

Chapitre (AN) 2 Calculs de primitives & intégrales

1 Calculs de primitives.....

2 Techniques de calculs d'intégrales.....

3 Extension aux fonctions à valeurs complexes.....

4 Exercices.....

D'après un théorème de LIOUVILLE, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive qui puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles (ln, exp, cos, sin etc.).

— Le saviez-vous ?

Parmi toutes les disciplines mathématiques, la théorie des équations différentielles est la plus importante. Elle fournit l'explication de toutes les manifestations élémentaires de la nature où le temps est impliqué.

— Sophus LIE

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en par-

Résumé & Plan

Le but de ce chapitre est de rappeler la notion de primitive vue en Terminale, en vue d'obtenir un calcul pratiques d'intégrales. D'autres méthodes de calcul d'intégrales (intégration par parties, changement de variables) seront vues en complément. etc.

lerons pas en cours.

Nous commençons comme d'habitude pour l'étude pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on généralise ensuite à la fin aux fonctions à valeurs complexes.

1 CALCULS DE PRIMITIVES

1.1 Généralités

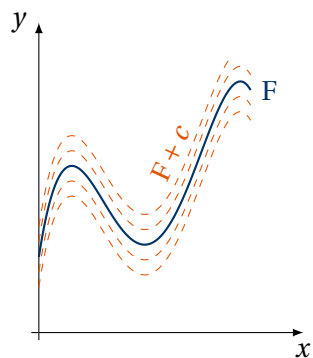
Définition 1 | Primitives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Une primitive réalise l'opération inverse de la dérivation : on part d'une fonction, et on cherche à savoir si elle s'écrit sous forme d'une dérivée.

Proposition 1 | Ensemble des primitives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . Si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur l'intervalle I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{R}$.



Preuve

On retiendra notamment que si f admet une primitive, alors elle en admet même une infinité : puisque si F est une primitive, toutes les fonctions $F + c$ avec c une constante en sont aussi. Il n'est donc pas question de parler de *la* primitive de f . Nous admettons le théorème ci-après, difficile à démontrer.

Théorème 1 | Existence de primitives pour les fonctions continues

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I . Alors :

- f possède une primitive sur I .
- Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Graphiquement, parmi toutes les primitives de f , il n'en existe qu'une seule F dont la courbe représentative $\mathcal{C}_F$ passe par le point (x_0, y_0) . Ce théorème est provisoirement admis, en attendant la construction de l'intégrale dans le **Chapitre (AN) 7** (une construction ne faisant pas appel à la notion de primitive)

Preuve
 Nous admettons l'existence. Démontrons l'unicité avec condition initiale.

Enfin, la propriété de linéarité de la dérivation se transmet alors automatiquement aux primitives.

Proposition 2 | Linéarité de la primitivation

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, F une primitive de f et G une primitive de g . Alors : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Preuve Immédiat par linéarité de la dérivation : $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.

Méthode (AN) 2.1 (Justifier l'existence d'une primitive) Il suffit de montrer la continuité de la fonction, le plus souvent en utilisant des théorèmes d'opérations élémentaires sur les fonctions continues.

Exemple 1 (Quelques primitives)

- La fonction $x \mapsto 2x$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction :
- La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction :
- La fonction $x \mapsto e^x$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction :
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}_-^*$ la fonction :



- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction :



- La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction :



- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction :



- La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ admet comme primitive sur $] -1; 1[$ la fonction :



- La fonction $x \mapsto 3^x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}^{++}$ la fonction :



♥ Exemple 2

- Pour $x > 0$, on pose $F(x) = x \ln(x) - x$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, et calculer la dérivée, ainsi que $F(e)$. Que remarque-t-on ?



- En déduire l'unique primitive de $\ln$ qui s'annule en 1.



1.2 Primitive & Intégrale sur un segment

L'intégrale est pour l'instant comprise avec la définition ci-dessous, admettant l'existence d'une primitive pour une fonction continue. Dans le second chapitre d'intégration **Chapitre (AN) 7**, nous construirons l'intégrale autrement et ferons le lien avec la définition ci-dessous.



Cadre

Dans toute cette sous-section, la notation $[a, b]$ désignera toujours un segment, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition/Proposition 1 | Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

- On appelle *intégrale de f sur le segment $[a, b]$* le réel noté $\int_a^b f$ (ou encore

$$\int_a^b f(x) dx, \int_{[a,b]} f(x) dx) \text{ défini par :}$$

$$\int_a^b f(x) dx \underset{(\text{déf.})}{=} [F(x)]_a^b \underset{(\text{déf.})}{=} F(b) - F(a),$$

(où F désigne une primitive de f).

- On appelle *intégrande* de $\int_a^b f$ la fonction f .

Preuve La quantité $\int_a^b f(x) dx$ ne dépend pas de la primitive choisie. La définition de l'intégrale sera donc bien posée.



Remarque 1

- Si $a = b$, alors avec les notations de la définition précédente, on a :

$$\int_a^a f = [F]_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$
- Si $f = K \in \mathbb{R}$ est constante, alors : $\int_a^b f(x) dx = [Kx]_a^b = K(b - a)$.
- La variable utilisée dans l'intégrale est, comme dans les sommes et produits, **muette**.

Exemple 3 Calculer les intégrales ci-après.

1. $\int_0^1 (-4x^3 + x^2 - 1) dx,$



2. $\int_1^2 \frac{dt}{2t-1},$



3. $\int_0^T I_0 e^{-t/\tau} dt$ avec $I_0, T, \tau \in \mathbb{R}^+.$



PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES DE L'INTÉGRALE. L'idée est ici seulement d'établir les propriétés qui vont nous servir pour le calcul de primitives. Nous viendrons compléter cette liste plus tard, dans le **Chapitre (AN) 7** dédié à l'intégration.

Proposition 3 | Propriétés de l'intégrale

Soient I un intervalle et $(a, b) \in I^2$. Alors :

- [Linéarité]** Pour tout $(f, g) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

- [Positivité]** Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a \leq b$, alors :

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f \geq 0.$$

- **[Croissance]** Si $(f, g) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))^2$ et $a \leq b$, alors :

$$f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

- **[Relation de CHASLES]** Soient $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $c \in I$. Alors :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

- **[Ordre des bornes]** Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors :

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

Preuve



- Si F est une primitive de f , alors l'hypothèse nous donne $F' \geq 0$, donc que F est croissante. On obtient immédiatement $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0$ puisque $a \leq b$.



Citons également deux propriétés parfois utiles dans les calculs, qui concernent le crochet, et qui ont déjà été justifiées dans la preuve précédente.

Proposition 4 | Propriétés du crochet

Soient I un intervalle et $(a, b) \in I^2$.

- **[Linéarité]** Soient $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$[\lambda F + \mu G]_a^b = \lambda [F]_a^b + \mu [G]_a^b.$$

- **[Ordre des bornes]** Si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors :

$$[F]_a^b = -[F]_b^a.$$

La relation de CHASLES permet de calculer notamment des intégrales dont l'intégrande est définie par morceaux, voyons un exemple avec la valeur absolue.

Exemple 4

1. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)| dx$.



2. Calculer $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{2}, x\right) dx$.



LIEN ENTRE PRIMITIVE ET INTÉGRALE. Par définition de l'intégrale, il est nécessaire de connaître une primitive pour la calculer, il existe donc un fort lien entre les deux notions. Voyons lequel.

Théorème 2 | Lien primitive & Intégrale

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a** .

Notation

Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Le théorème précédent justifie la notation ci-dessous parfois utilisée :

- $\int f(t) dt$ ou $\int f$ désigne *une* primitive de f , c'est une fonction, et
- $\int_a^x f(t) dt$ ou $\int_a^x f$ désigne la valeur en $x \in \mathbb{R}$ d'*une* primitive de f , c'est un réel.

Note | Je n'utiliserai pas ces notations.

Preuve

Le théorème précédent nous montre tout l'intérêt de calculer des intégrales pour obtenir une primitive.

Méthode (AN) 2.2 (Primitives une fonction en utilisant une intégrale) Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , choisir $a \in I$, puis calculer $\int_a^x f$ pour tout $x \in I$. Si la fonction f n'est pas définie en un point, on prendre garde à bien effectuer ces calculs pour les x où c'est possible.

Exemple 5

- Donner la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $f : x \mapsto 2^x$.



- Donner la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 4 de $g : x \mapsto e^{2x}$.



1.3 Primitives de fonctions usuelles

Dans les tableaux suivants, pour chaque fonction f définie sur un *intervalle* I précisé, on donne *une* primitive F . Les primitives suivantes doivent être connues par coeur, ou *a minima* être retrouvées rapidement.

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	$x \in I \subset \dots$	Condition
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$	$\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	
$\frac{1}{x-a}$	$\ln x-a $	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	$a \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	

$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathcal{D}_{\tan}$	
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$] -1, 1[$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	

À l'aide des formules du tableau et de la dérivation d'une composée, on peut calculer une primitive de $u' u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u' \cos u$, $u' \sin u$, $u' e^u$ etc. lorsque u est dérivable (sous réserve de la bonne définition de la composée). Voir le tableau ci-après.

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$
$u' \times u^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} u^{a+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$u'(ax+b)$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$\frac{1}{a} u(ax+b)$
$u' \times \exp(u)$	$\exp(u)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' \times \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \times \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u)$
$u' \times \text{ch}(u)$	$\text{sh}(u)$
$u' \times \text{sh}(u)$	$\text{ch}(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos(u)$ ou $\arcsin(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Exemple 6 Pour chaque entier $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, déterminer l'expression d'une primitive F_i de f_i sur l'intervalle I_i , avec :

- $f_1(x) = \sqrt{2x+1}, \quad I_2 =]-\frac{1}{2}, +\infty[$
- $f_2(x) = \tan(x), \quad I_3 = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
- $f_3(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, \quad I_4 =]1, +\infty[$
- $f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad I_5 =]1, +\infty[$
- $f_5(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad I_6 =]0, +\infty[.$



Exemple 7 (Puissances) Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-3x}}.$



2. $g : x \mapsto x \left(\sqrt{1+x^2} \right)^3.$



3. $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}.$



CAS DE FRACTIONS RATIONNELLES. On s'intéresse ici aux inverses de fonctions trinôme.

Méthode (AN) 2.3 (Primitives de fractions rationnelles)

- On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

- si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à

$$x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)},$$

puis on écrit la fraction comme somme de deux autres (vous serez toujours guidés à cette étape dans les exercices, à ce stade de l'année) qui se primitivent avec un logarithme.

- Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à

$$x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^2},$$

- si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on se ramène à une arctangente (composée avec une autre fonction).

- On sait également déterminer une primitive des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$$

où a, b, c, d et e sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur pour se débarrasser du terme en x :

$$\begin{aligned} \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} &= \frac{\frac{d}{2a}(2ax + b) + e - \frac{db}{2a}}{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{d}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \left(e - \frac{db}{2a} \right) \frac{1}{ax^2 + bx + c}. \end{aligned}$$

Les constantes multiplicatives ne gênent pas. Le premier terme, de la forme $\frac{u'}{u}$, se primitive avec un logarithme népérien, et le second selon la remarque précédente.

Exemple 8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un domaine à préciser.



- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 2}$.

- ◇ **[Domaine]** Cherchons le domaine de continuité $\mathcal{D}$ de la fraction.



- ◇ **[Décomposition en éléments simples]** Déterminer $A, B \in \mathbb{R}$ deux constantes de sorte que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}.$$



- ◇ **[Primitivation]**



- $g : x \mapsto \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$



- $h : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$



Note $\left| \begin{array}{l} \text{De façon plus générale, on peut montrer qu'une primitive de} \\ \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} \text{ est } \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) \end{array} \right.$

Exemple 9 Déterminons une primitive de : $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2+2x+5}$ sur un domaine à préciser.



CAS DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES. Le maître mot est ici la LINÉARISATION!

Méthode (AN) 2.4 (Primitive de $\cos^p \sin^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$)

1. Si $p = 1$, une primitive directe de $\cos \times \sin^q$ est : $\frac{\sin^{q+1}}{q+1}$.
2. Si $q = 1$, une primitive directe de $\cos^p \times \sin$ est : $-\frac{\cos^{p+1}}{p+1}$.
3. Dans tous les autres cas : commencer par linéariser l'expression (si elle

comporte des produits/puissances), à l'aide de nombres complexes si besoin, puis primitiver.

Exemple 10

1. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$.



2. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$.



3. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \mapsto \cos^3 x \sin x$.



2

TECHNIQUES DE CALCULS D'INTÉGRALES

Nous avons vu précédemment que calculer une primitive revient à un calcul d'intégrale. Pour ces dernières nous disposons de deux techniques principales de calcul : l'intégration par parties et le changement de variable. Ces techniques doivent être envisagées naturellement lorsque l'intégrande ne se primitive pas de manière évidente. Introduisons au préalable une notation qui nous permettra de décrire les hypothèses portant sur les fonctions avec lesquelles nous allons travailler.

Définition 2 | Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction f définie sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ si :

- (i) f est dérivable sur I ,
- (ii) f' est continue sur I .

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

Note

On dit parfois, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, que « f est continûment dérivable »

Il existe des fonctions dérivables non forcément $\mathcal{C}^1$; en revanche, de tels exemples seront étudiés plus tard dans l'année (ils ne sont pas à chercher parmi les fonctions usuelles en tout état de cause).

2.1 Intégration par parties

Cette formule sert dès que l'on souhaite intégrer un produit dont l'un des termes devient plus simple en le dérivant.

Théorème 3 | Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b u(t)v(t) dt = - \int_a^b u(t)v'(t) dt + [uv]_a^b.$$



On utilise une intégration par parties dès que $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ est plus simple à calculer que $\int_a^b u'(t)v(t) dt$: on ne s'occupe pas trop du crochet, puisque c'est un terme qui se calculera de toute façon.

! Attention

Toute intégration par parties doit être justifiée, en rappelant convenablement l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ sur des fonctions appropriées.

Preuve (Point clef — Intégrer la formule de dérivation d'un produit)

Puisque u, v sont supposées $\mathcal{C}^1$, les fonctions u, v sont continues car dérivables, et u', v' sont continues. Ainsi, uv' et $u'v$ sont continues, donc leur intégrale sur $[a, b]$ existe.



Méthode (AN) 2.5 (Quand utiliser l'intégration par parties? et mise en place)

L'intégration par parties est particulièrement utile dans deux situations :

1. Pour calculer une intégrale dont on ne connaît pas directement de primitive.
 2. Pour établir une relation de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier n .
- **[Comment choisir les fonctions?]** Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$ par intégration par parties, on cherche à écrire $f = u'v$ de sorte que l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ soit plus simple à calculer que l'intégrale initiale. Il faut donc choisir :
 - ◇ une fonction u' que l'on sait facilement primitiver ;
 - ◇ une fonction v dont la dérivée v' simplifie le calcul.
 - **[Quelques choix classiques]**
 - ◇ Pour un produit « polynôme $\times$ exponentielle », on dérive le polynôme (son degré diminue) et on primitive l'exponentielle.

Par exemple, pour $\int_0^1 xe^x dx$, on choisit

$$u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$

- ◇ Pour un produit « polynôme $\times$ logarithme », on dérive généralement le logarithme et on primitive le polynôme.
- ◇ Plus généralement, on cherche souvent à dériver $\ln$ ou $\arctan$, car leurs dérivées sont des fonctions rationnelles.
- ◇ Les fonctions $\exp$, $\sin$ et $\cos$ se dérivent et se primitivent facilement. Le choix dépend donc de l'autre facteur.

● **[Quelques situations particulières]**

- ◇ **[Faire apparaître un produit]** Même si l'intégrande ne se présente pas comme un produit, on peut toujours écrire

$$f(x) = 1 \times f(x).$$

C'est notamment utile pour intégrer $\ln$ ou $\arctan$: on prend alors $u' = 1$ et $v = f$.

- ◇ **[Effectuer plusieurs intégrations par parties]** Une première intégration par parties ne suffit pas toujours. Pour les produits d'un polynôme par une exponentielle (ou par $\sin$ ou $\cos$), on peut répéter l'opération jusqu'à faire disparaître le polynôme.
- ◇ **[Faire réapparaître l'intégrale initiale]** Pour une intégrale contenant un produit $\exp \times \cos$ ou $\exp \times \sin$, deux intégrations par parties successives permettent de retrouver l'intégrale de départ. On obtient alors une relation de la forme :

$$I = a + bI, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels avec } b \neq 1, \text{ d'où}$$

$$I = \frac{a}{1-b}.$$

Attention : pour retrouver l'intégrale initiale, il faut continuer à dériver le même facteur (et donc à primitiver l'autre) lors de la deuxième intégration par parties.

Une intégration par parties qui conduit simplement à $I = I$ est correcte, mais n'apporte aucune information. Il faut alors modifier son choix de fonctions ou chercher une autre méthode.

Exemple 11 Calculer les intégrales suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

1. $\int_0^x t e^t dt,$



2. $\int_0^1 (t^2 - t + 3)e^t dt.$



3. $\int_0^x t \ln(t^2 + 1) dt.$





4. $\int_0^1 e^t \sin t \, dt.$



5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(t) \, dt.$ Indication : On reviendra à la définition de la fonction tangente...



Exemple 12 Calculer une primitive de $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ sur un domaine à préciser, en effectuant une intégration par parties.



Note

Vous noterez ici que l'on peut effectuer un « nettoyage » a posteriori des constantes apparaissant.

Exercice 1 Déterminer une primitive d'arctan.

♥ **Exemple 13** Parmi les intégrales ci-dessous, expliquer la ou lesquelles vous semblent calculables. La calculer le cas échéant.

$$I_1 = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad I_3 = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



Note | On aurait pu également simplement dériver l'expression, et constater qu'elle s'annule en e.

2.2 Changement de variable

Voici à présent une technique ressemblant assez fortement à celle de changement d'indice vue pour les sommes et produits dans le **Chapitre (ALG) 4**. Autant nous étions assez contraints pour les changements d'indices (seuls quelques changements étaient autorisés), autant pour les intégrales la plupart des fonctions $\mathcal{C}^1$ conviendront. Voici la formule.

Théorème 4 | Formule du changement de variable

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle I , et $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appelée *fonction de changement de variable*. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

« On pose $x = \varphi(t)$ »

Contrairement aux changements d'indices dans les sommes, on vous donnera toujours le changement de variable à réaliser. En revanche, vous devez savoir le mettre en place, et le justifier.

! Attention

Tout changement de variable doit être justifié, en rappelant que la fonction associée est de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous avons déjà montré la proposition qui suit (en dérivant l'expression donnée). Il s'agit ici de la retrouver *via* une autre méthode.

Proposition 5 | Primitive du logarithme

La fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x \ln x - x$ est l'unique primitive de $\ln$ qui s'annule en e.

Preuve (Point clef — *intégration par parties*)



Preuve (Point clef — *Intégrer la formule de dérivation d'une composée.*)

Notons que f et $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ sont continues sur I et sur $[a, b]$ respectivement, ce qui assure l'existence des intégrales. Introduisons une primitive F de f sur I (il en existe puisque f est continue). Alors $F \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$. Autrement dit :

$$\forall t \in [a, b], \quad (F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$



Dans la pratique, on réalise assez peu souvent un changement de variable en essayant de « coller » à cette formule. On utilise plutôt les calculs formels ci-après, qui correspondent à la formule de changement de variable « non-intégrée »¹ : ainsi, si on pose $x = \varphi(t)$, on écrira

$$\ll f(x) dx = f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \gg$$

Ainsi, pour réaliser le changement $x = \varphi(t)$, on commence par écrire formellement :

$$\ll dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t) dt \iff \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t) \gg.$$

Méthode (AN) 2.6 (Changement explicite – Nouvelle variable en fonction de l'ancienne) Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$ et que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. Poser $u = \varphi(t)$ et calculer : $du = \varphi'(t) dt \iff dt = \frac{1}{\varphi'(t)} du$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
4. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Exemple 14 (Changement de variable explicite)

- Calculer $\int_1^4 \frac{e^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$.
 - ◊ en posant $u = \sqrt{t}$.



- ◊ Retrouver le résultat précédent par primitivation directe.



- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^t + 1}} dt$ en posant $x = \sqrt{e^t + 1}$.



1. Et avec des gros guillemets, car cette version sans intégrale n'a aucun sens mathématique.

Méthode (AN) 2.7 (Changement implicite – Ancienne variable en fonction de la nouvelle) Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale c'est-à-dire trouver deux réels a' et b' tels que $a = \varphi(a')$ et $b = \varphi(b')$.
3. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a' et b' .
4. Poser $t = \varphi(u)$ et calculer : $dt = \varphi'(u)du \iff du = \frac{1}{\varphi'(u)} dt$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
5. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Exemple 15 (Changement de variable implicite)

1. Calculer $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2} dt$ en posant $t = \cos u$.



2. Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin t$.



3. Soient : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

3.1) Montrer que $I = J$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - x$.



3.2) Calculer $I + J$, puis déterminer la valeur de I .



Exemple 16 Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ sur un domaine à préciser, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$.



présentative de l'intégrande. Représentons déjà la 1ère sur un dessin.



Preuve



Corollaire 1 | Intégrale & Parité/Périodicité

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt, \quad \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt, \quad \int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$
- Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et T -périodique sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Remarque 2 Ces formules trouveront une interprétation simple dans le **Chapitre (AN) 7**, lorsque nous aurons revu l'intégrale comme aire sous la courbe re-

- Même preuve que précédemment, avec le même changement de variable à opérer dans $\int_{-a}^0 f(t) dt$.
- Commençons par décomposer l'intégrale comme ci-dessous (grâce à la relation de CHASLES) :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt.$$



Exercice 2 Soient a et b des réels distincts. Calculer $I = \int_a^b (t - a)^3 (b - t)^2 dt$, en effectuant un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale sur $[0, 1]$, puis calculer I . *Il s'agit donc de poser $x = \varphi(t) = \alpha t + \beta$, en choisissant α et β pour que x parcourt $[0, 1]$ lorsque t parcourt $[a, b]$.*

3 EXTENSION AUX FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

3.1 Primitive

On étend la définition de primitive au cas des fonctions à valeurs complexes.

Définition 3 | Primitive d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un *intervalle* I de $\mathbb{C}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable telle que $F' = f$.

Exemple 17 (Primitives d'exponentielles complexes)

- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{ix}$.



- Soit $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. La fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ a pour primitive la fonction



- Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{\lambda x}$.



Lemme 1 | Fonctions de dérivée nulle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable telle que $f' = 0$. Alors f est constante.

Preuve



On déduit alors un ensemble de primitives pour une fonction complexe de même allure que pour une fonction réelle.

Proposition 6 | Ensemble des primitives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I . Si $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f sur l'intervalle I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{C}$.

Preuve



Proposition 7 | Primitiver = Primitiver partie réelle/imaginaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes que l'on écrit sous la forme :

$$f = u + i v, \quad \text{où} \quad u = \operatorname{Re}(f), \quad v = \operatorname{Im}(f). \quad \text{Alors :}$$

- une primitive F de f est $F = U + i V$ où $\begin{cases} U & \text{est une primitive de } u \\ V & \text{est une primitive de } v. \end{cases}$
- Réciproquement, si F est une primitive de f , alors : $\begin{cases} U = \operatorname{Re} F & \text{est une primitive de } u \\ V = \operatorname{Im} F & \text{est une primitive de } v. \end{cases}$

Preuve



Ainsi, pour primitiver une fonction à valeurs complexes, on doit d'abord en trouver son écriture algébrique si aucune formule n'est disponible.

Exemple 18 Soit $z = a + i b \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x - z}$ sur un domaine à préciser.

Note | On utilise ici le premier point de la proposition.



Exemple 19 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ différent de $(0, 0)$. Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u : x \mapsto \cos(ax)e^{bx}$ et de la fonction $v : x \mapsto \sin(ax)e^{bx}$

Note | On utilise ici le second point de la proposition.



3.2 Intégrale

Définition 4 | Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Soient $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$.

- On dit que f est continue sur I si les fonctions u et v sont continues sur I .
- Si f est continue sur I , pour tous réels a et b dans I , on définit $\int_a^b f$ (ou encore $\int_a^b f(x) dx$, $\int_{[a,b]} f(x) dx$) défini par :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\stackrel{(\text{d\'ef.})}{=} \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx, \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f)(x) dx + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)(x) dx. \end{aligned}$$

Remarque 3 Avec les notations précédentes :

- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| =$
- $\operatorname{Re} \left(\int_a^b f(x) dx \right) =$
- $\operatorname{Im} \left(\int_a^b f(x) dx \right) =$
- $\overline{\left(\int_a^b f(x) dx \right)} =$

Remarque 4

- La plupart des propriétés précédentes restent valides pour les fonctions complexes. C'est le cas par exemple de la linéarité, la relation de CHASLES,

l'intégration par parties, le changement de variable.

- En revanche, les propriétés liées à l'ordre (croissance, positivité) n'ont plus de sens dans $\mathbb{C}$.

Exemple 20

- Calculer $I = \int_0^\pi e^{it} dt$ de deux manières différentes.



- Calculer $J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i} dt$.



FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (AN) 2.1 (Justifier l'existence d'une primitive) Il suffit de montrer la continuité de la fonction, le plus souvent en utilisant des théorèmes d'opérations élémentaires sur les fonctions continues.

Méthode (AN) 2.2 (Primitives une fonction en utilisant une intégrale) Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , choisir $a \in I$, puis calculer $\int_a^x f$ pour tout $x \in I$. Si la fonction f n'est pas définie en un point, on prend garde à bien effectuer ces calculs pour les x où c'est possible.

Méthode (AN) 2.3 (Primitives de fractions rationnelles)

- On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

- si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à

$$x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)},$$

puis on écrit la fraction comme somme de deux autres (vous serez toujours guidés à cette étape dans les exercices, à ce stade de l'année) qui se primitivent avec un logarithme.

- Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à

$$x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^2},$$

- si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on se ramène à une arctangente (composée avec une autre fonction).

- On sait également déterminer une primitive des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$$

où a, b, c, d et e sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur pour se débarrasser du terme en x :

$$\frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} = \frac{\frac{d}{2a}(2ax + b) + e - \frac{db}{2a}}{ax^2 + bx + c}$$

$$= \frac{d}{2a} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \left(e - \frac{db}{2a}\right) \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

Les constantes multiplicatives ne gênent pas. Le premier terme, de la forme $\frac{u'}{u}$, se primitive avec un logarithme népérien, et le second selon la remarque précédente.

Méthode (AN) 2.4 (Primitive de $\cos^p \sin^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$)

1. Si $p = 1$, une primitive directe de $\cos \times \sin^q$ est : $\frac{\sin^{q+1}}{q+1}$.
2. Si $q = 1$, une primitive directe de $\cos^p \times \sin$ est : $-\frac{\cos^{p+1}}{p+1}$.
3. Dans tous les autres cas : commencer par linéariser l'expression (si elle comporte des produits/puissances), à l'aide de nombres complexes si besoin, puis primitiver.

Méthode (AN) 2.5 (Quand utiliser l'intégration par parties? et mise en place) L'intégration par parties est particulièrement utile dans deux situations :

1. Pour calculer une intégrale dont on ne connaît pas directement de primitive.
 2. Pour établir une relation de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier n .
- **[Comment choisir les fonctions?]** Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$ par intégration par parties, on cherche à écrire $f = u'v$ de sorte que l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ soit plus simple à calculer que l'intégrale initiale. Il faut donc choisir :
 - ◇ une fonction u' que l'on sait facilement primitiver ;
 - ◇ une fonction v dont la dérivée v' simplifie le calcul.
 - **[Quelques choix classiques]**
 - ◇ Pour un produit « polynôme $\times$ exponentielle », on dérive le polynôme (son degré diminue) et on primitive l'exponentielle.
Par exemple, pour $\int_0^1 x e^x dx$, on choisit
 $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$.
 - ◇ Pour un produit « polynôme $\times$ logarithme », on dérive généralement le logarithme et on primitive le polynôme.
 - ◇ Plus généralement, on cherche souvent à dériver $\ln$ ou $\arctan$, car leurs dérivées sont des fonctions rationnelles.
 - ◇ Les fonctions $\exp$, $\sin$ et $\cos$ se dérivent et se primitivent facilement. Le choix dépend donc de l'autre facteur.

• [Quelques situations particulières]

- ◇ **[Faire apparaître un produit]** Même si l'intégrande ne se présente pas comme un produit, on peut toujours écrire
 $f(x) = 1 \times f(x)$.
C'est notamment utile pour intégrer $\ln$ ou $\arctan$: on prend alors $u' = 1$ et $v = f$.
- ◇ **[Effectuer plusieurs intégrations par parties]** Une première intégration par parties ne suffit pas toujours. Pour les produits d'un polynôme par une exponentielle (ou par $\sin$ ou $\cos$), on peut répéter l'opération jusqu'à faire disparaître le polynôme.
- ◇ **[Faire réapparaître l'intégrale initiale]** Pour une intégrale contenant un produit $\exp \times \cos$ ou $\exp \times \sin$, deux intégrations par parties successives permettent de retrouver l'intégrale de départ. On obtient alors une relation de la forme :

$$I = a + bI, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels avec } b \neq 1, \text{ d'où}$$

$$I = \frac{a}{1-b}.$$

Attention : pour retrouver l'intégrale initiale, il faut continuer à dériver le même facteur (et donc à primitiver l'autre) lors de la deuxième intégration par parties.

Une intégration par parties qui conduit simplement à $I = I$ est correcte, mais n'apporte aucune information. Il faut alors modifier son choix de fonctions ou chercher une autre méthode.

Méthode (AN) 2.6 (Changement explicite – Nouvelle variable en fonction de l'ancienne) Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$ et que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. Poser $u = \varphi(t)$ et calculer : $du = \varphi'(t) dt \iff dt = \frac{1}{\varphi'(t)} du$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
4. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Méthode (AN) 2.7 (Changement implicite – Ancienne variable en fonction de la nouvelle) Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$ », il faut :



1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale c'est-à-dire trouver deux réels a' et b' tels que $a = \varphi(a')$ et $b = \varphi(b')$.
3. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a' et b' .
4. Poser $t = \varphi(u)$ et calculer : $dt = \varphi'(u)du \iff du = \frac{1}{\varphi'(u)} dt$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
5. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

4

EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition de l'intégrale de fonctions continues sur un segment
2. Concernant les primitives :
 - connaître les primitives usuelles ☐
 - savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation classique ☐
 - connaître les opérations sur les primitives ☐
3. Connaître les différentes propriétés de l'intégrale :
 - linéarité et relation de CHASLES ☐
 - positivité et croissance de l'intégrale ☐
4. Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :
 - l'intégration par parties ☐
 - le changement de variable ☐
5. Concernant les équations différentielles :
 - savoir résoudre l'homogène d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 ☐
 - savoir effectuer une variation de la constante pour l'ordre 1 ☐
 - savoir trouver une solution particulière pour l'ordre 2 lorsque le second membre est constant ☐
 - savoir que lorsqu'aucune condition initiale n'est imposée, on a une infinité de solution, on conclut en donnant un ensemble ☐
 - savoir que lorsqu'une condition initiale est imposée, on conclut en donnant une fonction solution ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.

Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.



Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler :

11, 12, 13, 14

4.1 Calculs directs

PRIMITIVES

Exercice 1 | ●○○ Primitives par calcul direct Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \cos(3x)$
2. $x \mapsto \cos^2(x) \sin^2(x)$
3. $x \mapsto \cos(x) \sin^4(x)$
4. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$
6. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
7. $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$
8. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$
9. $x \mapsto \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}^3(x)$

Exercice 2 | ●○○ Du côté de la Physique Soit $\tau, \omega, \varphi, E, R$ des constantes réelles non nulles. Intégrer entre 0 et t_0 les fonctions suivantes :

1. $f_1 : t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}}$,
2. $f_2 : t \mapsto E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$,
3. $f_3 : t \mapsto \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$,
4. $f_4 : t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$,
5. $f_5 : t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

Exercice 3 | ●●○ Primitives avec arctan Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3}$
2. $x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$
3. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$
4. $x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Exercice 4 | ●●○ Fonctions trigonométriques Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (on précisera le domaine de validité de la primitive) en linéarisant :

1. $x \mapsto \sin^4(x)$,
2. $x \mapsto \cos^4(x) \sin^2(x)$,
3. $x \mapsto \cos^3(x) \sin^4(2x)$.

Exercice 5 | ●●○ Primitives de fractions rationnelles Déterminer une primitive de chacune des fonctions rationnelles suivantes (on précisera le domaine de validité de la primitive) :

1. $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$
2. $x \mapsto \frac{1}{4x^2 - 12x + 9}$
3. $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$
4. $x \mapsto \frac{x + 1}{x - x^2}$

INTÉGRALES

Exercice 6 | ●○○ Intégrales par calcul direct Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 \frac{1}{1-x} dx$
2. $\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2} dx$
3. $\int_0^\pi |\cos(x)| dx$
4. $\int_{-1}^3 \max(2, x) dx$,
5. $\int_0^1 t^2 2^{t^3} dt$,
6. $\int_{-1}^1 \frac{(\arctan(x))^2}{1+x^2} dx$.

Exercice 7 | ●●○ Intégrales de fractions rationnelles Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx,$$

$$2. \int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1} dx,$$

$$3. \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx.$$

4.2 Intégration par parties

Exercice 8 | Intégrales avec intégration par parties Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^\pi x \cos(x) dx$$

$$2. \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$3. \int_0^1 x(1-x)^n dx, n \in \mathbb{N}$$

$$4. \int_1^t x^n \ln(x) dx, n \in \mathbb{N}, t > 0$$

Exercice 9 | ●●○ Primitives avec intégration par parties Déterminer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

$$1. x \mapsto x^3 \cos(6x)$$

$$2. x \mapsto x \cos^2(x)$$

$$3. x \mapsto x^2 e^{-x}$$

$$4. x \mapsto x^3 e^{-x^2}$$

Exercice 10 | ●●○ Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$1. f: \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arcsin(x) \end{cases}$$

$$2. f: \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arccos(x) \end{cases}$$

$$3. f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \arctan(x) \end{cases}$$

Exercice 11 | ●●○ [Laly BE – Ander MA] Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 12 | ●●○ [Edgar PO – Alice LA] Soit : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt) \cos^n(t) dt.$

1. Montrer que $I_n = \frac{1}{2}(I_{n-1} - J_n)$ avec :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n+1)t) \cos^{n-1}(t) dt.$$

2. Montrer que $I_{n-1} + J_n = 2I_n$ puis que $J_n = 0$.

3. En déduire I_n .

4.3 Changement de variables

Exercice 13 | ●●○ Intégrales par changement de variable Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x)) dx \quad (u = \tan x)$$

$$2. \int_0^\pi \sin^3(x) \cos^2(x) dx \quad (u = \cos x)$$

$$3. \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx \quad (t = 1+x^3)$$

$$4. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (t = e^x)$$

5. [Wallis] Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx.$$

Indication : on pourra utiliser que pour tout nombre réel x , $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$

Exercice 14 | ●●○ Primitive par changement de variable À l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses, calculer une primitive des fonctions d'une variable réelle suivantes.

$$1. x \mapsto \frac{x}{1+x^4} \quad (u = t^2)$$

$$2. x \mapsto \frac{1}{2+\sqrt{x}} \quad (u = 2+\sqrt{t})$$

$$3. x \mapsto e^{2x} \sin(e^x) \quad (u = e^t)$$

$$4. x \mapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)} \quad (u = \sqrt{\sin(t)})$$

$$5. x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}} \quad (u = e^t)$$

Exercice 15 | ●●○ [Sylvain CL – Charles HE] Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt.$$

1. Calculer $I_n + J_n$.
2. En faisant le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - t$ dans I_n , montrer que $I_n = J_n$.
3. En déduire I_n et J_n .

Exercice 16 | ●●○ Déterminer une primitive F de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ sur un intervalle I de la forme $] -\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$ (on pourra considérer la tangente de l'angle moitié).

Exercice 17 | ●●○ [Mathéo CA – Antoine LO]

1. Soit f continue sur $[a, b]$. Montrer que
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$$
2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 18 | ●●○ [Raphaël MA – Ethan MO] Soit $a > 0$. Calculer :

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx$$

à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

Exercice 19 | ●●○ [Grégoire EL – Louis ME] On considère la fonction $\varphi : t \rightarrow \sqrt{e^t - 1}$.

1. Montrer que la fonction φ réalise une bijection de l'intervalle $I = [1, \ln(5)]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ respectivement sur I et J .
3. En posant le changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, calculer l'intégrale :

$$A = \int_1^{\ln(5)} \frac{e^t}{(3 + e^t) \sqrt{e^t - 1}} dt.$$