2

- Ne pas confondre l'ensemble $f(E)$ et l'ensemble d'arrivée F . En règle générale, ce sont des ensembles différents (sauf quand l'application est surjective, voir plus bas).
- En revanche, on a toujours $f(E) \subset F$.

Exemple 5

- Soit : $f \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2. \end{array} \right.$ Alors : $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^{+*}$, $f([-2, 2]) = [0, 4]$.

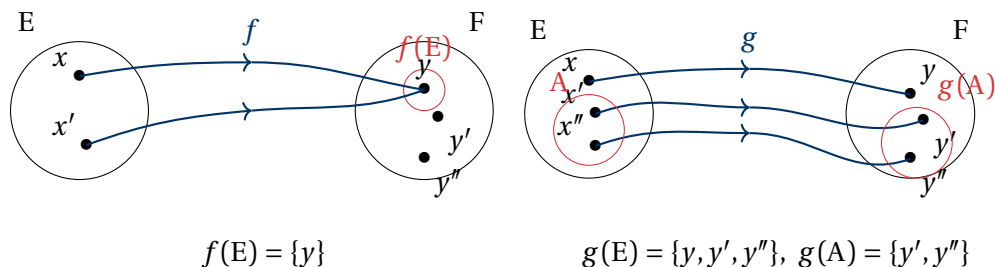
Expliquer graphiquement ces images directes. (On se contentera ici de cette « preuve » graphique, le théorème de la bijection nous permettra de le prouver (bon, pas vraiment, puisque je ne démontrerai pas ledit théorème))



Définition 7 | Image directe

Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Pour $A \subset E$, on appelle *image directe de A par f* ou simplement *image de A par f* l'ensemble $f(A)$ défini par : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$.
C'est l'ensemble des images des éléments de A . Autrement dit :
 $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$.
- En particulier, si $A = E$ est l'ensemble de départ, on parle d'*image de f* pour l'ensemble $f(E)$, que l'on note aussi $\text{Im } f$.



- Dans l'exemple précédent, démontrer que : $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^{+*}$. (comme dit plus tôt, nous aurons une autre méthode plus efficace ultérieurement : le théorème de la bijection.)

C'est une égalité d'ensembles, on procède donc par double-inclusion.





- Soit : $s \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y. \end{array} \right.$ Alors :

◇ $s(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}.$



◇ $s([0, 1]^2) = [0, 2].$



- Soit : $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x-1}{x+3}. \end{array} \right.$ Déterminer $f(E) = \text{Im } f.$



Proposition 3 | Réunion, intersection et image directe

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A, B \subset E$. Alors :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Remarque 3 La propriété précédente s'étend sans difficulté à une union ou intersection quelconque d'ensembles.

Preuve

- **[Réunion]** C'est une égalité d'ensembles, on procède donc par double-inclusion.
 - Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$, tel que $y = f(x)$. Mais $x \in A$ ou $x \in B$.
 - ◇ Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$.
 - ◇ Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$.
 - Donc : $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$.
 - Soit $y \in f(A) \cup f(B)$.
 - ◇ Si $y \in f(A)$, alors il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$.
 - ◇ Si $y \in f(B)$, alors il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$.
 - Au total : $y = f(x)$ avec $x \in A$ ou $x \in B$, c'est-à-dire $x \in A \cup B$. Donc $y \in f(A \cup B)$.
- **[Intersection]** Il y a ici uniquement une inclusion à justifier.
 - Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $x \in B$. Donc $y = f(x) \in f(A)$ puisque $x \in A$, et de-même $y = f(x) \in f(B)$ puisque $x \in B$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.

Attention

Pour l'intersection, nous n'avons bien qu'une inclusion (voir l'exemple ci-après). De toute manière, dans la pratique, seule la formule pour la réunion nous sera



utile.

Exemple 6 (Seulement une inclusion pour l'intersection)

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$, et $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$. Calculer :

$$f(A \cap B), \quad f(A), \quad f(B), \quad f(A) \cap f(B).$$

 On a $f(A) = B = f(B)$ donc $f(A) \cap f(B) = B$, alors que $f(A \cap B) = f(\{0\}) = 0$. Dans cet exemple, nous n'avons pas $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1.4 Image réciproque

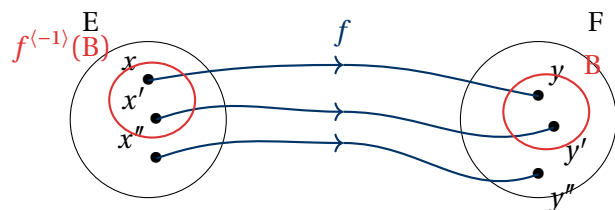
Définition 8 | Image réciproque

Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Pour $B \subset F$, on appelle *image réciproque de B par f* l'ensemble $f^{(-1)}(B)$ défini par : $f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$.

Note Parfois, cet ensemble est noté plus simplement $f^{-1}(B)$ (sans crochet), ce qui est dangereux car source de confusion avec $f^{-1} \dots$ voir la suite du cours.

- C'est l'ensemble des antécédents des éléments de A . Autrement dit : $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.



$$B = \{y, y'\} \quad \text{et} \quad f^{(-1)}(B) = \{x, x'\}$$

Exemple 7 On reprend l'application $f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Conjecturer graphiquement : $f^{(-1)}([0, 4])$, $f^{(-1)}([-2, 4])$ et $f^{(-1)}([-2, -1])$.



Exemple 8 (Images directes, images réciproques)

- Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto e^{i\theta} \end{cases}$. Déterminer $\text{Im}(f)$.



- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z^n \end{cases}$. Déterminer $g^{(-1)}(\{1\})$.



- Déterminer $h(\pi\mathbb{Z})$ et $h^{(-1)}(\{1\})$ pour $h \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$



- Déterminer $v^{(-1)}(\{0\})$ pour $v \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$.



Proposition 4 | Réunion, intersection et image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A, B \subset F$. Alors :

$$f^{(-1)}(A \cup B) = f^{(-1)}(A) \cup f^{(-1)}(B), \quad f^{(-1)}(A \cap B) = f^{(-1)}(A) \cap f^{(-1)}(B).$$

Note | L'image réciproque se comporte bien avec les deux symboles

Remarque 4 La propriété précédente s'étend sans difficulté à une union ou intersection quelconque d'ensembles.

Preuve



Pour les applications, puisqu'on doit associer une image à tout élément de l'ensemble de départ, il faut ajouter une condition pour que l'application composée $g \circ f$ soit bien définie.

Définition 9 | Composition

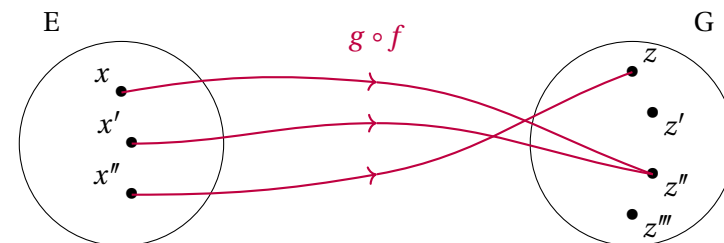
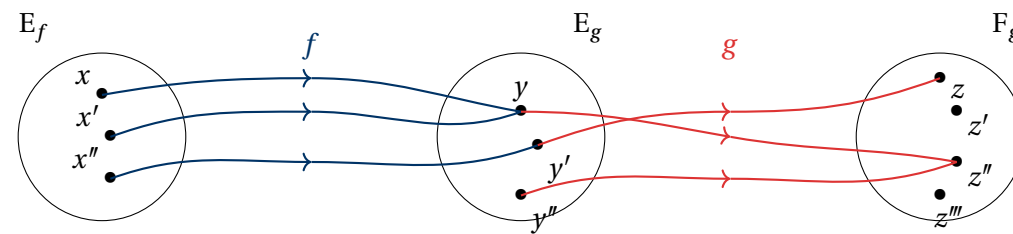
Soient E_f, E_g, F_f, F_g quatre ensembles et $f : E_f \rightarrow F_f, g : E_g \rightarrow F_g$.

- Alors, si $f(E_f) \subset E_g$, c'est-à-dire si $f(x) \in E_g$ pour tout $x \in E_f$, on définit

$$\text{l'application composée } g \circ f \text{ comme étant : } g \circ f \left| \begin{array}{l} E_f \rightarrow F_g \\ x \mapsto g(f(x)). \end{array} \right.$$

- Lorsque $f(E_f) \subset E_g$, on dira que $g \circ f$ est définie.

On peut donc composer deux applications lorsque toutes les valeurs images de la première sont dans l'ensemble de départ de la seconde.

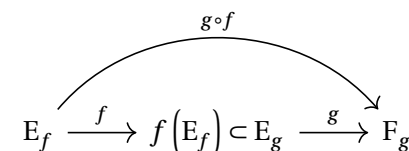


Exercice 1 Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$. Déterminer $f^{(-1)}(f([-1, 3[))$ et $f(f^{(-1)}([-1, 3[))$.

1.5 Composition

Nous avons déjà rencontré la notion de composée de fonctions numériques dans le **Chapitre (AN) 1**. Pour les fonctions composées, le domaine de définition pouvait être vide (par exemple, si l'on considère $f : x \mapsto -x^2 - 1, g : x \mapsto \ln(x)$, alors le domaine de définition de $g \circ f$ est vide).

On représente souvent aussi les composées avec des diagrammes comme ci-après.



Exemple 9

1. Soient $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right.$ $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 3, \end{array} \right.$ alors :

$$g \circ f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^2 - 3. \end{array} \right.$$

2. Soient :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{array} \right.$$

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longmapsto (x, x, x). \end{array} \right.$$

Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles définies?



- L'application $f \circ g$ n'existe pas, puisque $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ donc $g(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}^2$.
- Comme $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, l'application $g \circ f$ existe, et de plus :

$$g \circ f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x + y, x + y). \end{array} \right.$$

3. Déterminer $g \circ f$ lorsque :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto (\cos(x), \sin(x)) \end{array} \right.$$
 et

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1. \end{array} \right.$$



Les propriétés suivantes sont évidentes, et découlent directement de la définition.

Proposition 5 | Propriétés de la composition

- **[Neutre]** Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$. Alors

$$f \circ \text{Id}_E = f, \quad \text{Id}_F \circ f = f.$$

Note | Autrement dit, composer avec l'identité revient à ne « rien faire » !

- **[Associativité]** Soient $E_f, E_g, F_f, F_g, E_h, F_h$ six ensembles et $f : E_f \longrightarrow F_f$, $g : E_g \longrightarrow F_g$, $h : E_h \longrightarrow F_h$ tels que toutes les composées ci-dessous existent, alors : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

On note alors plus simplement : $f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

- En règle générale, la composition n'est **pas** commutative.

2

INJECTION, SURJECTION, BIJECTION

Maintenant que les définitions principales sont posées, nous allons revenir au problème initial : celui du comptage du nombre d'antécédents d'un élément de l'espace d'arrivée.

2.1 Injection, Surjection

Définition 10 | Injection & Surjection

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$. On dit que :

- f est une **surjection** ou est **surjective** si : $f(E) = F$, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Note | Cette proposition correspond, dans l'égalité $f(E) = F$, à l'inclusion $F \subset f(E)$, l'autre étant toujours vérifiée.

Ainsi, une surjection est une application où tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

- $\diamond$ f est une **injection** ou est **injective** si :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Note | Attention au sens de l'implication : « $x = x' \implies f(x) = f(x')$ » est quant à elle toujours vraie.

- $\diamond$ Ou encore, de manière équivalente en contraposant :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

Ainsi, une injection est une application pour laquelle deux images égales correspondent en fait au même antécédent.

Exemple 10 Dessiner un exemple d'application définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$ qui ne soit ni injective, ni surjective sur $[0, 1]$.



Attention

- Ne pas confondre la notion de surjection, avec :
 $\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$,
 qui est quant à elle toujours vraie; en effet, tout élément de l'espace de départ possède une image (définition d'une application).
- Dans la définition d'injection, attention à l'implication :
 $\forall (x, x') \in E^2, x = x' \implies f(x) = f(x')$,
 qui est quant à elle toujours vraie.

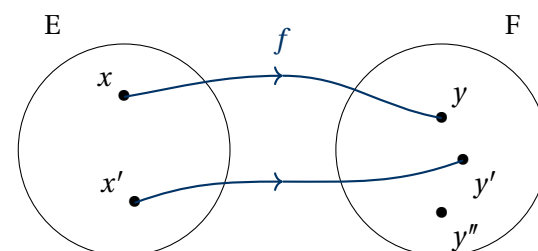
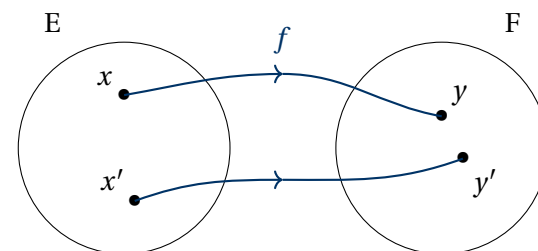
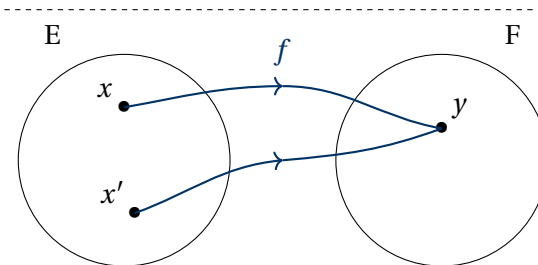
Méthode (ALG) 7.1 (Montrer qu'une application est surjective)

1. Poser un élément *quelconque* y de F .
2. Trouver ensuite un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$, cela revient souvent à résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x .
3. Si vous avez trouvé un élément x qui convient, et ce pour tout $y \in F$, alors f est bien surjective.

Méthode (ALG) 7.2 (Montrer qu'une application est injective)

1. Se donner $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
2. Par divers arguments, en déduire qu'alors la seule possibilité est que $x = x'$.
 Auquel cas f est bien injective.

Exemple 11 (Applications définies en diagramme) Expliquer dans chaque cas si f est injective, surjective.



Remarque 5 (Nier une surjectivité)

- Écrire l'assertion logique « f n'est pas surjective ».



- Dessinons, *via* un diagramme, une application non surjective.



Remarque 6 (Nier une injectivité)

- Écrire l'assertion logique « f n'est pas injective ».



- Dessinons, *via* un diagramme, une application non injective.



Exemple 12 Expliquer les assertions ci-après, en commençant par tracer la fonction lorsque cela est possible.

1. $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right.$ est surjective mais pas injective.



2. $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est injective mais pas surjective.



3. $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{array} \right.$ n'est pas injective.



4. $i \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto [x] \end{array} \right.$ n'est pas injective, est surjective.



5. $k \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{z+i}{z-i} \end{array} \right.$ est injective.



2. Montrer que $s \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{array} \right.$ n'est pas injective, mais surjective.

Proposition 6 | Applications injectives / surjectives usuelles
Soit E un ensemble. L'application Id_E est injective, et surjective.

Preuve Simple vérification.

Remarque 7 Soit $A \subset E$. Si E contient strictement plus que deux éléments, alors $\mathbb{1}_A$ n'est pas injective. Constatons cela sur un dessin.



Proposition 7 | Composée d'applications injectives et surjectives
Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Preuve



Exercice 2

1. Étudier l'injectivité/surjectivité des applications ci-dessous :

1.1) $u \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto 2n \end{array} \right.$

1.2) $v \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x - y^2 \end{array} \right.$

Définition 11 | Bijection

- Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une *bijection* ou est *bijjective* de E dans F si :
 f est injective **et** surjective.
- Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une fonction. Si $A \subset \mathcal{D}_f$, $B \subset F$, on dit que f réalise une *bijection de A dans B* si l'application

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est bijective.

Remarque 8 (Nier une bijectivité) Écrire l'assertion logique « f n'est pas bijective ».

Nous relierons pour terminer l'ensemble de ces notions au nombre de solutions d'une équation faisant intervenir f . C'est cela qui va nous permettre rapidement d'étudier la bijectivité d'une application en pratique.

Proposition 8 | Équations et bijectivité, surjectivité, injectivité

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors :

- f est injective $\iff (\forall y \in F, \quad y = f(x) \text{ admet } \underline{\text{au plus}} \text{ une solution } x)$,
- f est surjective $\iff (\forall y \in F, \quad y = f(x) \text{ admet } \underline{\text{au moins}} \text{ une solution } x)$,
c'est-à-dire : f est surjective $\iff (\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x))$.
- f est bijective $\iff (\forall y \in F, \quad y = f(x) \text{ admet } \underline{\text{exactement une}} \text{ solution } x)$,
c'est-à-dire : f est bijective $\iff (\forall y \in F, \exists ! x \in E, \quad y = f(x))$.

Preuve

- $\implies$



- On procède par équivalence directement.



- Combiner simplement les deux cas précédents.

Exemple 13 (Fonctions numériques)

1. $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 + 1 \end{array} \right.$ est bijective.



2. $\log$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer la réciproque de :

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log(x). \end{array} \right.$$



3. $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[\\ x \longmapsto e^{x^2} \end{array} \right.$ est bijective, en revanche $\hat{h} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[\\ x \longmapsto e^{x^2} \end{array} \right.$ ne l'est pas.



Une application associe à un élément de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée. Une application réciproque opère l'opération inverse. Voyons déjà la définition.

Définition/Proposition 1 | Application réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- On appelle *réciproque de f sur F* toute application $g : F \rightarrow E$ telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Note | Il faut bien vérifier les deux égalités.

- En cas d'existence, une telle application est unique. On l'appellera désormais **la** réciproque de f , notée f^{-1} .

Preuve (Unicité) Supposons par l'absurde qu'il existe g et h telles que

$$g \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad h \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ h = \text{Id}_F.$$

Alors :

$$g = g \circ \text{Id}_F = g \circ f \circ h = \text{Id}_E \circ h = h. \quad \text{D'où : } g = h.$$

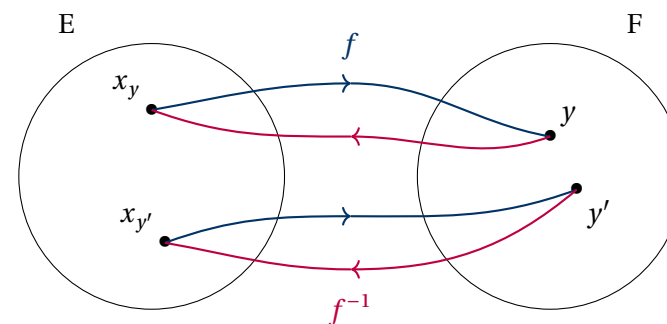
Exemple 14

- Les applications $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ sont réciproques l'une de l'autre.



- $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{++} \\ x \mapsto \exp x \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array} \right.$ sont réciproques l'une de l'autre.

- En termes simples, $g = f^{-1}$ défait le travail effectué par f — et vice versa. Si $x \in E$, alors $f(x) \in F$ puis en composant par g (la réciproque de f , si elle existe) on revient sur l'élément de départ : $g(f(x)) = \text{Id}_E(x) = x$.
- Cette notion semble donc être étroitement liée à celle d'application bijective, puisque précisément la définition d'application bijective permet de défaire le travail effectué par f . Plus précisément, soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors pour tout $y \in F$, il existe $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$: on définit ainsi une application notée $f^{-1} : y \in F \rightarrow x_y \in E$ qui associe à tout $y \in F$ l'unique antécédent de y par f , qui vérifie alors $f \circ f^{-1}(y) = y$.



Définition/Proposition 2 | Bijection réciproque

Soient $E, F \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow F$ une bijection. L'application g qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent dans E de y par f (c'est-à-dire l'unique solution $x \in E$ de l'équation $y = f(x)$) définit la réciproque de f , notée $g = f^{-1}$.

Preuve Il s'agit de montrer ici que $g \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ g = \text{Id}_F$.

- Soit $x \in E$. Alors puisque $y = f(x)$ est admet pour (unique) antécédent x , on a par définition $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$.
- Soit $y \in F$. Alors $x = f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f , donc par définition $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$.

Ainsi, si f est bijective, elle possède une réciproque, et l'inverse est aussi vrai.

Proposition 9 | Unicité d'une application réciproque associée à une bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors :

f est bijective $\iff f$ possède une réciproque.

Preuve

- $\implies$ Supposons que f est bijective, alors on a déjà montré que f possède une réciproque dans la proposition précédente.
- $\impliedby$ Supposons que f possède une réciproque f^{-1} .
 - Montrons que f est injective.



- Montrons que f est surjective.



Proposition 10 | Réciproque d'une composée

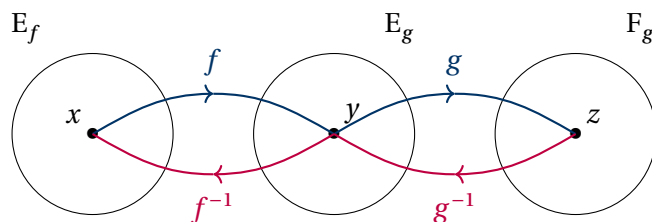
Soient E_f, E_g, F_f, F_g quatre ensembles et $f : E_f \rightarrow F_f, g : E_g \rightarrow F_g$ tels que $f(E_f) \subset E_g$. Alors $g \circ f$ est une bijection de réciproque :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Attention

L'ordre est inversé dans la formule de réciproque d'une composée. Pour ne pas se tromper, on pourra garder en mémoire le diagramme ci-après et l'analogie ci-dessous :

si vous avez enfilé une paire de chaussettes, puis des chaussures. Pour retrouver vos pieds nus, il faut d'abord enlever les chaussures, puis les chaussettes!



Preuve Il suffit de le vérifier la définition d'application réciproque.

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &= f^{-1} \circ \text{Id}_{E_g} \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \text{Id}_{E_f}, \end{aligned}$$

et de-même :

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ &= g \circ \text{Id}_{F_f} \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \text{Id}_{F_g}. \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est bien une bijection de E dans G de réciproque $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition 11 | Réciproque d'une réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors f^{-1} est bijective, et : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Preuve Les égalités $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ — qui expriment la bijectivité de f — expriment pour la même raison la bijectivité de f^{-1} et cela montre bien que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Méthode (ALG) 7.3 (Montrer la bijectivité et calculer la réciproque) Pour déterminer la fonction réciproque d'une bijection $f : E \rightarrow F$, on écrit $y = f(x)$ pour $y \in F$ et on cherche à isoler x en fonction de y pour parvenir à l'expression $x = f^{-1}(y)$. S'il existe un unique x solution, cela prouve la bijectivité de f et en plus nous obtenons l'expression de f^{-1} .

Exemple 15 Montrer que $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{++} \\ x \mapsto e^{2x+1} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.



Exemple 16

• Montrer que $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x+2} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.



- Déterminer un ensemble F tel que $g \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow F \\ x \longmapsto \frac{2x-1}{x+1} \end{array} \right.$ soit bijective et déterminer sa réciproque.



Exemple 17 Soit : $f \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x + 4y) \end{array} \right.$ Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.



Exercice 3 (Réciproques hyperboliques)

1. Soient :

$$u : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{sh}(x), \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \end{array} \right.$$

Montrer que u est bijective et que sa réciproque est v .

2. De-même, montrer que $w \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{ch}(x) \end{array} \right.$ est bijective, et déterminer sa réciproque.

Pour terminer, analysons l'image directe d'une partie par f^{-1} .

Proposition 12 | Image directe par f^{-1} et image réciproque par f bijective
Soient $f : E \longrightarrow F$ une bijection et $B \subset F$. Supposons de plus f bijective. Alors :

$$f^{(-1)}(B) = f^{-1}(B) \quad (\text{image directe par } f^{-1} \text{ de } B).$$

Note

Cette proposition légitime de noter parfois $f^{-1}(B)$ en lieu et place de $f^{(-1)}(B)$ pour l'image réciproque d'une partie. Il ne peut y avoir de confusion dans le cas bijectif.

Preuve



L'objectif de cette section est de donner un résultat permettant de montrer que des fonctions numériques sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans les cas où nous ne sommes pas capables de trouver un antécédent. Le résultat nous permettra de construire de nouvelles fonctions usuelles.

3.1 Fonction bijective

Rappelons une définition déjà rencontrée précédemment, mais réadaptée aux fonctions numériques.

Définition 12 | Bijection numérique

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $I \subset \mathcal{D}_f$, on dit que f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$ si l'application :

$$\varphi \begin{cases} I \rightarrow J \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ est bijective.}$$

- Dans ce cas, on appelle alors *reciproque de f de I dans (ou sur) J* , l'application φ^{-1} .

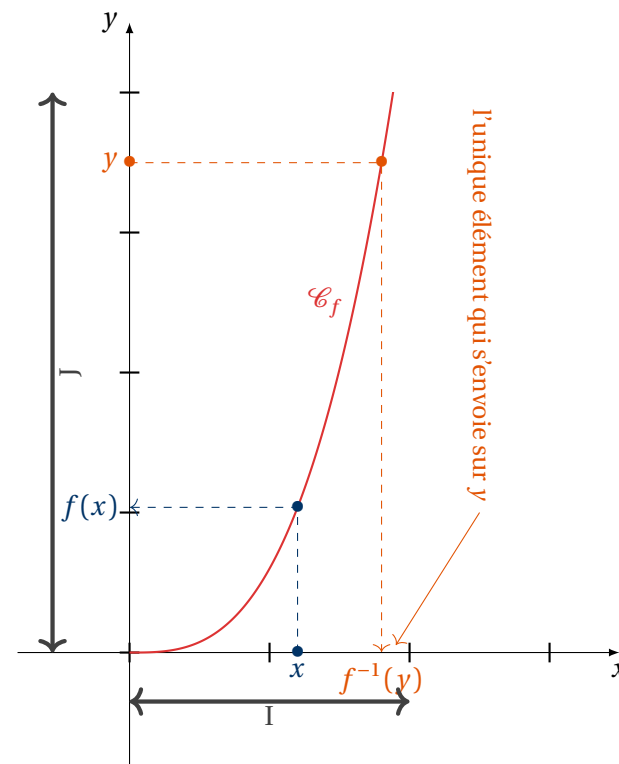
! Attention

Ainsi, pour une fonction, on ne dira pas simplement « f est bijective » mais « f réalise une bijection de I dans (ou sur) J » car il y a toujours ambiguïté sur l'ensemble de départ choisi (un sous-ensemble du domaine de définition).

Exemple 18 Déterminer si les fonctions $f : I \rightarrow J$ ci-après réalisent une bijection de I vers J et calculer f^{-1} le cas échéant. On pourra commencer par esquisser le graphe pour se convaincre du résultat. On notera φ l'application

$$\varphi \begin{cases} I \rightarrow J \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ définie précédemment.}$$

- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$,
 - $I = \mathbb{R}^*, J = \mathbb{R}$,



- $I = \mathbb{R}^*, J = \mathbb{R}^{+*}$,



- $I = \mathbb{R}^{+*}, J = \mathbb{R}^{+*}$.



2. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

- [Tracé du graphe et calcul de $\mathcal{D}_f$] Pour obtenir le graphe de f , on peut utiliser un argument géométrique ici plutôt que de faire une étude de fonction.



- $I = [-1, 1], J = \mathbb{R}^+$,



- $I = [-1, 1], J = [0, 1]$.



3. $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ dans $\mathbb{R}$, $\exp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{++}$. Les applications φ associées sont réciproques l'une de l'autre.

GRAPHE D'UNE BIJECTION RÉCIPROQUE. Dans toute cette section, nous travaillons pour rappel avec des fonctions numériques, le graphe peut donc être visualisé sur un dessin. Les graphes de f et f^{-1} possèdent en plus une propriété de symétrie intéressante, qui permet de tracer facilement le graphe de f^{-1} à partir de celui de f . Cela peut se constater facilement : soit $f : I \rightarrow J$ une bijection de I dans J , alors

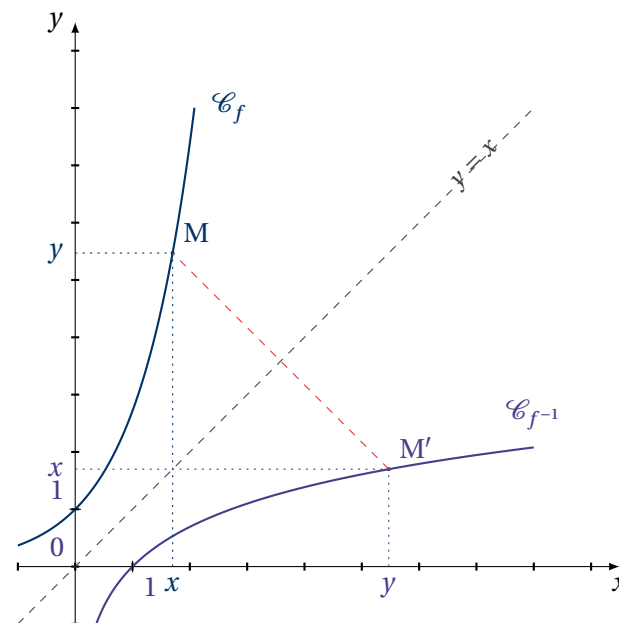
$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C}_{f^{-1}} &\iff y = f^{-1}(x) \\ &\iff f(y) = x \\ &\iff (y, x) \in \mathcal{C}_f. \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{composant par } f \\ \text{définition de } \mathcal{C}_f \end{array} \right\}$

Autrement dit, chaque point de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique par rapport à $y = x$ (échange des deux coordonnées) d'un point de $\mathcal{C}_f$. On obtient dès lors la proposition suivante.

Proposition 13 | Symétrie du graphe

Soient I, J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et f réalisant une bijection de I sur J . Alors le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f à l'aide d'une symétrie d'axe $y = x$.



Proposition 14 | Parité de f^{-1}

Soient I et J deux intervalles centrés en zéro, et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors : f impaire $\implies f^{-1}$ impaire.

Note | Remarque : une fonction paire ne peut être bijective.

Preuve Supposons f impaire. Montrons que f^{-1} est impaire.

 Notons que J est symétrique en 0. De plus, soit $y \in J$, il existe $x \in I$ unique tel que $f(x) = y$.

Alors :

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \underset{f \text{ impaire}}{=} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

Donc : f^{-1} est impaire.

3.2 Théorème de la bijection

Rappelons que nous avons vu qu'une bijection entre deux ensembles I, J établit une correspondance parfaite entre les éléments de I et ceux de J . Il faut donc pour tout $y \in J$:

- l'existence d'un antécédent. Il faudrait donc une fonction « sans trou », c'est-à-dire une fonction continue.
- L'unicité d'un antécédent. Il ne faudrait donc pas que la fonction change de monotonie au risque de donner un deuxième antécédent.

Ces deux hypothèses naturelles sont celles du théorème de la bijection, que nous énonçons et admettons pour l'instant.



Théorème 1 | Théorème de la bijection

Soit f une fonction numérique continue sur $I \subset \mathcal{D}_f$, et strictement monotone sur I . Alors :

- $f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Plus précisément, l'intervalle $f(I)$ est donné par le tableau suivant :

$f(I) \backslash I$	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
str. $\nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$[\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$[\lim_a f, \lim_b f[$
str. $\searrow$	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$[\lim_b f, f(a)]$	$[\lim_b f, \lim_a f[$

- La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f . De plus, les limites de f^{-1} aux bornes de $f(I)$ sont les bornes de I .

Preuve Admis provisoirement.

Remarque 9 Il est faut bien comprendre la différence entre le théorème de la bijection et la méthode exposée précédemment pour montrer qu'une application est bijective (résolution de $y = f(x)$).

- Le théorème de la bijection permet de démontrer très simplement qu'une fonction réalise une bijection. Mais il ne donne aucune information, si ce n'est la continuité et la monotonie, sur la réciproque.
- La résolution de $y = f(x)$ en la variable x permet simultanément de montrer qu'une fonction réalise une bijection et de déterminer sa réciproque. Elle est en revanche souvent impossible à mettre en place, puisqu'on ne sait résoudre que peu d'équations de manière exacte.

Méthode (ALG) 7.4 (Théorème de la bijection et équations) Soit I un intervalle. On souhaite justifier l'existence et l'unicité éventuelle d'une solution $x \in I$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires, ce théorème sera revu dans un prochain chapitre.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur I , puis on vérifie que $\alpha \in f(I)$; cela garantira l'existence et l'unicité d'un antécédent de α par f , c'est-à-dire une unique solution à l'équation.

Notez également que :

- l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $f(x) - x = 0$. Il s'agirait donc d'appliquer le théorème de la bijection à $f - \text{Id}$ et $\alpha = 0$.
- L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $(f - g)(x) = 0$. Il s'agirait donc d'appliquer le théorème de la bijection à $f - g$ et $\alpha = 0$.

Exemple 19 (Utilisation du théorème de la bijection)

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\exists ! x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = x.$$



2. • La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x - 2$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.



- Justifier que ce point d'annulation est dans $]2, 3[$.



3. Soit $t \geq 0$. La fonction polynôme $P_t : x \mapsto x^3 + tx - 1$ admet une unique racine réelle $u(t)$, c'est-à-dire : $\exists ! u(t) \in \mathbb{R}, \quad P_t(u(t)) = 0$.



4. **[Existence d'une suite implicite]** Soit $n \geq 1$, et $f_n : x \in [1, \infty[\mapsto x^{n+1} - x^n$. L'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur l'intervalle $[1, \infty[$. *On ne s'intéresse pas ici aux éventuelles solutions en dehors de $[1, \infty[$.*



Exemple 20 (Retour sur la fonction racine cubique : justifications) *On ne suppose pas ici connue l'existence et l'unicité de la racine cubique d'un réel.*

- En utilisant le théorème de la bijection, montrer que $f : x \mapsto x^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



- Préciser les limites de f^{-1} en $\pm\infty$.



- Par définition de la racine cubique (voir **Chapitre (ALG) 2**), la réciproque de f a déjà une notation, c'est $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
- Déterminer une expression de la bijection réciproque f^{-1} à l'aide de l'exponentielle et du logarithme. Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^3 = y$.

- ◇ **[Cas 1 : $y = 0$]** l'unique antécédent est $f^{-1}(0) = 0$ puisque $0^3 = 0$.
- ◇ **[Cas 1 : $y > 0$]** on vérifie sans peine que cela entraîne $x > 0$.

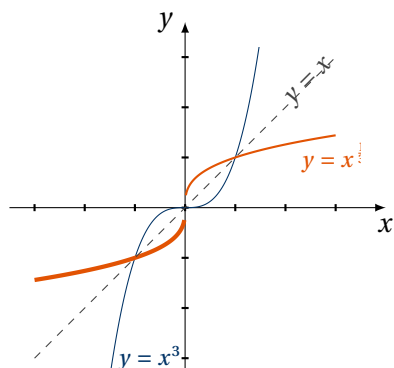


- ◇ **[Cas 2 : $y < 0$]** on vérifie sans peine que cela entraîne $x < 0$.



- ◇ **[Conclusion : expression de f^{-1}]** on a donc une expression explicite (à l'aide de l'exponentielle et du logarithme) de la racine cubique.





COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto x^3$ ET SA RÉCIPROQUE $x \mapsto x^{1/3}$ SUR $\mathbb{R}$



Résumé Définition de a^b

$\begin{array}{c} b \\ \backslash \\ a \end{array}$	$n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\in \mathbb{R}$
> 0	$a \times \cdots \times a$ $b(=n)$ facteurs	$\frac{1}{a \times \cdots \times a}$ $b(=n)$ facteurs	$e^{b \ln a}$
$\in \mathbb{R}$			★

Remarque 10 (Case ★) De façon générale, cette puissance n'est pas définie si a n'est pas forcément positif. On peut en revanche obtenir une définition si :

- $b = \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}$, est l'inverse d'une puissance impaire. En effet, puisque $x \mapsto x^{2k+1}$ est bijective, on pose $a^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{a}$, c'est-à-dire l'unique x vérifiant $x^{2k+1} = a$.
- On peut donc ensuite étendre à $b = \frac{p}{2k+1}, k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$, en posant : $a^b = \left(a^{\frac{1}{2k+1}}\right)^p$.

Méthode (ALG) 7.5 (Utiliser le théorème de la bijection pour calculer des images d'intervalles) Pour déterminer des images d'intervalles, on peut utiliser le théorème de la bijection. En effet, sous les hypothèses du théorème, les images d'intervalles sont données par le tableau ci-dessous :

$\begin{array}{c} I \\ \backslash \\ f(I) \end{array}$	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
str. ↗	$[f(a), f(b)]$	$[\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$[\lim_a f, \lim_b f[$
str. ↘	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$[\lim_b f, f(a)]$	$[\lim_b f, \lim_a f[$

Si la fonction change de monotonie, on utilisera le théorème de la bijection sur

plusieurs sous-intervalles, avec la propriété « $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ » vue précédemment (voir l'exemple ci-dessous concernant la fonction carré).

Exemple 21 On note $f : x \mapsto e^{-x}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$ en utilisant le théorème de la bijection.



Exemple 22 (Fonction carré sur $\mathbb{R}$ – Cas d'un changement de monotonie)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f([-1, 2])$.



On applique le théorème de la bijection sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 2]$. On a que :

- la fonction carrée est continue sur $[-1, 0]$ comme fonction usuelle.
- La fonction carrée est strictement décroissante sur $[-1, 0]$.
- $f(-1) = 1$ et $f(0) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([-1, 0]) = [0, 1]$.

- La fonction carrée est continue sur $[0, 2]$ comme fonction usuelle.
- La fonction carrée est strictement croissante sur $[0, 2]$.
- $f(2) = 4$ et $f(0) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([0, 2]) = [0, 4]$.

Ainsi on a : $f([-1, 2]) = f([-1, 0]) \cup f([0, 2]) = [0, 4]$. Donc $\boxed{f([-1, 2]) = [0, 4]}$.

3.3 Dérivée d'une réciproque

Le théorème suivant, très puissant, permet de montrer la dérivabilité d'une réciproque et même d'exprimer la dérivée de cette dernière, même sans connaître l'expression de cette dernière.

Théorème 2 | Dérivée d'une réciproque

Soit une application $f : I \rightarrow J$ bijective.





- **[Local]** Soit $y \in J$.

$$\begin{cases} \text{(i)} & f \text{ dérivable en } f^{-1}(y) \\ \text{(ii)} & f'(f^{-1}(y)) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i)} & f^{-1} \text{ est dérivable en } y, \\ \text{(ii)} & (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \end{cases}$$

- **[Global]**

$$\begin{cases} \text{(i)} & f \text{ dérivable sur } I, \\ \text{(ii)} & \forall y \in J, f'(f^{-1}(y)) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i)} & f^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{(ii)} & \forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \end{cases}$$

En particulier, si f' ne s'annule pas sur I (c'est souvent cette condition suffisante qui est vérifiée dans la pratique!) alors f^{-1} est dérivable sur J tout entier.

Rappelons que par définition : $\forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x$. Si f^{-1} est dérivable sur J , alors en dérivant on obtient :

$$(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1.$$

Soit $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$, on a alors :

$$(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1. \quad (*)$$

Si en plus $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, on obtient la formule :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

En revanche, cette démonstration ne prouve en aucun cas la dérivabilité de f^{-1} , c'est ce que nous montrerons dans le **Chapitre (AN) 6** : c'est pour le moment admis.

Méthode (ALG) 7.6 (Utiliser la formule de dérivation d'une réciproque) Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

- Justifier que f est bien dérivable sur I .
- Résoudre l'équation $f' \circ f^{-1}(y) = 0$ en $y \in J$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions. Si f' ne s'annule clairement pas, on peut sauter cette étape et $\mathcal{S} = \emptyset$.
- D'après le théorème, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \mathcal{S}$ et la dérivée est donnée par la formule.

Exemple 23 Soit $f : x \mapsto e^x + 2x - 3$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser; on notera alors f^{-1} sa réciproque.



2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J puis déterminer $(f^{-1})'(-2)$.



Remarque 11

- Comme le témoigne l'exemple précédent, il est souvent possible, grâce au **Théorème 2** de calculer $(f^{-1})'$ en certains points même si nous n'étions pas capable de calculer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.
- Parfois-même il est possible de calculer $f'(f^{-1}(y))$ pour tout $y \in J$ même si $f^{-1}(y)$ ne nous était pas accessible. Voir l'exemple qui suit.

Exemple 24 Soit $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$.

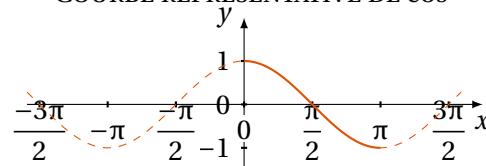
1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser; on notera alors f sa réciproque.



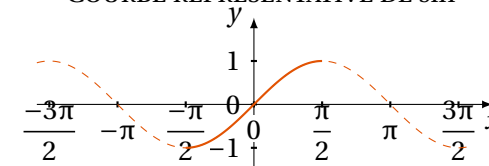
2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J puis déterminer $(f^{-1})'(y)$ pour tout $y \in J$.



COURBE REPRÉSENTATIVE DE $\cos$



COURBE REPRÉSENTATIVE DE $\sin$



Sur les parties qui ne sont pas en pointillées, la fonction réalisera une bijection. Passons maintenant à une rédaction plus formelle.

Définition/Proposition 3 | Existence de $\arccos$, $\arcsin$

- [Arccosinus]** L'application $\cos \Big|_{[0, \pi]} \begin{matrix} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{matrix}$ est une bijection, sa bijection réciproque est notée $\arccos$, et on a :
 - $\diamond$ $\arccos = \cos \Big|_{[0, \pi]}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, elle est appelée *fonction arccosinus*.
 - $\diamond$ De plus, $\arccos$ est une fonction continue, et strictement décroissante.
- [Arcsinus]** L'application $\sin \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \begin{matrix} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{matrix}$ est une bijection, sa bijection réciproque est notée $\arcsin$, et on a :
 - $\diamond$ $\arcsin = \sin \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle est appelée *fonction arcsinus*.
 - $\diamond$ De plus, $\arcsin$ est une fonction continue, impaire et strictement croissante.

3.4 Fonctions circulaires réciproques

L'objectif de cette dernière partie est d'essayer de restreindre certaines fonctions trigonométriques, afin d'obtenir des bijections. Commençons déjà par constater que

$$\cos \Big|_{\mathbb{R}} \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos x, \end{matrix} \quad \sin \Big|_{\mathbb{R}} \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \sin x, \end{matrix} \quad \tan \Big|_{\mathcal{D}_{\tan}} \begin{matrix} \mathcal{D}_{\tan} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan x, \end{matrix}$$

telles que définies dans le **Chapitre (AN) 1**, ne sont pas bijectives. En effet :

$$\cos(0) = 1 = \cos(2\pi), \quad \sin(0) = 0 = \sin(\pi), \quad \tan(0) = 0 = \tan \pi,$$

alors que : $0 \neq 1, 0 \neq \pi$. Elles ne sont donc pas injectives, donc *a fortiori* pas bijectives. En revanche, il est possible de restreindre l'ensemble de départ, afin de former des applications bijectives. Il n'y a bien sûr pas un seul choix possible à chaque fois, mais nous prendrons le plus naturel.

Attention

La fonction $\arccos$ ne possède pas de parité, tout comme $\cos \Big|_{[0, \pi]}$.

Preuve Rappelons les tableaux de variations de $\cos$, $\sin$ sur les intervalles qui nous intéressent.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos t$	1	0	-1

t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	-1	0	1

- [Existence de $\arccos$]**



La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur le segment $[0, \pi]$, elle réalise donc une bijection du segment $[0, \pi]$ dans le segment $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ d'après

FONCTIONS $\arccos$ ET $\arcsin$. Commençons par observer les graphes.



le théorème de la bijection. De plus, la fonction arccos est alors continue, paire (tout comme $\cos|_{[0,\pi]}$) et a même monotonie que $\cos|_{[0,\pi]}$, donc est décroissante.

- **[Existence de arcsin]** La fonction sin est continue et strictement croissante sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection du segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans le segment $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ d'après le théorème de la bijection. De plus, la fonction arcsin est alors continue, impaire (tout comme $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$) et a même monotonie que $\sin|_{[0,\pi]}$, donc est croissante.

- **[Dérivabilité]** La fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ avec :

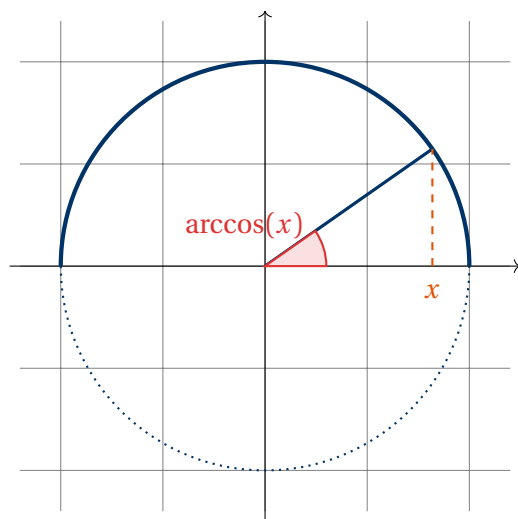
$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- **[Taux]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1.$

PROPRIÉTÉS DE arccos ET COURBE REPRÉSENTATIVE. De la définition, on peut aussi comprendre arccos ainsi :

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x .

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\cos} & \\ [0, \pi] & & [-1, 1] \\ & \xleftarrow{\arccos} & \end{array}$$



Exemple 25 (Valeurs remarquables) Compléter le tableau ci-dessous.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$									

Proposition 15 | Relation fondamentale et dérivabilité de arccos

- **[Relation fondamentale]**

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x.$$

Attention

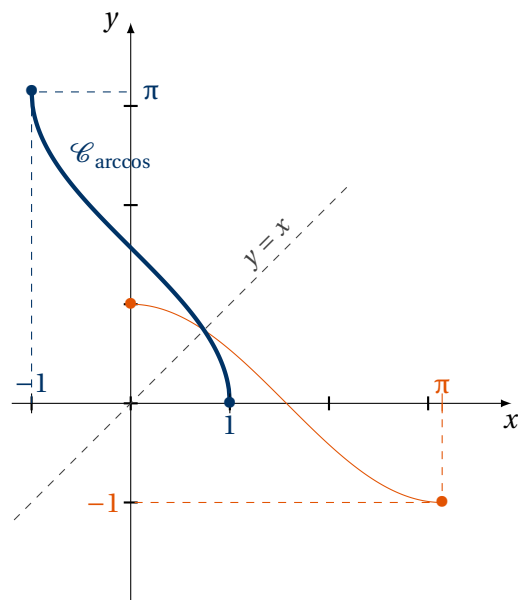
En dehors de l'intervalle $[0, \pi]$, la relation $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est pas vérifiée, même si l'expression $\arccos(\cos x)$ est bien définie.

Preuve

- Conséquence immédiate de la notion de réciproque.
-

-

De tout cela, nous pouvons à présent tracer la courbe représentative.



Exemple 26 Soit $x \in [-1, 1]$, calculer $\sin(\arccos(x))$.



Exercice 4 On note f la fonction définie par : $f(x) = \arccos(\cos x)$.

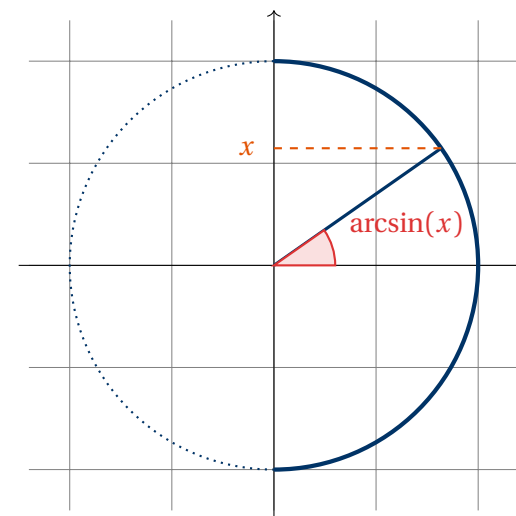
1. Calculer $f(-\frac{\pi}{3})$.
2. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis étudier f .

Exercice 5 Déterminer un argument $\theta \in]-\pi, \pi]$ de $2 - i$ faisant intervenir un arccosinus.

PROPRIÉTÉS DE arcsin ET COURBE REPRÉSENTATIVE. De la définition, on peut aussi comprendre arcsin ainsi :

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'angle de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x .

$$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \xrightarrow{\sin} & [-1, 1] \\ & \xleftarrow{\arcsin} & \end{array}$$



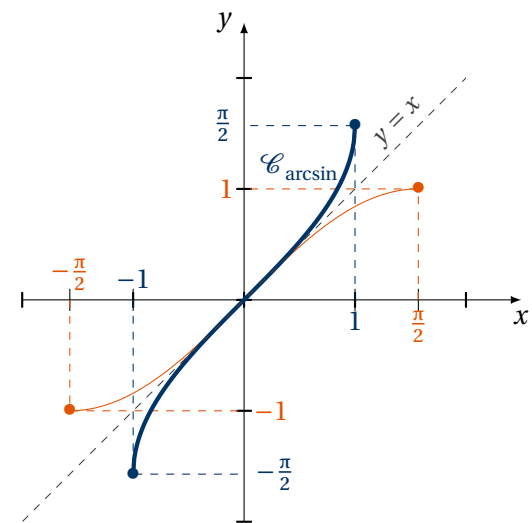
Exemple 27 (Valeurs remarquables) Compléter le tableau ci-dessous.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$									

Proposition 16 | Relation fondamentale et dérivabilité de arcsin

- **[Relation fondamentale]**
 $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x.$
- **[Dérivabilité]** La fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ avec :
 $\forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- **[Taux]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$

Attention
 En dehors de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la relation $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est pas vérifiée, même si l'expression $\arccos(\sin x)$ est bien définie.



Preuve

- Conséquence immédiate de la notion de réciproque.
- 

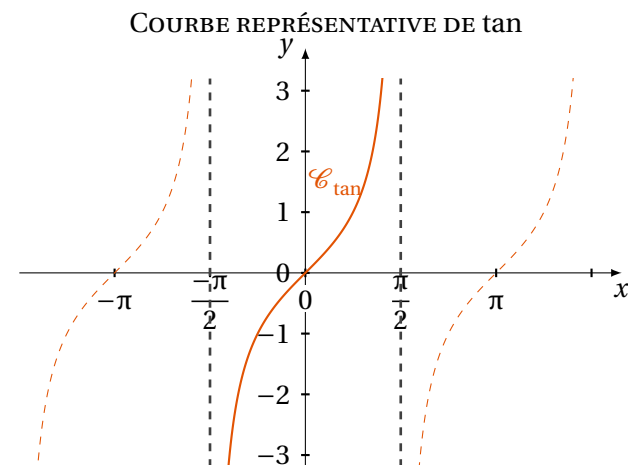
Exercice 6 On note f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

1. Calculer $f(\frac{3\pi}{4})$.
2. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis étudier f .

Exercice 7 Déterminer un argument $\theta \in]-\pi, \pi]$ de $-2 + i$ faisant intervenir un arcsinus.

- 

FONCTION arctan. Commençons à nouveau par le graphe.



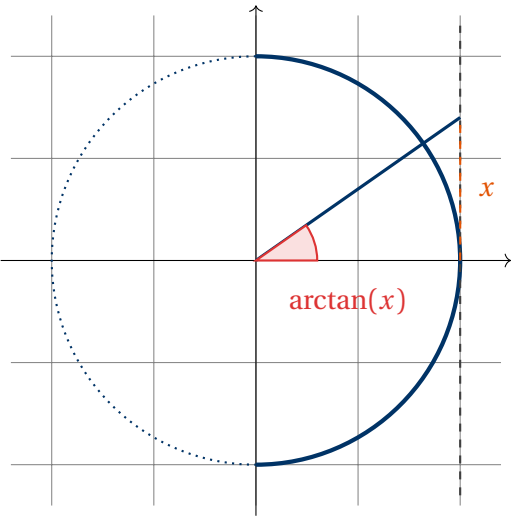
De tout cela, nous pouvons à présent tracer la courbe représentative.

Sur la partie qui n'est pas en pointillées, la fonction réalisera une bijection. Passons maintenant à une rédaction plus formelle.

Définition/Proposition 4 | Existence de arctan

L'application $\tan \big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, sa bijection réciproque est notée arctan, et on a :

- $\arctan = \tan \big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle est appelée *fonction arctangente*.
- De plus, arctan est une fonction continue, impaire, et strictement croissante.



Exemple 28 (Valeurs remarquables) Compléter le tableau ci-dessous.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$							

Preuve
 La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. De plus, la fonction arctan est alors continue et a même monotonie que $\tan \big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$, donc est croissante. Elle est de plus impaire car $\tan \big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ l'est. En conclusion, on a :

t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	$-\infty$	0	∞

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan t$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

Proposition 17 | Propriétés d'arctan

- **[Composition]**
 $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x.$
- **[Dérivabilité]** arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$
- **[Limites]**
 $\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$
 $\diamond$ **[Taux]** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1.$

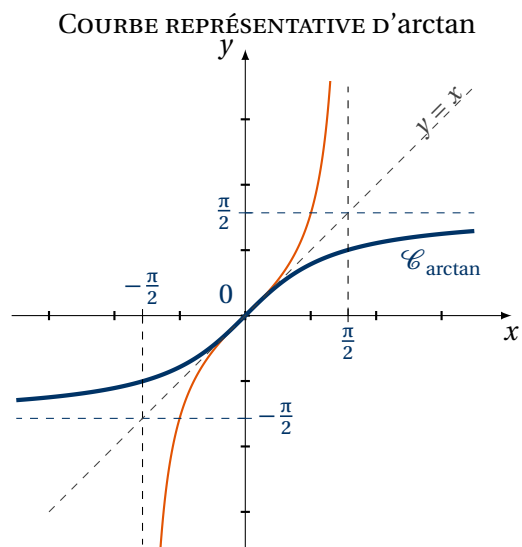
- Preuve**
- Évident par définition de l'une bijection réciproque.
 - Vérifions la dérivabilité ainsi que la formule.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est l'angle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x .

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$$

$$\xleftarrow{\arctan}$$

• [Limites]



Exemple 29 Soit $f : x \mapsto \arctan(\ln(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et calculer ses limites aux bords de $\mathcal{D}_f$.



2. Vérifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer f' .



3. Justifier que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un intervalle I et dresser le tableau de variation complet de f^{-1} sur I .



4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et calculer $(f^{-1})'(0)$.



5. Retrouver le résultat précédent en calculant explicitement f^{-1} .



Exercice 8 Résoudre l'équation : $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 30 Établir la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DÉRIVÉS : LE RETOUR

Dans le tableau ci-dessous, x est une **variable** réelle, c une **constante** réelle, α une **constante** réelle et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Fonction f'	$\mathcal{D}_{f'} \subset \mathcal{D}_f$
$f(x) = c$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\boxed{\mathbb{R}_+^*}$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\boxed{\mathbb{R}^*}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Pour u une fonction réelle à valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de la fonction par laquelle on compose, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$
$(\cos u)' = -u' \sin(u)$	$(\sin u)' = u' \cos(u)$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	
$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ si $-1 < u < 1$		$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ si $-1 < u < 1$	
$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$			

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (ALG) 7.1 (Montrer qu'une application est surjective)

1. Poser un élément *quelconque* y de F .
2. Trouver ensuite un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$, cela revient souvent à résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x .
3. Si vous avez trouvé un élément x qui convient, et ce pour tout $y \in F$, alors f est bien surjective.

Méthode (ALG) 7.2 (Montrer qu'une application est injective)

1. Se donner $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
2. Par divers arguments, en déduire qu'alors la seule possibilité est que $x = x'$. Auquel cas f est bien injective.

Méthode (ALG) 7.3 (Montrer la bijectivité et calculer la réciproque) Pour déterminer la fonction réciproque d'une bijection $f : E \rightarrow F$, on écrit $y = f(x)$ pour $y \in F$ et on cherche à isoler x en fonction de y pour parvenir à l'expression $x = f^{-1}(y)$. S'il existe un unique x solution, cela prouve la bijectivité de f et en plus nous obtenons l'expression de f^{-1} .

Méthode (ALG) 7.4 (Théorème de la bijection et équations) Soit I un intervalle. On souhaite justifier l'existence et l'unicité éventuelle d'une solution $x \in I$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires, ce théorème sera revu dans un prochain chapitre.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur I , puis on vérifie que $\alpha \in f(I)$; cela garantira l'existence et l'unicité d'un antécédent de α par f , c'est-à-dire une unique solution à l'équation.

Notez également que :

- L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $f(x) - x = 0$. Il s'agirait donc d'appliquer le théorème de la bijection à $f - \text{Id}$ et $\alpha = 0$.
- L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $(f - g)(x) = 0$. Il s'agirait donc d'appliquer le théorème de la bijection à $f - g$ et $\alpha = 0$.

Méthode (ALG) 7.5 (Utiliser le théorème de la bijection pour calculer des images d'intervalles) Pour déterminer des images d'intervalles, on peut utiliser le théorème de la bijection. En effet, sous les hypothèses du théorème, les images d'intervalles sont données par le tableau ci-dessous :

$f(I)$ \ I	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
str. $\nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$]\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
str. $\searrow$	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$]\lim_b f, f(a)]$	$]\lim_b f, \lim_a f[$

Si la fonction change de monotonie, on utilisera le théorème de la bijection sur plusieurs sous-intervalles, avec la propriété « $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ » vue précédemment (voir l'exemple ci-dessous concernant la fonction carré).

Méthode (ALG) 7.6 (Utiliser la formule de dérivation d'une réciproque) Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

- Justifier que f est bien dérivable sur I .
- Résoudre l'équation $f' \circ f^{-1}(y) = 0$ en $y \in J$, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions. Si f' ne s'annule clairement pas, on peut sauter cette étape et $\mathcal{S} = \emptyset$.
- D'après le théorème, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \mathcal{S}$ et la dérivée est donnée par la formule.

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les applications :

- savoir qu'une application est déterminée par trois choses ☐
- connaître les différentes opérations sur les applications ☐
- savoir démontrer qu'une application est injective ou n'est pas injective ... ☐
- savoir démontrer qu'une application est surjective ou n'est pas surjective ☐
- savoir démontrer qu'une application est bijective ou n'est pas bijective ... ☐
- savoir déterminer l'application réciproque d'une application bijective ... ☐

2. Concernant les bijections numériques :

- connaître le théorème de la bijection ☐
- savoir étudier la dérivabilité d'une bijection réciproque ☐
- connaître les fonctions arccos et arcsin : définition, propriétés, dérivée et graphe ☐
- connaître la fonction arctan : définition, propriétés, dérivée et graphe ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.
Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.



4.1

Images directes

Exercice 1 | ●○○ On considère l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 3x. \end{array} \right.$

1. Étudier les variations de f .
2. L'application f est-elle injective?
3. Déterminer $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, \infty[)$.

Exercice 2 | ●○○ Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$.

4.2

Applications et fonctions numériques

Exercice 3 | ●○○ Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques. Lorsque cela vous semble pertinent, on pourra commencer par esquisser le graphe au brouillon.

$$1. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$

$$3. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x + 1 \end{array} \right.$$

$$5. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$

$$7. \quad f \left| \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$

$$9. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 \end{array} \right.$$

$$11. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]1, +\infty[\\ x \longmapsto e^{-x} + 1 \end{array} \right.$$

$$13. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]-4, +\infty[\\ x \longmapsto 2^x - 4 \end{array} \right.$$

$$2. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$

$$4. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 1 \end{array} \right.$$

$$6. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$

$$8. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array} \right.$$

$$10. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^4 \end{array} \right.$$

$$12. \quad f \left| \begin{array}{l}]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1 + x) \end{array} \right.$$

$$14. \quad f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto 2n + 1. \end{array} \right.$$

Exercice 4 | ●○○ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. L'application f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la restriction $g = f|_{[-1, 1]}$ réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

Exercice 5 | ●●○ Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose,

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}.$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
2. Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$. Représenter graphiquement f et f^{-1} .

Exercice 6 | ●○○ Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$, puis montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$.

Exercice 7 | ●○○ [Ilann SA – Martin LA] Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Montrer qu'elle a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 | ●○○ [Jules PE – Toscane GR] On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x^2 + 1). \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas injective.
3. Montrer que f n'est pas surjective.
4. Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \ln(x^2 + 1) \end{cases}$ est bijective et donner sa réciproque.

Exercice 9 | ●●○ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \max\left(\frac{x+5}{10}, x-3\right).$$

1. Montrer en utilisant la définition que f est injective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, détermine sa réciproque.

Exercice 10 | ●○○ [Lou-Anne CH – Caroline RO] Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + \frac{1}{z}. \end{cases}$$

1. L'application f est-elle injective?
2. Déterminer l'image de f . Que peut-on en déduire?
3. Déterminer l'image par f de $\mathbb{R}^*$, puis de $\mathbb{U}$.

Exercice 11 | ●●○ Application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ Soit $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto n + (-1)^n. \end{cases}$

1. Calculer $f \circ f$. Qu'en déduire sur f ?
2. Résoudre l'équation : $347 = n + (-1)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 | ●●○ [Maëlys IB – Raphaël LU] On considère l'application à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$, par

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{N} \\ A \longmapsto \sum_{k \in A \cap [0, 14]} k. \end{cases}$$

1. Déterminer $f(\{1, 4, 7\})$, $f(\mathbb{N})$ et $f(\{2n \mid n \in \mathbb{N}\})$.
2. L'application f est-elle injective? Surjective? Bijective?
3. Déterminer les antécédents de 5 par f .

Exercice 13 | ●○○ [Thomas DA – Martin LA] Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y). \end{cases}$ Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 14 | ●●● Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, xy). \end{cases}$

1. Si $(s, p) \in \mathbb{R}^2$, à quelle condition nécessaire et suffisante $(s, p) \in \text{Im}(f)$?
2. Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble : $\Delta_1 = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p = 1\}$.

4.4 Propriétés générales

Exercice 15 | ●●○ Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Montrer que, pour tous $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$,

$$f\left(A \cap f^{(-1)}(B)\right) = f(A) \cap B.$$
- 2.1)** Montrer que l'application $A \mapsto f(A)$ est croissante de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$, au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que, pour tous $A, A' \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \subset A' \implies f(A) \subset f(A').$$
- 2.2)** Montrer de même que l'application $B \mapsto f^{(-1)}(B)$ est croissante de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.
- Montrer que, pour tous $A \in \mathcal{P}(E)$ et $C \in \mathcal{P}(G)$,

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{(-1)}(C) = f^{(-1)}\left(g^{(-1)}(C)\right).$$

Exercice 16 | ●●○ Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1.1)** Comparer $f^{(-1)}(f(A))$ et A , pour toute partie A de E . Commencer par un dessin.
- 1.2)** Montrer que, si f est injective, alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{(-1)}(f(A)) = A.$$
- 1.3)** Montrer la réciproque.
- 2.1)** Comparer $f\left(f^{(-1)}(B)\right)$ et B , pour toute partie B de F . Commencer par un dessin.
- 2.2)** Montrer que, si f est surjective, alors

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(f^{(-1)}(B)\right) = B.$$
- 2.3)** Montrer la réciproque.

On pourra retenir de cet exercice que, si f est bijective, les applications

$$\delta : \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \\ A \mapsto f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \rho : \begin{array}{c} \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto f^{(-1)}(B) \end{array}$$

sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 17 | ●●○ Soit E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications.

- Montrer que si $g \circ f = \text{Id}_E$, alors g est surjective et f est injective.

- Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 18 | ●●○ [Ilann SA – Celia ET] Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère l'application h définie par :

$$h : \begin{array}{c} E \rightarrow F \times G \\ x \mapsto (f(x), g(x)). \end{array}$$

- Montrer que : (f est injective ou g est injective) $\implies h$ injective.
- On suppose que f est surjective et que g est surjective. L'application h est-elle nécessairement surjective?

Exercice 19 | ●●○ Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Soient E un ensemble non vide et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto (X \cup A, X \cup B) \end{array} \quad \text{n'est pas surjective.}$$

4.5 Autour de arctan, arcsin et arccos – Dérivation de f^{-1}

Exercice 20 | ●●○ [Armand CA – Tristan CA] Soit

$$x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right).$$

Calculer $\cos(4x)$, puis en déduire la valeur de x .

Exercice 21 | ●●○ Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation proposée :

- $\arccos(x) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right).$
- $\arcsin(\tan(x)) = x.$
- $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$
- $2 \arcsin(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right),$
- $\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{2}\right).$

Exercice 22 | ●●○

- On souhaite exprimer $\tan(a + b + c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$, lorsque ces grandeurs sont bien définies.

1.1) Traiter le cas où $a + b \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$.

1.2) Montrer que l'égalité obtenue reste vraie lorsque :

$$a + b \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

- On souhaite calculer

$$A = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

2.1) Montrer que les trois termes appartiennent à $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

2.2) Calculer $\tan(A)$, puis en déduire A .

Exercice 23 | ●○○ Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, et déterminer leur dérivée sur ce domaine.

- | | |
|--|---|
| 1. $x \mapsto \arctan(\sin x)$ | 2. $x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ |
| 3. $x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{\ln(x)}\right)$ | 4. $f : x \mapsto \arctan(x^2)$ |
| 5. $g : x \mapsto \ln(\arctan(-x))$ | 6. $h : x \mapsto \arctan(x^3 - 2x^2 + 1)$ |

Exercice 24 | ●○○ Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes aux bords de leur domaine de définition :

- | | |
|--|--|
| 1. $f : x \mapsto e^{-x} \arctan(e^x)$, | 2. $g : x \mapsto \frac{x e^{\arctan x} - x}{\arctan x}$. |
|--|--|

Exercice 25 | ●○○ [Maëlys IB – Caroline RO] Soit $f : x \mapsto x + e^x$.

- Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
- Justifier que f^{-1} est dérivable sur J .
- Déterminer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 26 | ●●○ Étudier les fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $f : x \mapsto \arccos(2x + 1)$ | 2. $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ |
| 3. $h : x \mapsto \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$ | |

Exercice 27 | ●●○ [Joshua BA – Louis DU] Soit $f : x \mapsto \cos(\arctan(2x))$.

- Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}$ et expliciter sa dérivée.
- Étudier la parité de f .
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = c$ en fonction de $c \in \mathbb{R}$, résoudre $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 28 | ●○○ [Nassim AG – Toscane GR] Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(x)\right)$.

- Calculer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- Sans calculer f^{-1} , montrer que :
 - f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un intervalle J à préciser,
 - f^{-1} est dérivable sur J et déterminer $f^{-1}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. En déduire $(f^{-1})'\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
- Retrouver les résultats précédents en calculant f^{-1} .

Exercice 29 | ●●○ [Julie RA – Emma MA] On considère l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sin x} \end{array} \right.$$

- Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.
- Sans chercher à calculer f^{-1} , montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et déterminer $(f^{-1})'$.

Exercice 30 | ●●○ Établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(\operatorname{sh} x)| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$